1 Rozdělení mechaniky a její náplň

Mechanika je nauka o rovnováze a pohybu hmotných útvarů pohybujících se rychlostí podstatně menší, než je rychlost světla ($v \ll c$).
Vlastnosti skutečných hmotných útvarů jsou obvykle složité pro popis, zavádíme proto idealizované modely. První rozdělení mechaniky tedy můžeme definovat podle stupně idealizace:

- **hmotný bod** - zanedbáváme rozměry tělesa. Hmotný bod je charakterizován pouze svojí hmotností.
- **tuhé těleso** - nedefomuje se účinkem působících sil. Pohyb tělesa závisí na hmotnosti a jejím rozložení v prostoru.
- **poddajné těleso** - má určitý tvar a objem, který se účinkem působících sil mění - vyšetřujeme deformace a napětí v libovolném bodě tělesa.
- **kapalina** - obvykle má málo proměnný objem, ale nezaujímá určitý tvar.
- **plyn** - nemá určitý objem ani tvar

Podle těchto modelů hmotných útvarů můžeme tedy mechaniku dělit

- **mechanika diskrétních soustav**
  - mechanika hmotných bodů
  - mechanika tuhých těles
- **mechanika kontinua**
  - mechanika poddajných těles
  - mechanika tekutin
    - hydromechanika
    - termomechanika

Z jiného hlediska dělíme mechaniku na

- **kinematiku** - zkoumá pohyb bez ohledu na působící síly

- **statiku** - zkoumá rovnováhu těles nebo bodů za klidu nebo za rovnoměrného přímočarého pohybu
- **dynamiku** - zkoumá pohyb jako následek působení vnějších sil. Úlohy dynamiky dále dělíme na
  - *úlohy vlastní dynamiky* - vyšetřujeme pohyb v závislosti na definovaných působících silách.
  - *úlohy kinetostatiky* - hledáme působící zátěžné silové účinky, které způsobí předem definovaný pohyb.

Mechanika má samozřejmě mnoho dalších disciplín, které nebudou (nebo jen velice okrajově) předmětem toho kurzu. Jde především o

- **hydrostatiku**
- **hydrodynamiku**
- **aerodynamiku**
- **biomechaniku**

a mnoho dalších.

2 Kinematika hmotného bodu

Cílem kinematiky hmotného bodu je vyšetřit pohyb hmotného bodu (bodů) bez ohledu na zatěžující síly.
Nechť se hmotný bod pohybuje po spojité křivce v prostoru. Tuto křivku nazýváme **trajektorie - dráha pohybu**. Trajektorie je určena závislostí polohového vektoru $\vec{r}$ na čase

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1}$$

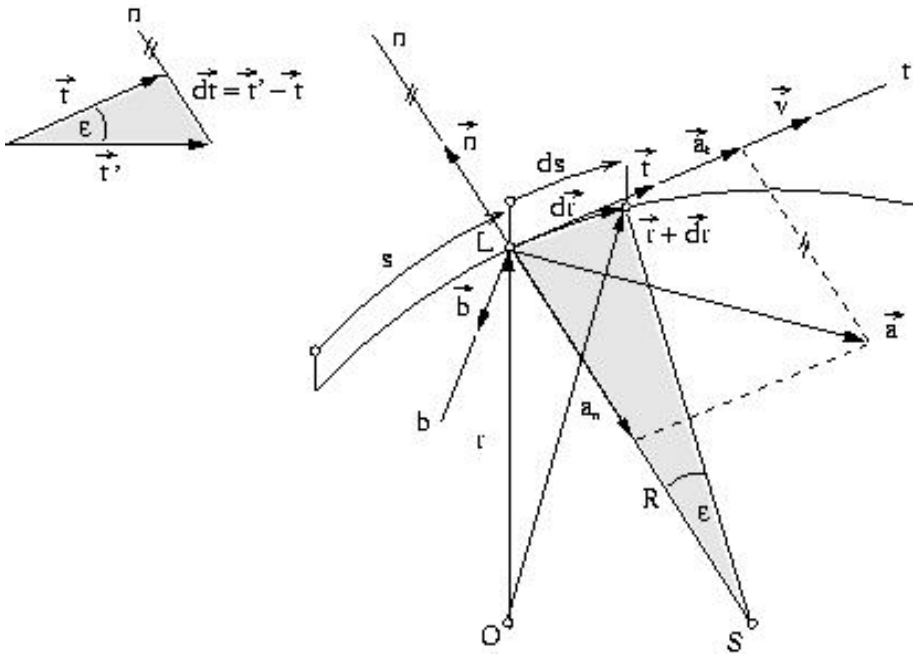
S ohledem na tvar trajektorie dělíme pohyby na

- **přímočarý pohyb hmotného bodu** - trajektorie je přímka
- **křivočarý pohyb hmotného bodu v rovině** - trajektorií je rovinná křivka
- **křivočarý pohyb hmotného bodu v prostoru** - trajektorií je prostorová křivka.

V kinematice hmotného bodu se obecně setkáváme s dvěma typy úloh:

- známe rovnici trajektorie $\vec{r} = \vec{r}(t)$ a derivací této rovnice hledáme základní kinematické veličiny
  - rychlost $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}[ms^{-1}]$
  - zrychlení $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}[ms^{-2}]$
- máme předepsáno zrychlení $\vec{a}(t)$ a počáteční podmínky v čase $t = t_0$ a úlohou je integrací určit
  - rychlost $\vec{v}(t)$
  - rovnici trajektorie $\vec{r}(t)$

2.1 Křivočarý pohyb bodu v rovině



Nechť se hmotný bod L pohybuje po rovinné křivce k. Poloha bodu na křivce je v každém okamžiku určena polohovým vektorem

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

kde $s = s(t)$ je křivočará oblouková souřadnice.
Rychlost určíme derivací polohového vektoru podle času

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{ds}}_{\vec{t}} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v(t)} = \vec{t}v(t)$$

$\Rightarrow$ vektor rychlosti **VŽDY** leží na tečně k trajektorii a její velikost je

$$v = \dot{s}$$

.

Zrychlení bodu určíme další derivací rychlosti podle času

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{t}}{ds}}_{\perp\vec{t}} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} v + \vec{t}\frac{dv}{dt}$$

1. Frenetův vztah

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = K\vec{n},$$

$$K = \frac{1}{R}$$

kde K je flexní křivost a R je torzní křivost.

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{n} \underbrace{\frac{v^2}{R}}_{a_n} + \vec{t} \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a_t},$$

kde a_n je velikost normálového zrychlení a a_t je velikost tečného zrychlení.

V kartézských souřadnicích můžeme polohový vektor vyjádřit jako:

$$\vec{r}(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t)$$

Rychlost a zrychlení potom získáme derivací tohoto vztahu

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z(t)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

2.2 Přímočarý pohyb hmotného bodu

Trajektorií přímočarého pohybu hmotného bodu je přímka $x = x(t)$. Jde pravděpodobně o nejjednodušší a základní pohyb bodu.
Rychlost hmotného bodu charakterizuje časovou změnu polohy a je definována vztahem

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Zrychlení hmotného bodu, který koná přímočarý pohyb, charakterizuje časovou změnu rychlosti a je určeno vztahy

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v},$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}.$$

Pokud je rychlost funkcí polohy je zrychlení definováno vztahem

$$a = \frac{dv(x)}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{d(v^2)}{2dx}$$

Vztah

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(v^2)}{2dx}$$

bývá v literatuře často označován jako **Zlatá rovnice kinematiky**.

Podle funkce zrychlení dělíme přímočarý pohyb do tří základních skupin na pohyb

- **rovnoměrný** - $a = 0$
- **rovnoměrně zrychlený (zpomalený)** - $a = konst$
- **nerovnoměrný** - $a = a(t)$

Podívejme se nyní podrobně na jednotlivé druhy přímočarého pohybu hmotného bodu.

2.2.1 Rovnoměrný pohyb

Pro zrychlení při rovnoměrném pohybu platí

$$a = 0.$$

Počáteční poloha a rychlost v čase $t = t_0$ jsou: $v(t_0) = v_0$, $x(t_0) = x_0$. Pro rychlost při rovnoměrném pohybu platí

$$a = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v(t) = v_0 = konst \Rightarrow v(x) = v_0$$

Polohu, jako funkci času určíme integrací

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0 dt$$

$$x - x_0 = v_0(t - t_0)$$

$$x(t) = x(0) + v_0(t - t_0)$$

2.2.2 Rovnoměrně zrychlený (zpomalený) pohyb

Rovnoměrný přímočarý pohyb hmotného bodu je charakterizován vztahem

$$a = \pm a_0 = konst.$$

(Znaménko + zrychlený, znaménko - zpomalený pohybu).

Pro počáteční rychlost a polohu v čase $t = t_0$ platí: $v(t_0) = v_0$, $x(t_0) = x_0$. Dosazením zrychlení do zlaté rovnice kinematiky a integrací postupně dostaneme

$$a = \frac{dv}{dt} = \pm a_0$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} \pm a_0 dt$$

$$v(t) = v_0 \pm a_0(t - t_0)$$

Další integrací tohoto vztahu dostaneme

$$v = \frac{dx}{dt} = v0 \pm a_0(t - t_0)$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} \left[v0 \pm a_0(t - t_0)\right] dt$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) \pm \frac{1}{2} a_0(t - t_0)^2 \tag{2}$$

Rychlost jako funkci polohy hledáme opět integrací Zlaté rovnice kinematiky

$$a = \frac{d(v^2)}{2dx} = \pm a_0$$

$$\int_{v_0^2}^{v^2} dv^2 = \pm \int_{x_0}^{x} 2a_0 dx$$

$$v^2 = v_0^2 \pm 2a_0(x - x_0)$$

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 \pm 2a_0(x - x_0)}$$

2.2.3 Nerovnoměrný pohyb

Pro zrychlení při nerovnoměrném pohybu platí

$$a = a(t, v, x) \tag{3}$$

Počáteční rychlost a poloha jsou v čase $t = t_0$ dány vztahy: $v(t_0) = v_0$, $x(t_0) = x_0$ Řešení nerovnoměrného pohybu je nutné vždy určit integrací zlaté rovnice kinematiky

$$v = \frac{dx}{dt},$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(v^2)}{2dx}$$

neboť nelze napsat obecně platné vztahy jako u pohybů rovnoměrných.

Příklad Zrychlení hmotného bodu konajícího harmonický pohyb je popsáno funkcí $a = -\Omega^2 x$, kde Ω^2 je kladná konstanta. Vyšetřete všechny kinematické závislosti $v(t)$, $x(t)$ a $v(x)$ tohoto pohybu, jsou-li počáteční podmínky v čase $t = 0$: $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

$$a(x) = -\Omega^2 x = \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0$$

Jedná se o obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu.
Charakteristická rovnice má tvar:

$$\lambda^2 + \Omega^2 = 0$$

$$\lambda^2 = \Omega^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\Omega$$

Obecné řešení má tvar:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}$$

Využijeme Eulerova vztahu:

$$e^{\pm i\Omega t} = \cos\Omega t \pm \sin\Omega t$$

a dostaneme

$$x(t) = C_1 \cos\Omega t + C_1 i \sin\Omega t + C_2 \cos\Omega t - C_2 i \sin\Omega t$$

$$x(t) = \underbrace{(C_1 + C_2)}_{A} \cos\Omega t + \underbrace{i(C_1 - C_2)}_{B} \sin\Omega t$$

$$x(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t$$

Konstanty A a B určíme z počátečních podmínek pohybu

$$\dot{x}(t) = -A\Omega\sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t$$

$$x(0) = x_0 = A$$

$$\dot{x}(0) = v(0) = v_0 = B\Omega$$

$$B = \frac{v_0}{\Omega}$$

Hledaná závislost tedy je:

$$x(t) = x_0\cos\Omega t + \frac{v_0}{\Omega}\sin\Omega t$$

Tuto závislost ještě můžeme upravit na tvar

$$x(t) = X \sin(\Omega t + \varphi),$$

kde X je amplituda harmonického pohybu, Ω je kruhová frekvence a φ je počáteční fáze. Tedy:

$$x_0 \cos \Omega t + \frac{v_0}{\Omega} \sin \Omega t = X \ sin\Omega t \cos \varphi + X \cos \Omega t \sin \varphi$$

$$x_0 = X \sin \varphi$$
$$\frac{v_0}{\Omega} = X \cos \varphi$$

Součtem druhých mocnin těchto dvou rovnic dostaneme po úpravě

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\Omega}\right)}.$$

Podělením těchto dvou rovnic dostaneme

$$\tan \varphi = \frac{x_0 \Omega}{v_0}$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{x_0 \Omega}{v_0}\right).$$

Našli jsme vztahy pro amplitudu X a fázi φ a tím je závislost jednoznačně určena.

Závislost $v(t)$ dostaneme derivací $x(t)$ podle času:

$$v(t) = \dot{x}(t) = X\Omega\cos(\Omega t + \varphi)$$

Závislost $v(x)$ dostaneme integrací vztahu

$$a(x) = \frac{d(v^2)}{2dx} = -\Omega^2 x$$

$$\int_{v_0^2}^{v^2} d(v^2) = -\int_{x_0}^{x} 2\Omega^2 x dx$$

$$v^2 - v_0^2 = -\Omega^2(x^2 - x_0^2)$$

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 - \Omega^2(x^2 - x_0^2)}$$

Úpravou tohoto vztahu dostaneme

$$v^2 = v_0^2 - \Omega^2 x^2 + \Omega^2 x_0^2$$

$$\frac{v^2}{\Omega^2} = \underbrace{\frac{v_0^2}{\Omega^2} + x_0^2}_{X^2} - x^2$$

$$x^2 + \frac{v^2}{\Omega^2} = X^2$$

$$\frac{x^2}{X^2} + \frac{v^2}{X^2\Omega^2} = 1$$

Jedná se o elipsu. Graf závislosti rychlosti na výchylce můžeme tedy znázornit v tzv. fázové rovině elipsou.

Perioda harmonického pohybu je

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}[s]$$

a frekvence je

$$f = \frac{1}{T}[s^{-1} = Hz]$$

2.3 Pohyb hmotného bodu po kružnici

pohyb hmotného bodu po kružnici o poloměru R je popsán průvodičem $r = x\vec{i} + y\vec{j}$, kde

$$x = R\cos\varphi$$

$$y = R\sin\varphi$$

a $\vec{i}$ a $\vec{j}$ jsou jednotkové vektory.
V souřadnicové soustavě tečny t a normály n je oblouková souřadnice S vyjádřena jako

$$S = R\varphi$$

. Velikost rychlosti získáme derivací:

$$v = \frac{dS}{dt} = \dot{S} = R\dot{\varphi} = R\omega$$

kde $\omega = \dot{\varphi}$ je úhlová rychlost.
Rychlost v leží vždy na tečně.
Složky zrychlení bodu L jsou:

- **tečné zrychlení** (leží na tečně)

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{S} = R\ddot{\varphi} = R\alpha,$$

  kde $\alpha = \ddot{\varphi} = \dot{\omega}$ je úhlové zrychlení průvodiče

- **normálové zrychlení**

$$a_n = R\dot{\varphi}^2 = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

Velikost výsledného zrychlení hmotného bodu L je potom

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

vektorově:

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}$$