1. *Předpokládejme, že náhodná veličina X představující počet minut potřebných k provedení určité operace, má přibližně LN rozdělení s parametry $\mu = 2.30$ a $\sigma = 0.69$. Odhadněte relativní četnost těch případů, kdy sledovaná doba je delší než 15 minut.*
   . *[1 bod]*

   $X \sim LN(\mu = 2.30; \sigma = 0.69)$
   $P(X > 15) = 1 - F(15) = 1 - \Phi(\frac{\ln 15 - 2.3}{0.69}) = 1 - \Phi(0.5914) \doteq 1 - 0.73 = 0.27$

2. *Najděte kvantily $x_{0.01}$ a $x_{0.95}$ pro veličinu $X \sim W(c = 1.5; \delta = 2)$, spočtěte $P(2 < X < 10)$.* *[1 bod]*

   kvantil $x_{0.01} \Rightarrow F(x_{0.01}) = 0.01 \Rightarrow 1 - e^{-(\frac{x_{0.01}}{2})^{1.5}} = 0.01 \Rightarrow x_{0.01} = 0.0931$
   kvantil $x_{0.95} \Rightarrow F(x_{0.95}) = 0.95 \Rightarrow 1 - e^{-(\frac{x_{0.95}}{2})^{1.5}} = 0.95 \Rightarrow x_{0.95} = 1.1562$
   $P(2 < X < 10) = F(10) - F(2) = 1 - e^{-(\frac{10}{2})^{1.5}} - (1 - e^{-(\frac{2}{2})^{1.5}}) \doteq 36.79\%$

3. *Náhodná veličina X má rozdělení popsané následující funkcí hustoty $f(x)$. Vypočítejte střední hodnotu a rozptyl veličiny $2X + 3$.*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & pro \quad x \in (0,1) \\ 0 & jinak \end{cases}$$

   [2 body]

   $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x(2x) dx = \frac{2}{3}$
   $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - E^2(X) = \int_0^1 x^2(2x) dx - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{18}$
   $E(2X + 3) = 2E(X) + 3 = \frac{13}{3}$
   $D(2X + 3) = 2^2 D(X) = \frac{4}{18}$

4. *Pracovník cestuje do práce a z práce tramvají, která má interval 5 minut. Jeho příchody na zastávku jsou „zcela náhodné“.*
   Určete ppst, že pracovník bude čekat déle než 1 minutu;
   určete ppst, že celková doba čekání za 20 dnů bude nejvýše 120 minut? (Použijte centrální limitní větu). *[2 body]*

   Lze předpokládat, že příchody na zastávku mají charakter náhodné veličiny X, která která se řídí rovnoměrným rozdělením, pak $E(X) = 2.5$ a $D(X) = \frac{25}{12}$
   $P(X > 1) = \frac{4}{5}$
   Během dvaceti dnů bude čekat celkem 40 krát.
   Podle centrální limitní věty $\sum_{i=1}^{40} X_i \sim N(\mu = 40 \cdot E(X); \sigma^2 = 40 \cdot D(X))$
   $P(\sum_{i=1}^{40} X_i < 120) = F(120) = \Phi(\frac{120 - 40 \cdot 2.5}{\sqrt{40 \cdot 25/12}}) = \Phi(2.19) \doteq 0.986$

5. *Podle dohody mezi dodavatelem a odběratelem má být v zásilce 10 000 kusů výrobků maximálně 2% zmetků. Byla dohodnuta zjednodušení přejímková kontrola formou kontroly vybraných 500 výrobků. Dodavatel požaduje, aby pravděpodobnost nepřijetí dobré zásilky byla maximálně 5%. Náhodná veličina X popisuje počet vadných výrobků ve výběru. Určete počet výrobků X ve výběru, při kterých může odběratel odmítnout přijetí zásilky; určete ppst zamítnutí zásilky, která má 3% zmetků.* *[2 body]*

   $X \sim HG(n = 500; M = 10000; N = 200) \approx Bi(n = 500; p = 0.02) \approx Po\,(\lambda = 10)$
   Hledám x takové, aby $P(X \geq x) < 5\% < P(X \geq x - 1)$
   $1 - P(X \leq x - 1) < 5\% < 1 - P(X \leq x - 2)$
   $P(X \leq x - 1) > 0.95 > P(X \leq x - 2)$
   $F(x - 1) > 0.95 > F(x - 2)$
   $F(15) = 0.951 > 0.95 > F(14) = 0.917$
   $x = 16$

   Pokud v zásilce je 3% vadných výrobků, pak pro počet vadných výrobků X ve výběru platí
   $X \sim HG(n = 500; M = 10000; N = 300) \approx Bi(n = 500; p = 0.03) \approx Po(\lambda = 15) \approx N(\mu = 15; \sigma^2 = 15)$
   Zásilku tedy přijímáme, je-li $x \leq 15$. Ppst zamítnutí zásilky, která obsahuje 3% zmetků je $1 - P(X \leq 15) = 1 - F(15) = 1 - \Phi(\frac{15-15}{\sqrt{15}}) = 1 - \Phi(0) \doteq 50\%$.

6. *Z náhodného výběru*
   9 10 7 11 10 12 9 10
   určete intervalový odhad střední hodnoty a rozptylu základního souboru.
   (uvažujte $\alpha = 5\%$) *[2 body]*

   $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 9.75$; $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = 2.214$; $s = 1.488$

   Intervalový odhad střední hodnoty
   $P(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu = n - 1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu = n - 1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

   $t_{0.975}(7) = 2.365$

   $P(9.75 - 2.365 \cdot \frac{1.488}{\sqrt{8}} < \mu < 9.75 + 2.365 \cdot \frac{1.488}{\sqrt{8}}) = 95\%$

   $P(8.506 < \mu < 10.994) = 95\%$

   Intervalový odhad rozptylu
   $P(\frac{s^2 \cdot (n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu=n-1)} < \sigma^2 < \frac{s^2 \cdot (n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(\nu=n-1)}) = 1 - \alpha$

   $\chi^2_{0.025}(7) = 1.69$; $\chi^2_{0.975}(7) = 16.0$

   $P(\frac{2.214 \cdot 7}{16.0} < \sigma^2 < \frac{2.214 \cdot 7}{1.69}) = 0.95$

   $P(0.969 < \sigma^2 < 9.170) = 0.95$

1. *Nechť životnost zařízení se řídí Weibullovým rozdělením s parametry $\lambda = 0.2$ a $c = 1.5$. Jakou záruční lhůtu stanoví výrobce, jestliže počet reklamovaných výrobků nemá překročit 10%?* *[1 bod]*

   $X \sim W(\lambda = 0.2; c = 1.5)$
   $P(X < x) = 10\%$
   kvantil $x_{0.10} \Rightarrow P(X < x_{0.10}) = F(x_{0.10}) = 0.1$
   $1 - e^{-(x_{0.10} \cdot 0.2)^{1.5}} = 0.10 \Rightarrow x_{0.1} = 1.1153$

2. *Najděte kvantily $x_{0.01}$ a $x_{0.95}$ pro veličinu $X \sim LN(\mu = 2; \sigma^2 = 9)$, spočtěte $P(2 < X < 12)$.* *[1 bod]*

   kvantil $x_{0.01} \Rightarrow F(x_{0.01}) = 0.01 \Rightarrow \Phi(\frac{ln x_{0.01} - 2}{3}) = 0.01 \Rightarrow \frac{ln x_{0.01} - 2}{3} = -2.33$
   $\Rightarrow x_{0.01} = 0.0068$
   kvantil $x_{0.95} \Rightarrow F(x_{0.95}) = 0.95 \Rightarrow \Phi(\frac{ln x_{0.95} - 2}{3}) = 0.95 \Rightarrow \frac{ln x_{0.95} - 2}{3} = 1.64$
   $\Rightarrow x_{0.95} = 1012.32$
   $P(2 < X < 12) = F(12) - F(2) = \Phi(\frac{\ln 12 - 2}{3}) - \Phi(\frac{\ln 2 - 2}{3}) = \Phi(0.16) - \Phi(-0.44) \doteq 23.4\%$

3. *Náhodná veličina X má rozdělení popsané následující funkcí hustoty $f(x)$. Vypočítejte střední hodnotu a rozptyl veličiny $3X - 2$.*

   $$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & pro \quad x \in (0,1) \\ 0 & jinak \end{cases}$$

   [2 body]

   $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x(2 - 2x) dx = \frac{1}{3}$
   $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - E^2(X) = \int_0^1 x^2(2 - 2x) dx - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{18}$
   $E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = -1$
   $D(3X - 2) = 3^2 D(X) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$

4. *Životnost jedné součástky se řídí exponenciálním rozdělení se střední hodnotou m=30 hodin a směrodatnou odchylkou s=5 hodin. Pro zvýšení spolehlivosti zařízení je v něm instalováno n-identických součástek zapojených takovým způsobem, že při poruše jedné součástky je okamžitě uvedena v činnost další součástka.*
   Určete ppst, že součástka bude fungovat déle než 50 hodin;
   určete ppst, že při šestnáctinásobném zálohování bude zařízení fungovat bez poruchy alespoň 450 hodin ? (Použijte centrální limitní větu). *[2 body]*

   $E(X) = A + \delta = 30$; $D(X) = \delta^2 = 5^2 \Rightarrow A = 25$; $\delta = 5$
   $P(X > 50) = 1 - F(50) = 1 - e^{-\frac{50-25}{5}} = 99.33\%$
   Při 16-ti násobném zálohování platí podle centrální limitní věty
   $\sum_{i=1}^{16} X_i \sim N(\mu = 16 \cdot E(X); \sigma^2 = 16 \cdot D(X))$

   $P(\sum_{i=1}^{16} X_i > 450) = 1 - F(450) = 1 - \Phi(\frac{450 - 16 \cdot 30}{\sqrt{16 \cdot 25}}) = 1 - \Phi(-1.5) = \Phi(1.5) \doteq 0.93$

5. *Podle dohody mezi dodavatelem a odběratelem má být v zásilce 10 000 kusů výrobků maximálně 1% zmetků. Byla dohodnuta zjednodušení přejímková kontrola formou kontroly vybraných 500 výrobků. Dodavatel požaduje, aby pravděpodobnost nepřijetí dobré zásilky byla maximálně 5%. Náhodná veličina X popisuje počet vadných výrobků ve výběru. Určete počet výrobků X ve výběru, při kterých může odběratel odmítnout přijetí zásilky; určete ppst přijetí zásilky, která má 2% zmetků.* *[2 body]*

   $X \sim HG(n = 500; M = 10000; N = 100) \approx Bi(n = 500; p = 0.01) \approx Po(\lambda = 5)$
   Hledám x takové, aby $P(X \geq x) < 5\% < P(X \geq x - 1)$
   $1 - P(X \leq x - 1) < 5\% < 1 - P(X \leq x - 2)$
   $P(X \leq x - 1) > 0.95 > P(X \leq x - 2)$
   $F(x - 1) > 0.95 > F(x - 2)$
   $F(9) = 0.968 > 0.95 > F(8) = 0.932$
   $x = 10$

   Pokud v zásilce je 2% vadných výrobků, pak pro počet vadných výrobků X ve výběru platí
   $X \sim HG(n = 500; M = 10000; N = 200) \approx Bi(n = 500; p = 0.02) \approx Po(\lambda = 10)$
   Zásilku tedy přijímáme, je-li $x \leq 9$.
   Ppst přijetí zásilky, která obsahuje 2% zmetků je $P(X \leq 9) = F(9) \doteq 45.8\%$

6. *Z náhodného výběru*
   8 9 7 11 10 10 9 12
   určete intervalový odhad střední hodnoty a rozptylu základního souboru. (uvažujte $\alpha = 5\%$) *[2 body]*

   $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 9.5$; $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = 2.571$; $s = 1.604$

   Intervalový odhad střední hodnoty
   $P(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu = n - 1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu = n - 1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

   $t_{0.975}(7) = 2.365$

   $P(9.5 - 2.365 \cdot \frac{1.604}{\sqrt{8}} < \mu < 9.5 + 2.365 \cdot \frac{1.604}{\sqrt{8}}) = 95\%$

   $P(8.159 < \mu < 10.841) = 95\%$

   Intervalový odhad rozptylu
   $P(\frac{s^2 \cdot (n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu = n-1)} < \sigma^2 < \frac{s^2 \cdot (n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(\nu = n-1)}) = 1 - \alpha$

   $\chi^2_{0.025}(7) = 1.69$; $\chi^2_{0.975}(7) = 16.0$

   $P(\frac{2.571 \cdot 7}{16.0} < \sigma^2 < \frac{2.571 \cdot 7}{1.69}) = 0.95$

   $P(1.125 < \sigma^2 < 10.649) = 0.95$