

## Obsah

<b>1</b>	<b>Základy matematické logiky</b>	<b>6</b>
1.1	Typy důkazů . . . . .	7
1.2	Matematická indukce . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Množiny</b>	<b>11</b>
2.1	Zobrazení množin . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Reálná čísla</b>	<b>14</b>
3.1	Mohutnost množin . . . . .	16
3.2	Supremum a infimum . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Posloupnosti</b>	<b>21</b>
4.1	Limita posloupnosti . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Řady</b>	<b>32</b>
5.1	Kritéria konvergence . . . . .	33
5.2	Absolutně konvergentní a alternující řady . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Funkce</b>	<b>42</b>
6.1	Limity funkcí . . . . .	46
6.2	Spojité funkce na množině . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Derivace</b>	<b>57</b>
7.1	Základní věty diferenciálního počtu . . . . .	63
7.2	Vyšší derivace a Taylorova formule . . . . .	66
7.3	Průběh funkce . . . . .	69
<b>8</b>	<b>Integrály</b>	<b>77</b>
8.1	Neurčité integrály . . . . .	77
8.2	Určité integrály . . . . .	84
8.3	Základní věty integrálního počtu . . . . .	89
8.4	Integrální součet, Riemannův integrál . . . . .	92
8.5	Aplikace v geometrii a fyzice . . . . .	97

## Přehled zkratk a značení

Značky jsou v přehledu uvedeny v pořadí v jakém se vyskytují v textu s odkazem na stranu prvního použití nebo definice.

Značka	Význam	Strana
$\neg V, \text{non } V, V'$	negace výroku	6
$\forall$	pro každé	6
$\exists$	existuje	6
$\exists!$	existuje právě jeden	6
$\wedge$	konjunkce (a zároveň)	6
$\vee$	disjunkce (nebo)	6
$\implies$	implikace (jestliže, pak)	6
$\iff$	ekvivalence (právě tehdy, když)	6
$k/n$	$n$ je dělitelné $k$	8
$k \nmid n$	$n$ není dělitelné $k$	8
$\in$	je prvkem	11
$\notin$	není prvkem	11
$\subset$	je podmnožinou	11
$\cup$	sjednocení	11
$\cap$	průnik	11
$A'$	doplňěk množiny	11
$\emptyset$	prázdná množina	11
$X \times Y$	kartézský součin	12
$f: X \rightarrow Y, y = f(x)$	funkce z množiny $X$ do množiny $Y$	12
$D(f)$	definiční obor zobrazení $f$	12
$H(f)$	obor hodnot zobrazení $f$	12
$f^{-1}$	inverzní zobrazení	13

$\mathbb{N}$	přirozená čísla	14
$\mathbb{Z}$	celá čísla	14
$\mathbb{Q}$	racionální čísla	14
$\mathbb{R}$	reálná čísla	14
$\mathbb{C}$	komplexní čísla	14
$<, \leq$	je menší než, je menší než nebo se rovná	15
$>, \geq$	je větší než, je větší než nebo se rovná	15
$=$	rovná se	15
$\ll$	je mnohem menší ve srovnání	29
$X \sim Y$	$X$ má stejnou mohutnost jako $Y$	16
$\infty$	nekonečno	17
$\sup, \inf$	supremum, infimum	17
$\max, \min$	maximum, minimum	17
$\mathbb{R}_0^+$	nezáporná reálná čísla	18
$U(x_0)$	okolí bodu $x_0$	19
$P(x_0)$	prstencové okolí bodu $x_0$	19
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval $\{x; a \leq x \leq b\}$	17
$(a, b)$	otevřený interval $\{x; a < x < b\}$	19
$\text{int } A$	vnitřek množiny $A$	19
$\partial A$	hranice množiny $A$	19
$\bar{A}$	uzávěr množiny $A$	19
$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$	nekonečné sjednocení množin ( $= A_1 \cup A_2 \cup \dots$ )	20
$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$	nekonečný průnik množin ( $= A_1 \cap A_2 \cap \dots$ )	20
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$	posloupnost reálných čísel	21
$\lim_{n \rightarrow \infty}$	limita	22

$e$	Eulerovo číslo ( $e \doteq 2,718\dots$ )	25
$\pi$	Ludolfovo číslo ( $\pi \doteq 3,141\dots$ )	15
$n!$	$n$ -faktoriál ( $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ )	29
$a^n$	$n$ -tá mocnina čísla $a$ ( $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \times}$ )	29
$\log_a n$	logaritmus čísla $n$ při základě $a$	29
$\ln n$	přirozený logaritmus čísla $n$	29
$\sqrt[n]{a}$	$n$ -tá odmocnina čísla $a$	29
$\liminf, \underline{\lim}$	limes inferior	30
$\limsup, \overline{\lim}$	limes superior	30
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	(nekonečná) řada ( $= a_1 + a_2 + \dots$ )	32
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	limita funkce $f$ v bodě $x_0$	46
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0+)$	limita funkce $f$ v bodě $x_0$ zprava	46
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0-)$	limita funkce $f$ v bodě $x_0$ zleva	46
$f = O(g)$	funkce $f$ je omezená ve srovnání s funkcí $g$	51
$f = o(g)$	funkce $f$ je malé o funkce $g$	51
$f'(x_0) = f' _{x_0}$	derivace funkce $f$ v bodě $x_0$	57
$f'_+(x_0)$	derivace funkce $f$ v bodě $x_0$ zprava	57
$f'_-(x_0)$	derivace funkce $f$ v bodě $x_0$ zleva	57
$f'$	derivace funkce $f$	57
$C(\langle a, b \rangle)$	množina spojitých funkcí na $\langle a, b \rangle$	57
$C^1(\langle a, b \rangle)$	množina spojitě diferencovatelných funkcí na $\langle a, b \rangle$	57
$C^n(\langle a, b \rangle)$	množina spojitě diferencovatelných funkcí až do řádu $n$	75
$df(x_0, h)$	diferenciál funkce $f$ v bodě $x_0$	58
$f''$	druhá derivace funkce $f$	66
$f^{(n)}$	$n$ -tá derivace funkce $f$	66
$d^n f(x_0, h)$	$n$ -tý diferenciál funkce $f$ v bodě $x_0$	66

$T_n(x, x_0)$	Taylorův polynom v bodě $x_0$	68
$R_{n+1}(x, x_0)$	zbytek Taylorova polynomu	68
$\int f(x) dx$	neurčitý integrál funkce $f$	77
$\int_a^b f(x) dx$	určitý integrál funkce $f$	77
$\mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$	množina Newtonovsky integrovatelných funkcí na $\langle a, b \rangle$	85
$S(D)$	horní součet funkce $f$	92
$s(D)$	dolní součet funkce $f$	92
$\overline{\int_a^b f(x) dx}$	horní integrál funkce $f$	93
$\underline{\int_a^b f(x) dx}$	dolní integrál funkce $f$	93
$\mathcal{R}(\langle a, b \rangle) dx$	množina Riemannovsky integrovatelných funkcí na $\langle a, b \rangle$	93

# 1 Základy matematické logiky

První pravidla pro hledání pravdivých úsudků našel řecký vědec **Aristoteles**. (384-382 př.n.l.).



Aristoteles využíval výroky s objekty a predikáty (tzv. predikátový počet). Jeho konstrukce správného důkazu se nazývají *sylogismy*. Známy příklad sylogismu je:

Všichni lidé jsou smrtelní.

Sokrates je člověk.

Sokrates je smrtelný.

Aristoteles dokázal na základě podobných příkladů odvodit obecná pravidla dedukce.

”Stromy v lese jsou ze dřeva a z gumy.” To je divná věta, řeknete si, napůl pravda, napůl lež. Ukážeme si, že z hlediska matematické logiky je uvedená věta lživá. Pomocí symbolů budeme v této kapitole zapisovat naše myšlenkové postupy a rozhodovat o jejich správnosti. Vycházíme přitom z předpokladu, že jsme schopni se dohodnout, co je a co není pravda. Potom můžeme definovat základní pojem matematické logiky - výrok.

**Definice 1.1:** **Výrok** je tvrzení (značíme  $V$ ), o němž má smysl uvažovat, že je buď pravdivé nebo nepravdivé.

**Negace výroku** (značíme  $\neg V$ , non  $V$  nebo  $V'$ ) je pravdivá, jestliže výrok  $V$  je nepravdivý a naopak.

*Příklad 1.1:* Petrovice u Karviné leží na hranici s Polskem.

(Výrok) Kam jdeš? (Není výrok)

Všechny hrušky jsou žluté. (Výrok) Existuje hruška, která není žlutá. (Negace předchozího výroku)

**Definice 1.2:** **Kvantifikované výroky** vytváříme použitím **kvantifikátorů**:  $\forall$  - ”pro každé”;  $\exists$  - ”existuje”;  $\exists!$  - ”existuje právě jeden”.

*Příklad 1.2:*  $\forall$  hrušku platí, že je žlutá.

**Definice 1.3:** **Složené výroky** dostaneme spojením **výroků** pomocí následujících **logických spojek**.

Název	konjunkce	disjunkce	implikace	ekvivalence
zkratka	$\wedge$	$\vee$	$\implies$	$\iff$
význam	a zároveň	nebo	jestliže, pak	právě tehdy, když

*Příklad 1.3:* Praha je město a zároveň Praha leží na Slovensku. (konjunkce)

Číslo 3 je prvočíslo nebo číslo 3 je sudé. (disjunkce)

Jestliže je trojúhelník rovnostranný (předpoklad implikace), pak je rovnoramenný. (závěr implikace)

Trojúhelník je rovnostranný právě tehdy, když jeho úhly jsou shodné. (ekvivalence)

Nyní si zavedeme pravidla, která určí, kdy jsou složené výroky pravdivé. Pro zkrácení zápisu zavádíme následující definici.

**Definice 1.4:** Výrokovou formuli rozumíme **složený výrok**, ve kterém nahradíme výroky písmeny (např.  $V_1 \wedge V_2$ ).

Označíme-li číslem 1 pravdu (výrok je pravdivý) a číslem 0 nepravdu, pak dostaneme následující tabulku pravdivostních hodnot výrokových formulí.

$V_1$	$V_2$	$\neg V_1$	$V_1 \wedge V_2$	$V_1 \vee V_2$	$V_1 \Rightarrow V_2$	$V_1 \Leftrightarrow V_2$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Cvičení 1.1: Určete, který z výroků v předcházejícím příkladu (1.3) je pravdivý.

[Konjunkce je nepravdivá, ostatní výroky jsou pravdivé.]

Cvičení 1.2: Doplňte tabulku pravdivostních hodnot pro následující výrokové formule:  $\neg V_2 \Rightarrow \neg V_1$ ;  $V_1 \wedge \neg V_2$ ;  $\neg(V_1 \Rightarrow V_2)$ ;  $(V_1 \Rightarrow V_2) \wedge (V_2 \Rightarrow V_1)$ .

$V_1$	$V_2$	$V_1 \Rightarrow V_2$	$\neg V_2 \Rightarrow \neg V_1$	$V_1 \wedge \neg V_2$	$\neg(V_1 \Rightarrow V_2)$	$(V_1 \Rightarrow V_2) \wedge (V_2 \Rightarrow V_1)$
1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1

## 1.1 Typy důkazů

Z předchozího cvičení je vidět, že **ekvivalenci**  $V_1 \Leftrightarrow V_2$  lze nahradit **konjunkcí** dvou implikací  $(V_1 \Rightarrow V_2) \wedge (V_2 \Rightarrow V_1)$ . Podobně **implikaci**  $V_1 \Rightarrow V_2$  můžeme nahradit její **obměnou**  $\neg V_2 \Rightarrow \neg V_1$ , popřípadě negaci **implikace** nahradíme výrokem  $V_1 \wedge \neg V_2$ . Tyto výroky použijeme v následujících důkazech.

K zakladatelům matematické logiky patří anglický matematik a logik **George Boole** (1815-1864).



Boole ukázal souvislosti mezi algebraickými symboly a symboly, které reprezentují logické formy. Algebru logiky zpracoval v dnešním pojetí na konci 19. století E. Schröder a nazval ji Booleova algebra. Booleova algebra našla široké uplatnění v logických obvodech a výpočetní technice.

Na internetové adrese <http://logik.phl.univie.ac.at/~chris/formular-uk-zentral.html> lze **interaktivně vyhodnocovat** pravdivost složených výroků.

Příklad 1.4: Dokažte, že:  $\forall n \in \mathbb{N}$  platí:  $3/n \Leftrightarrow 3/n^2$ .

Při hledání odpovědi na otázku "Co to je vlastně důkaz?" zjistíme, že je to vlastně způsob, jak se přesvědčit o správnosti matematických vět. Spolehlivost matematických tvrzení je důsledkem metody, kterou se dokazují. Vycházíme z jednoduchých snadno přijatelných tvrzení - axiomů a pomocí dohodnutých pravidel matematické logiky ověřujeme pravdivost závěrů.

Systémem, který je vybudován logicky na axiómech, se zabýval Kurt Gödel (1906-1978).



Proslavil se zejména důkazem vět o neúplnosti axiomatického systému. Ukázal, že v každém systému lze zformulovat větu, kterou v rámci tohoto axiomatického systému nelze dokázat.

Tedy dokazujeme ekvivalenci  $V_1 \Leftrightarrow V_2$ , kde  $V_1: 3/n$ ,  $V_2: 3/n^2$ .

Důkaz ekvivalence  $V_1 \Leftrightarrow V_2$  rozdělíme do důkazu dvou implikací.

1.  $V_1 \Rightarrow V_2$ ,  $(3/n \Rightarrow 3/n^2)$  (Implikace zleva doprava)

Použijeme **přímý důkaz**, který spočívá v sestavení řetězce konečného počtu pravdivých implikací  $V_1 \Rightarrow V_{11} \Rightarrow \dots \Rightarrow V_2$ .

Konkrétně vyjdeme z **předpokladu**  $3/n$  a dokážeme **závěr**  $3/n^2$ :  $3/n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$  takové, že  $n = 3k \Rightarrow n^2 = 3 \cdot 3k^2 \Rightarrow 3/n^2$ .

2.  $V_2 \Rightarrow V_1$ ,  $(3/n^2 \Rightarrow 3/n)$  (Implikace zprava doleva)

Použijeme **nepřímý důkaz**, který spočívá v přímém důkazu **obměny**  $\neg V_1 \Rightarrow \neg V_2$  původní implikace  $V_2 \Rightarrow V_1$ .

Konkrétně dokazujeme přímo implikaci  $3 \nmid n \Rightarrow 3 \nmid n^2$ .

$3 \nmid n \Rightarrow n = 3k + 1 \vee n = 3k + 2; k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$n^2 = 3 \cdot (3k^2 + 2k) + 1 \vee n^2 = 3 \cdot (3k^2 + 4k + 1) + 1 \Rightarrow 3 \nmid n^2$ .

V některých případech je výhodnější použít **důkaz sporem**, ve kterém dokážeme, že neplatí negace implikace. Tedy platí původní implikace.

Podle cvičení (1.2) je negace implikace  $\neg(V_1 \Rightarrow V_2)$  ekvivalentní výroku  $V_1 \wedge \neg V_2$  (předpoklad ponecháme v platnosti a znegujeme závěr implikace).

Příklad 1.5: Dokažte implikaci  $5/n^2 - 2 \Rightarrow 5 \nmid n + 1$ .

Použijeme důkaz sporem a dokážeme, že neplatí negace implikace ve tvaru  $5/n^2 - 2 \wedge 5/n + 1$ .

Pro **spor** tedy předpokládáme, že  $5/n + 1$ .

Potom platí  $5/n + 1 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n + 1 = 5k \Rightarrow n^2 = (5k - 1)^2 \Rightarrow n^2 = 5(5k^2 - 2k) + 1 \Rightarrow n^2 - 2 = 5(5k^2 - 2k) - 1 \Rightarrow 5 \nmid n^2 - 2$ , což je spor s předpokladem  $5/n^2 - 2$ .

Odtud vyplývá, že výrok  $5/n^2 - 2 \wedge 5/n + 1$  není pravdivý a naopak původní implikace  $5/n^2 - 2 \Rightarrow 5 \nmid n + 1$  je pravdivá.



Cvičení 1.3:

a) Dokažte:  $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1: 5/n + 3 \Rightarrow 5/n^2 - 4$ .

[Použijte

přímý důkaz.  $5/n + 3 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n + 3 = 5k \Rightarrow n^2 = (5k - 3)^2 \Rightarrow n^2 = 25k^2 - 30k + 9 \Rightarrow n^2 - 4 = 5(5k^2 - 6k + 1) \Rightarrow 5/n^2 - 4]$

b) Dokažte:  $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1: 7/n^2 - 2 \Rightarrow 7 \nmid n + 2$ .

[Použijte důkaz sporem. Přímý důkaz:

$7/n^2 - 2 \Rightarrow n^2 - 2 = 7k \Rightarrow n^2 - 4 = 7k - 2 \Rightarrow (n - 2)(n + 2) = 7k - 2 \Rightarrow 7 \nmid n + 2 \wedge 7 \nmid n - 2.$ ]

**1.2 Matematická indukce**

**Definice 1.5:** Pomocí matematické indukce dokazujeme tvrzení  $V(n)$  pro přirozená čísla  $n$ . Jestliže

1.  $V(n_0)$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$  je pravdivé a
2. z platnosti  $V(k)$  vyplývá platnost  $V(k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , pak tvrzení  $V(n)$  je pravdivé pro všechna  $n \geq n_0$ .

Příklad 1.6:

Dokážeme tvrzení  $V(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Tvrzení  $V(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2}$  je pravdivé.

2. Předpokládáme, že platí

$$V(k): 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

(INDUKČNÍ PŘEDPOKLAD)

Ověříme, že platí

$$V(k + 1): 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

(CÍL INDUKCE)

Důkaz:  $(1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k + 1) =$

(použijeme indukční předpoklad)

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Ověřili jsme oba předpoklady, tudíž tvrzení  $V(n)$  je pravdivé pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .

Matematická indukce je založena na předpokladu, že existuje jedno přirozené číslo (obvykle značíme 1) a za každým přirozeným číslem následuje další (následovník). U indukce přecházíme od jednotlivých znalostí k obecným závěrům. Matematické indukce dokazuje platnost daného tvrzení pro všechna přirozená čísla. Poznamenejme, že počítač je schopen ověřit platnost tvrzení pouze pro konečný počet přirozených čísel.

Příklad 1.7: Bernoulliho nerovnost

Máme dokázat, že  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq -2$  platí:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

1. Pro  $n = 1$  nastane rovnost  $1+x = 1+x$ .
2. Ukážeme, že platí:  $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ . Upravíme uvedenou nerovnost a dostaneme

$$\begin{aligned} (1+x)^n(1+x) &\geq 1+nx+x, \\ (1+x)^n + (1+x)^n x &\geq 1+nx+x. \end{aligned}$$

Podle indukčního předpokladu je  $(1+x)^n \geq 1+nx$  a stačí tedy dokázat, že

$$(1+x)^n x \geq x.$$

Pro  $x \geq 0$  nerovnost zřejmě platí.

Pokud  $x < 0$ , pak uvedenou nerovnost vydělíme  $x$  a dostaneme  $(1+x)^n \leq 1$ . Tato nerovnost platí pro  $-2 \leq x < 0$ . Což jsme měli dokázat.

Cvičení 1.4: Dokažte následující vztahy.

a)  $\forall n \in \mathbb{N}: 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$

$$\begin{aligned} [1) 1 = 1; \quad 2) 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n = \\ \frac{1-q^n}{1-q} + q^n = \frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.] \end{aligned}$$

b)  $\forall n \in \mathbb{N}, n > 4: 2^n > n^2.$

$$[1) 2^5 > 5^2; \quad 2) 2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > n^2 \cdot 2 > (n+1)^2.]$$

c)  $\forall n \in \mathbb{N}: 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$

$$\begin{aligned} [1) 1 = 1; \quad 2) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \\ \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} + (n+1)^2 = \\ \frac{((2n+1)n+6(n+1))(n+1)}{6} = \frac{(2n+3)(n+2)(n+1)}{6}.] \end{aligned}$$

Důkaz nerovnosti

$(1+x)^n \geq 1+nx$  pro  $x \geq -1$  podal švýcarský matematik **Jacob I. Bernoulli** (1654-1705).



Zabýval se rovněž teorií řad a dokázal divergenci harmonické řady. Vyřešil diferenciální rovnici  $y' = p(x)y + q(x)y^n$ , která nyní nese jeho jméno.

## 2 Množiny

**Definice 2.1:** **Množina** je soubor objektů, které nazýváme **prvky množiny**. Píšeme  $x \in A$  a čteme  $x$  je prvkem množiny  $A$ , popř.  $y \notin B$  a čteme  $y$  není prvkem (nepatří do) množiny  $B$ .

Řekneme, že množina  $A$  je **podmnožinou** množiny  $B$ , píšeme  $A \subset B$ , když platí:

Jestliže  $x$  je prvkem množiny  $A$ , pak  $x$  je také prvkem množiny  $B$ . Zkráceně  $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$ .

Příklad 2.1: Zadání množin

$A = \{1, 3, 9\}$  - množina je zadána výčtem prvků.

$B = \{x ; x \text{ je liché číslo}\}$  - množina prvků stejné vlastnosti. Platí:  $4 \notin B$  a  $A \subset B$ .

Rostoucí míra zobecnění a abstrakce v matematice vedla k zavedení pojmu množina. První ucelenou teorii množin vytvořil německý matematik **Georg Cantor** (1845-1918).



**Definice 2.2:** **Rovnost** dvou množin je definována vztahem:  $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$ .

Řekneme, že  $A$  je **vlastní podmnožina**  $B$ , jestliže  $A \subset B \wedge A \neq B$ .

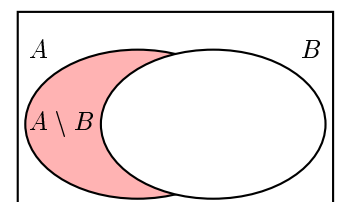
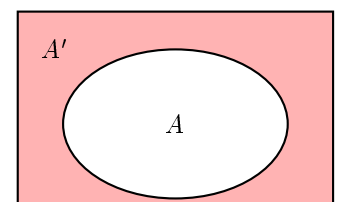
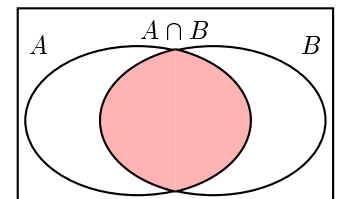
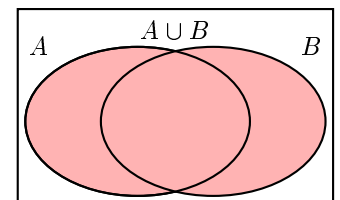
**Sjednocení** množin  $A, B$ , značíme  $A \cup B$  a platí  $A \cup B = \{x ; x \in A \vee x \in B\}$ .

**Průnik** množin  $A, B$ :  $A \cap B = \{x ; x \in A \wedge x \in B\}$ .

**Doplňěk** množiny  $A$ :  $A' = \{x ; x \notin A\}$ .

**Rozdíl** množin  $A, B$ :  $A \setminus B = \{x ; x \in A \wedge x \notin B\}$ .

**Prázdná množina** se značí  $\emptyset$  a neobsahuje žádný prvek.



Cvičení 2.1:

a) Napište negaci výroku  $A \subset B$

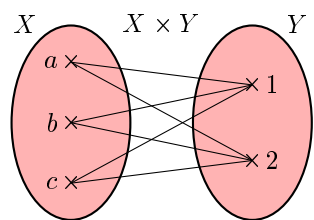
$$[\exists x_0 \in A \wedge x_0 \notin B.]$$

b) Dokažte tvrzení: a)  $\emptyset \subset A$ , b)  $A \setminus B = A \cap B'$ .

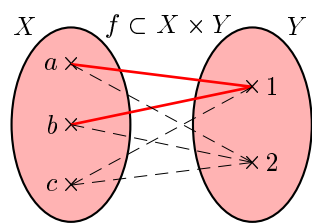
[a) Sporem: Negace implikace  $x \in \emptyset \wedge x \notin A$  je nepravdivá, tedy implikace  $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$  je pravdivá.

b)  $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B' \Leftrightarrow x \in A \cap B'$ .

## 2.1 Zobrazení množin



$$X \times Y = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$



$$f = \{(a, 1), (b, 1)\}$$

**Definice 2.3:** Kartézským součinem množin  $X, Y$  nazveme množinu

$$X \times Y = \{(x, y) ; x \in X, y \in Y\},$$

dvojice  $(x, y)$  se nazývá **uspořádaná dvojice** prvků množin  $X, Y$ . Libovolná podmnožina kartézského součinu se nazývá **relace**.

Podmnožina  $f \subset X \times Y$  se nazývá **zobrazení** z množiny  $X$  do množiny  $Y$ , jestliže platí

$$(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2.$$

(Ke každému  $x \in X$  existuje nejvýše jedno  $y \in Y$  takové, že  $(x, y) \in f$ ).

Píšeme:  $f: X \rightarrow Y$  nebo  $y = f(x)$ .

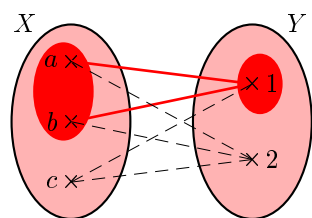
*Příklad 2.2:* Označíme-li čas  $t$  a ujetou dráhu auta  $s(t)$ , pak dvojice  $(t, s(t))$  tvoří zobrazení.

Dvojice (student, známka z matematiky) tvoří zobrazení.

Dvojice (auto, státní poznávací značka) tvoří zobrazení.

*Cvičení 2.2:* Určete, kdy dvojice (známka, student) tvoří zobrazení a kdy pouze relaci.

[Dvojice tvoří zobrazení, když neexistují dva studenti se stejnou známkou. Jinak se jedná o relaci.]



$$D(f) = \{a, b\} \quad H(f) = \{1\}$$

**Definice 2.4:**

**Definiční obor** zobrazení  $f$  se nazývá množina

$$D(f) = \{x \in X ; \exists y \in Y \wedge y = f(x)\}$$

(množina vzorů, argumentů, nezávislé proměnných).

**Obor hodnot** zobrazení  $f$  se nazývá množina

$$H(f) = \{y \in Y ; \exists x \in X \wedge y = f(x)\}$$

(množina obrazů, závislé proměnných).

**Definice 2.5:** Zobrazení  $f: X \rightarrow Y$  se nazývá **prosté** (injektivní), jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in X: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

**na množinu** (surjektivní), jestliže

$$\forall y \in Y \exists x \in X \text{ takové, že } y = f(x),$$

**vzájemně jednoznačné** (bijektivní), jestliže je prosté, na množinu a  $X = D(f)$ .

*Příklad 2.3:* Zobrazení  $f: \text{číslo losu} \rightarrow \text{los}$  je vzájemně jednoznačné zobrazení.

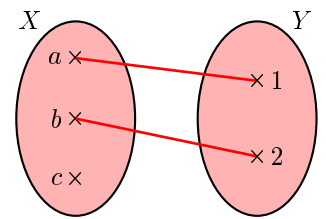
**Definice 2.6:** Nechť  $f \subset X \times Y$  je zobrazení. Jestliže množina  $f^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X; (x, y) \in f\}$  je zobrazení, pak říkáme, že  $f^{-1}$  je **inverzní zobrazení** k zobrazení  $f$  (a naopak).

*Příklad 2.4:* Zobrazení  $f^{-1}: \text{los} \rightarrow \text{číslo losu}$  je inverzní zobrazení k zobrazení  $f$  z předchozího příkladu (2.3).

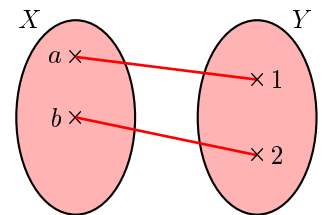
**Věta 2.1:** Zobrazení  $f: X \rightarrow Y$  je prosté právě tehdy, když existuje inverzní zobrazení  $f^{-1}$ .

*Důkaz:* "⇒" Důkaz provedeme sporem. Budeme předpokládat, že množina  $f^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X; (x, y) \in f\}$  není zobrazení, tedy  $\exists y \in Y, x_1 \neq x_2 \in X$  takové, že  $(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1}$ . Potom  $(x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f$ , což je spor s předpokladem, že  $f$  je prosté zobrazení.

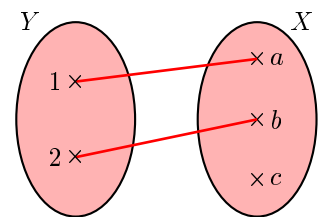
"⇐" Nyní pro spor předpokládáme, že  $f$  není prosté zobrazení, tedy  $\exists y \in Y, x_1 \neq x_2 \in X$  takové, že  $(x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f \Rightarrow (y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1}$ , což je spor s předpokladem, že  $f^{-1}$  je zobrazení.



$f = \{(a, 1), (b, 2)\}$  je prosté a na.



$f = \{(a, 1), (b, 2)\}$  je vzájemně jednoznačné.



$f^{-1} = \{(1, a), (2, b)\}$  je inverzní zobrazení k zobrazení  $f$ .

### 3 Reálná čísla

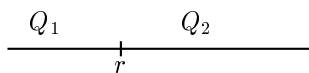
Potřeba počítat dny, úrodu, měřit a dělit pozemky ap. vedla k vytvoření pojmu číslo.

Teprve v 16.století se v Evropě rodí představa o iracionálních číslech jako o desetinných číslech s neukončeným neperiodickým zápisem.

Německý matematik **Richard Dedekind** (1831-1916)



přišel na myšlenku, že je-li množina racionálních čísel rozdělena na dvě neprázdné podmnožiny  $Q_1, Q_2$  takové, že  $\forall q_1 \in Q_1, \forall q_2 \in Q_2: q_1 < q_2$ , pak existuje takové reálné číslo  $r$ , že  $\forall q_1 \in Q_1: q_1 \leq r$ ,  $\forall q_2 \in Q_2: q_2 > r$ . Dnes se tato myšlenka označuje jako Dedekindovy řezy.



**Definice 3.1:** Základní množiny čísel tvoří čísla:

**Přirozená**  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

**Celá**  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

**Racionální**  $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$

**Reálná**  $\mathbb{R}$  (budeme definovat)

**Komplexní**  $\mathbb{C} = \{a + ib; a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

Použijeme-li desítkovou soustavu pro zápis zlomku  $\frac{1}{3}$ , dostaneme výraz  $\frac{1}{3} = 0,333\dots = 0,\bar{3}$ . Zobecnění tohoto zápisu vede k následující definici.

**Definice 3.2:** Výraz  $\mathbf{a} = \pm \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \dots$ , kde  $a_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  nazýváme **desetinným rozvojem**.

Jestliže existuje  $k \in \mathbb{N}$  takové, že  $\forall i > k$  je  $a_i = 0$ , pak hovoříme o **konečném desetinném rozvoji**, jinak o **nekonečném desetinném rozvoji**.

V případě, kdy se v nekonečném desetinném rozvoji číslice nebo skupiny číslic neustále opakují, pak hovoříme o **periodickém desetinném rozvoji**, v opačném případě o **neperiodickém desetinném rozvoji**.

*Příklad 3.1:* Číslo  $\frac{3}{4} = 0,75$  má konečný desetinný rozvoj.

Číslo  $1,11\dots = 1,\bar{1}$  má (nekonečný) periodický desetinný rozvoj a představuje například dobu  $t$ , po kterou skáče míč, jehož první skok trvá 1 sekundu a každý další skok je desetkrát kratší.

Zároveň  $9t = 10t - t = 11,\bar{1} - 1,\bar{1} = 10$ , tedy  $t = \frac{10}{9}$ .

**Definice 3.3:** Říkáme, že každý desetinný rozvoj reprezentuje **reálné číslo**. Konečný nebo periodický desetinný rozvoj reprezentuje **racionální číslo**. Neperiodický rozvoj reprezentuje **iracionální číslo**.

*Cvičení 3.1:* Dokažte, že zlomek  $\frac{p}{q}$ , kde  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$  lze zapsat jako konečný nebo periodický desetinný rozvoj.

[Naznačíme dělení  $p : q = \pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ , pak existuje nejvýše  $q$  různých zbytků dělení  $z_1, z_2, \dots, z_k$ ,  $k \leq q$  takových, že  $(10 \cdot z_i) : q = a_i + z_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Pokud existuje  $i$  takové, že zbytek dělení  $z_i = 0$ , pak dostaneme konečný desetinný rozvoj, v opačném případě se po nejvýše  $q$  krocích začnou zbytky  $z_i$  i čísla  $a_i$  pravidelně opakovat.]

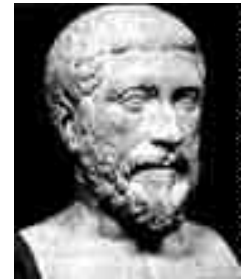
**Příklad 3.2:** Číslo  $\sqrt{2}$  je iracionální. má neperiodický desetinný rozvoj.

Pro důkaz sporem předpokládáme, že  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , neboli  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  a  $p, q$  jsou nesoudělná čísla, potom  $2q^2 = p^2 \Rightarrow 2/p^2 \Rightarrow 2/p \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : p = 2k \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow 2/q$ . Odtud vyplývá, že  $p, q$  jsou sudá čísla, což je spor s předpokladem jejich nesoudělnosti.

**Cvičení 3.2:** Dokažte  $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ , kde  $a$  je prvočíslo.

[Důkaz je podobný jako pro  $\sqrt{2}$ .]

Skutečnost, že přepona čtverce o straně jedna se nedá vyjádřit jako podíl dvou přirozených čísel, byla objevena v Pythagorejské škole. **Pythagoras ze Samu** (569?-475? př.n.l.).



**Definice 3.4:** (Uspořádání na  $\mathbb{R}$ .)

Na množině celých čísel  $\mathbb{Z}$  definujeme uspořádání  $<$  (čteme: je menší než) následovně:  $\dots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \dots$

Podobně definujeme uspořádání  $<$  pro čísla s konečným desetinným rozvojem (např.  $-3,1 < -0,5$ ;  $3,157 < 3,16$  ap.).

Pro  $n \in \mathbb{N}$  a nekonečné desetinné číslo  $a = \pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$  definujeme  **$n$ -místnou dolní**  $\underline{a}_n = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n$  a  **$n$ -místnou horní**  $\bar{a}_n = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n + (0,1)^n$  **desetinnou aproximaci** čísla  $a$ .

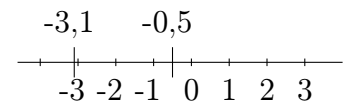
Pro  $a, b \in \mathbb{R}$  definujeme

$$a < b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \bar{a}_n < \underline{b}_n.$$

Jestliže  $a \not< b$ , pak píšeme  $a \geq b$ .

Rovnost čísel  $a, b \in \mathbb{R}$  je dána vztahem

$$a = b \Leftrightarrow a \geq b \wedge b \geq a.$$



**Příklad 3.3:**

K číslu  $\pi = 3,1415926 \dots$  je  $\underline{\pi}_1 = 3,1$  a  $\bar{\pi}_3 = 3,142$ .



Možná vás rovnost  $0,\overline{9} = 1$  překvapila. Zkusíme proto následující výpočet  $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \Leftrightarrow 0,33\dots \cdot 3 = 1 \Leftrightarrow 0,\overline{9} = 1$ .

### Cvičení 3.3:

a) Dokažte  $\pi < \frac{22}{7}$  a  $0,\overline{9} = 1$ .

$$[\overline{\pi}_4 = 3,1416 < 3,1428 = \frac{22}{7} ; 0,\overline{9}_n = 1 = \underline{1}_n, n \in \mathbb{N}.]$$

b) Dokažte  $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$ .

$$[a < b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \overline{a}_n < \underline{b}_n \Rightarrow b - a \geq \underline{b}_n - \overline{a}_n > 0.]$$

V roce 1878 publikoval Georg Cantor článek, ve kterém vyslovil hypotézu kontinua, neboli tvrzení, že všechny nekonečné množiny mají buď mohutnost množiny přirozených čísel nebo mohutnost intervalu.

V roce 1963 americký matematik **Paul Cohen** (1934- )



dokázal, že hypotéza kontinua je nerozhodnutelná. To znamená, že se nedá dokázat, ani vyvrátit.

0,10111011...  
 0,01101001...  
 0,00011011...  
 0,11100101...  
 0,00111011...  
 0,10101001...  
 0,00111011...  
 0,11110101...  
 $b = 0,0011\dots$

## 3.1 Mohutnost množin

**Definice 3.5:** Řekneme, že množiny  $X, Y$  mají **stejnou mohutnost**, jestliže existuje **vzájemně jednoznačné** zobrazení  $F: X \rightarrow Y$ . Píšeme  $m(X) = m(Y)$  nebo  $X \sim Y$ .

**Definice 3.6:** Množina  $X$  se nazývá **konečná**, jestliže  $\exists n \in \mathbb{N}$  tak, že  $X \sim \{1, 2, \dots, n\}$ . Říkáme, že  $X$  má  $n$  prvků. Množina  $X$  se nazývá **spočetná**, jestliže  $X \sim \mathbb{N}$ . Množina  $X$  se nazývá **nespočetná**, jestliže není konečná ani spočetná.

### Příklad 3.4:

Označíme  $\mathbb{N}_s = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ je sudé}\}$ , pak  $f(n) = 2n$  je bijekce  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_s$  a  $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_s$ .

Zobrazení  $f(n) = (-1)^n \frac{2n+(-1)^n-1}{4}$  je bijekce  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  a  $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ .

Nechť  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , pak  $f(i, j) = i + \sum_{k=1}^{i+j-2} k$  je bijekce  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  a  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ .

**Cvičení 3.4:** Dokažte, že  $\mathbb{Q}$  je spočetná množina.

[Ukažte, že  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ .]

**Příklad 3.5:** Množina reálných čísel je nespočetná.

Pro jednoduchost uvažujeme pouze podmnožinu  $M \subset \mathbb{R}$  tvaru  $M = \{0, a_1 a_2 a_3 \dots; a_n \in \{0, 1\}\}$ . Předpokládáme, že existuje bijekce  $f: \mathbb{N} \rightarrow M$ . Nyní vytvoříme číslo  $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ , kde  $b_i = 1 - a_i$ , pak  $b \in M$ , ale  $b \notin H(f)$ , tedy  $f$  není bijekce a množina  $M$  je nespočetná.



Cvičení 3.5: Cantorovo diskontinuum.

Uvažujeme množinu  $\mathcal{C} = \langle 0, 1 \rangle \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left( \frac{3^k-2}{3^n}, \frac{3^k-1}{3^n} \right)$ .

(Z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  vyjmeme prostřední třetinu, ze zbylých dvou třetin vyjmeme opět prostřední třetiny atd.).

Sečtěte délku intervalů vyjmutých z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  a dokažte, že Cantorovo diskontinuum  $\mathcal{C}$  je nespočetná množina.

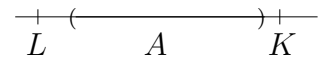
[a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$ , b) Pokud číslo

$a \in \mathcal{C}$  zapíšeme ve tvaru  $a = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots$ , pak  $a_i \in \{0, 2\}$  a podle předchozího příkladu (3.5) je  $\mathcal{C}$  množina nespočetná.]



**3.2 Supremum a infimum**

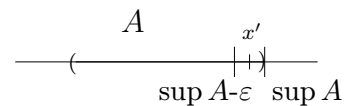
**Definice 3.7:** Řekneme, že množina  $A$  je **shora omezená**, jestliže  $\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in A: x < K$ , **zdola omezená**, jestliže  $\exists L \in \mathbb{R} \forall x \in A: L < x$ , **omezená**, jestliže je zároveň shora a zdola omezená, **neomezená**, jestliže není omezená.



Příklad 3.6: Množina přirozených čísel  $\mathbb{N}$  je zdola omezená a neomezená.

**Definice 3.8:** Nechť  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ . Číslo  $\sup A \in \mathbb{R}$  nazýváme **supremem** množiny  $A$ , jestliže platí:

1.  $\forall x \in A: x \leq \sup A$ , (horní závora),
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in A: \sup A - \varepsilon < x'$ , (nejmenší horní závora).



Číslo  $\inf A \in \mathbb{R}$  nazýváme **infimem** množiny  $A$ , jestliže platí:

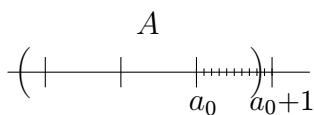
1.  $\forall x \in A: \inf A \leq x$ , (dolní závora),
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in A: \inf A + \varepsilon > x'$ , (největší dolní závora).

Je-li  $\sup A \in A$ , pak se nazývá **maximem** množiny  $A$  a značí se **max A**. Je-li  $\inf A \in A$ , pak se nazývá **minimem** množiny  $A$  a značí se **min A**.

Příklad 3.7:

Pro  $A = \langle 2, 5 \rangle$  je  $\inf A = \min A = 2$  a  $\sup A = 5$ .

Pro  $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$  je  $\inf A = 0$  a  $\sup A = \max A = 1$ .



Pro neomezené množiny např.  $A = (-\infty, 1)$  dodefinujeme  $\inf A = -\infty$ , pro  $A = \{1, 2, 3, \dots\}$  je  $\sup A = \infty$ .

**Věta 3.1:** (o existenci supréma)

Nechť  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ ,  $A$  je shora omezená. Pak existuje  $\sup A$ .

Důkaz: Protože množina  $A$  je shora omezená a neprázdná, tak existuje  $a_0 \in \mathbb{Z}$  takové, že má následující dvě vlastnosti:

i)  $\forall x \in A: x < a_0 + 1$ , ii)  $\exists x' \in A: x' \geq a_0$ .

Dále, existuje  $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  tak, že

i)  $\forall x \in A: x < a_0, a_1 + 0,1$ , ii)  $\exists x'' \in A: x'' \geq a_0, a_1$ .

Podobně existuje  $a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  tak, že

i)  $\forall x \in A: x < a_0, a_1 a_2 + (0,1)^2$ , ii)  $\exists x''' \in A: x''' \geq a_0, a_1 a_2$  a tak dále.

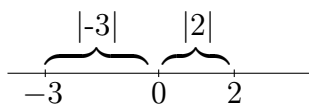
O čísle  $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$  lze dokázat, že splňuje podmínky supréma množiny  $A$ .

Cvičení 3.6: Dokončete důkaz předchozí věty.

[Důkaz povedeme sporem.]

1) Nejdříve dokážeme, že číslo  $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$  je horní závora množiny  $A$ . Pro spor předpokládáme, že  $\exists x_0 \in A \wedge x_0 > a \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \wedge x_0 \geq \underline{x}_{0n} > \bar{a}_n = a_0, a_1 a_2 + \dots + a_n + (0,1)^n$ , což je spor s první vlastností čísla  $a$ . Tedy číslo  $a$  splňuje první vlastnost supréma.

2) Nyní dokážeme, že  $a$  je nejmenší horní závora. Opět pro spor předpokládáme, že  $\exists \varepsilon > 0$  tak, že  $\forall x \in A$  platí  $x \leq a - \varepsilon \Rightarrow x < a \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \bar{x}_{0n} < \underline{a}_n = a_0, a_1 a_2 + \dots + a_n$ , což je spor s druhou vlastností čísla  $a$ . Tedy  $a$  splňuje i druhou vlastnost supréma.]



**Definice 3.9:** Zobrazení  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$  dané předpisem  $f(x) = \max\{x, -x\}$  nazveme **absolutní hodnotou**.

Absolutní hodnotu čísla  $x$  značíme  $|x|$ .

Cvičení 3.7: Dokažte:  $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0. \end{cases}$

[ $x \geq 0 \Rightarrow \max\{x, -x\} = x$ ,  $x \leq 0 \Rightarrow \max\{x, -x\} = -x$ .]

**Věta 3.2:** (vlastnosti absolutní hodnoty)Nechť  $a, b \in \mathbb{R}$ , pak

$$\text{i) } |a| \geq 0, \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad b \neq 0,$$

$$\sqrt{a^2} = |a|,$$

$$\text{ii) } |a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{trojúhelníková nerovnost,}$$

$$\text{iii) } ||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \text{číslo } |a - b| \text{ nazýváme}$$

**vzdálenost bodů a, b.**Cvičení 3.8:

a) Dokažte trojúhelníkovou nerovnost.

[Zřejmě  $\pm x \leq |x|$ , pak pro  $x + y \geq 0$  je  $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$   
a pro  $x + y \leq 0$  je  $|x + y| = -x - y \leq |x| + |y|$ .]

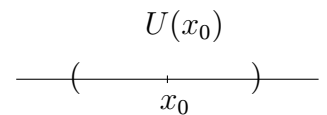
b) Dokažte, že množina  $A$  je omezená právě tehdy, když  $\exists c > 0 \forall x \in A: |x| \leq c$ .

[Zřejmě  $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c \Rightarrow$  množina  $A$  je omezená zdola i shora.

Množina  $A$  je omezená zdola  $\Rightarrow L \leq x$ , shora  $\Rightarrow x \leq K$ . Tedy  $|x| \leq c = \max\{|L|, |K|\}$ .]

**Definice 3.10:**

Množinu  $U(x_0) = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < \varepsilon\}$  nazveme **okolím bodu**  $x_0$ . Množinu  $P(x_0) = U(x_0) \setminus \{x_0\}$  nazveme **prstencovým okolím bodu**  $x_0$ .



Cvičení 3.9: Dokažte:  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}; |x - b| < \varepsilon\}$ ,  
 $[|x - b| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - b < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < x < b + \varepsilon.]$

**Definice 3.11:**

Bod  $a \in A \subset \mathbb{R}$  se nazývá **vnitřním bodem množiny**  $A$ , jestliže  $\exists U(a)$  takové, že  $U(a) \subset A$ .

Množina všech vnitřních bodů množiny  $A$  se nazývá **vnitřek** množiny  $A$  a značí se  $\text{int}A$ .

Množina  $A$  se nazývá **otevřená**, jestliže  $A = \text{int}A$ .

Bod  $b \in \mathbb{R}$  se nazývá **hraničním bodem množiny**  $A$ , jestliže  $\forall U(b): U(b) \cap A \neq \emptyset \wedge U(b) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$ . Množina všech hraničních bodů množiny  $A$  se nazývá **hranice** množiny  $A$  a značí se  $\partial A$ .

Množina  $\bar{A} = A \cup \partial A$  se nazývá **uzávěr** množiny  $A$ .

Množina  $A$  se nazývá **uzavřená**, jestliže  $A = \bar{A}$ .

**Definice 3.12 :**

Bod  $c \in \mathbb{R}$  se nazývá **hromadným bodem množiny**  $A$ , jestliže v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů množiny  $A$ , v opačném případě se nazývá **izolovaným bodem množiny**  $A$ .

Množina, jejíž všechny body jsou izolované, se nazývá **diskrétní**.

Příklad 3.8:

1. Nechť  $A = (0, 1)$ , pak  $A$  je otevřená množina,  $\partial A = \{0, 1\}$ ,  $\bar{A} = \langle 0, 1 \rangle$ , každý bod uzávěru  $\bar{A}$  je hromadným bodem množiny  $A$ .
2. Nechť  $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots\}$ , pak  $\partial A = A \cup \{0\}$ ,  $A$  není uzavřená ani otevřená, jediným hromadným bodem množiny  $A$  je bod 0 a  $A$  je diskrétní množina.

Cvičení 3.10:

- a) Dokažte: Množina  $A \subset \mathbb{R}$  je otevřená  $\Leftrightarrow$  množina  $\mathbb{R} \setminus A$  je uzavřená.

$$[A \text{ je otevřená} \Leftrightarrow \forall a \in A \exists U(a): U(a) \subset A \Rightarrow a \notin \partial A = \partial(\mathbb{R} \setminus A) \Rightarrow \partial(\mathbb{R} \setminus A) \subset \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A = \overline{\mathbb{R} \setminus A} .]$$

- b) Overte, zda platí: Množiny  $A_n, n \in \mathbb{N}$  jsou otevřené, pak  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  je otevřená množina,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  je otevřená množina.

$$[a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \wedge a \in A_n \Rightarrow \exists U(a): U(a) \subset A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ je}$$

otevřená množina. Naopak  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  nemusí být otevřená množina, např. pro  $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  je  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ . Jednobodová množina  $\{0\}$  je uzavřená.]

## 4 Posloupnosti

**Definice 4.1:** Zobrazení  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  se nazývá **posloupnost reálných čísel**. Místo  $f$  píšeme  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , zkráceně  $\{a_n\}$  a číslo  $a_n$  se nazývá **n-tý člen posloupnosti**  $\{a_n\}$ .

*Příklad 4.1:* (speciální typy posloupnosti)

- 1) **Aritmetická posloupnost** je definována předpisem  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ ,  $a_1, d \in \mathbb{R}$ , číslo  $d$  se nazývá **diference**.
- 2) **Geometrická posloupnost** je definována předpisem  $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$ ,  $a_1, q \in \mathbb{R}$ , číslo  $q$  se nazývá **kvocient**.
- 3) **Fibonacciova posloupnost** je definována předpisem  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  s počátečními hodnotami  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ . V tomto případě, kdy následující prvek posloupnosti je definován pomocí několika předchozích prvků, říkáme, že posloupnost je definována **rekurentně**.

**Definice 4.2:** (vlastnosti posloupnosti)

Posloupnost  $\{a_n\}$  se nazývá

**shora omezená**, jestliže  $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq K$ ,

**zdola omezená**, jestliže  $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq K$ ,

**omezená**, jestliže je omezená shora i zdola,

**neklesající**, jestliže  $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$ ,

**nerostoucí**, jestliže  $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq a_{n+1}$ ,

**monotónní**, jestliže je neklesající nebo nerostoucí,

**rostoucí**, jestliže  $\forall n \in \mathbb{N}: a_n < a_{n+1}$ ,

**klesající**, jestliže  $\forall n \in \mathbb{N}: a_n > a_{n+1}$ ,

**ostře monotónní**, jestliže je rostoucí nebo klesající.

*Poznámka 4.1:* (ekvivalentní definice omezenosti)

Z cvičení (3.8 b)) vyplývá, že posloupnost  $\{a_n\}$  je omezená právě tehdy, když  $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq K$ .

*Příklad 4.2:*

1. **Harmonická posloupnost** definovaná předpisem  $a_n = \frac{1}{n}$  je omezená a klesající.
2. Geometrická posloupnost  $\{q^n\}$  je omezená pro  $-1 \leq q \leq 1$ , rostoucí a neomezená pro  $q > 1$ , neomezená pro  $q < -1$ .

Vložíme do banky počáteční vklad  $a_1$ . Při ročním úroku  $u$  máme na účtu na konci roku zůstatek  $a_2 = a_1 + ua_1 = a_1(1 + u)$ . Po dvou letech je zůstatek  $a_3 = a_2(1 + u) = a_1(1 + u)^2$ . Po  $n$ -letech spoření je náš zůstatek roven  $a_{n+1} = a_1(1 + u)^n$ . Spoření je tedy popsáno geometrickou posloupností  $a_n$  s kvocientem  $q = 1 + u$ .

**Leonardo Pisano Fibonacci** (1170-1250)



popsal následovně problém rozmnožování králíků. Do dostatečně velké klece umístíme jeden pár měsíc starých králíků. Ptáme se, kolik párů králíků bude v kleci na konci jednoho roku, když každý pár má každý měsíc opět jeden pár potomků a králíci mají první potomky ve dvou měsících?

## 4.1 Limita posloupnosti

Pojmy konvergentní a divergentní jako první použil v souvislosti se sčítáním řad čísel **James Gregory** (1638-1375).



**Definice 4.3:** Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je **konvergentní**, jestliže

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Říkáme, že  $a$  je **limita** posloupnosti  $\{a_n\}$  a píšeme

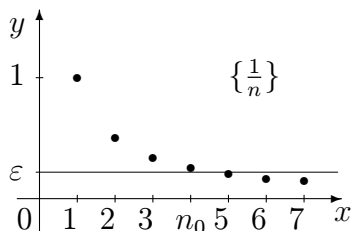
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Jestliže posloupnost  $\{a_n\}$  není konvergentní, pak říkáme, že je **divergentní**. Speciálně, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow a_n > K \quad (a_n < K),$$

pak řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  **diverguje k  $+\infty$  ( $-\infty$ )**.

Příklad 4.3:



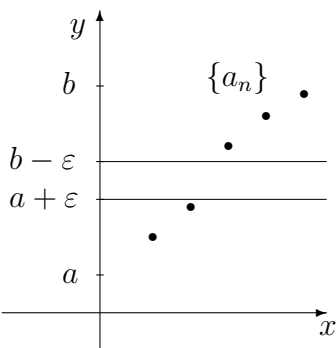
1. Pro harmonickou posloupnost platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

K danému  $\varepsilon > 0$  hledáme  $n_0$  takové, aby pro  $n > n_0$  platilo  $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ . Volíme tedy  $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ , potom pro  $n > n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$  platí  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ .

2. Geometrická posloupnost  $\{q^n\}$  je konvergentní k 0 pro  $-1 < q < 1$ , je konvergentní k 1 pro  $q = 1$ , diverguje k  $+\infty$  pro  $q > 1$  a diverguje pro  $q \leq -1$ .

**Věta 4.1:** (jednoznačnost limity)

Každá konvergentní posloupnost má právě jednu limitu. (Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.)



Důkaz: Budeme pro spor předpokládat, že posloupnost  $\{a_n\}$  má alespoň dvě limity  $a \neq b$ . Nechť  $a < b$ , pak volíme  $\varepsilon > 0$  tak, že  $a + \varepsilon \leq b - \varepsilon$ . Z definice limity dostaneme  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$  a zároveň

$\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: n > n_1 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$ . Tedy pro  $n \geq \max\{n_0, n_1\}$  je  $a_n < a + \varepsilon \leq b - \varepsilon < a_n$ , což je spor.

Cvičení 4.1: Zaměňte kvantifikátory v definici limity a pokuste se najít posloupnosti, které splňují tyto nové vlastnosti.

[Např.

vlastnost  $\forall a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$  nespňuje žádná posloupnost, protože podle věty (4.1) každá posloupnost má nejvýše jednu limitu, zde by se však měla blížit ke všem reálným číslům ( $\forall a \in \mathbb{R}$ ).

Vlastnost  $\forall a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \exists n \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$  splňuje posloupnost, která obsahuje všechna racionální čísla, protože ke každému reálnému číslu  $a$  najdeme racionální číslo  $a_n$ , které je libovolně blízko ( $|a_n - a| < \varepsilon$ ). Říkáme, že množina racionálních čísel je hustá podmnožina reálných čísel.

Vlastnost  $\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \exists n \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$  splňuje každá posloupnost. Stačí volit  $a = a_2$ .

Vlastnost  $\exists a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \forall n \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$  splňuje každá omezená posloupnost, protože  $\forall n \in \mathbb{N} n > n_0$  je  $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$  a konečná množina  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\}$  je také omezená.]

Úzkou souvislost mezi pojmy limita posloupnosti a uzavřená množina popisují následující dvě věty.

**Věta 4.2:** Nechť  $I \subset \mathbb{R}$  je uzavřená množina a konvergentní posloupnost  $\{a_n\} \subset I$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in I$ .

Důkaz: Větu dokážeme sporem. Předpokládáme, že  $\exists \{a_n\} \subset I, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0 \wedge a_0 \notin I$ .

Tedy  $a_0 \in \{\mathbb{R} \setminus I\}$ . Protože množina  $I$  je uzavřená, je její doplněk  $\{\mathbb{R} \setminus I\}$  podle cvičení (3.10) množina otevřená. Odtud vyplývá, že existuje okolí  $U(a_0) \subset \{\mathbb{R} \setminus I\}$ . Zároveň z konvergence  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$  plyne, že  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0: a_n \in U(a_0) \subset \{\mathbb{R} \setminus I\}$ , což je spor s předpokladem  $\{a_n\} \subset I$ . Odtud plyne  $a_0 \in I$ .

Příklad 4.4: Pro otevřený interval tvrzení věty (4.2) neplatí.

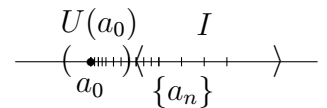
Posloupnost  $\{\frac{1}{n}\} \subset (0, 2)$ , ale  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \notin (0, 2)$ .

**Věta 4.3:** Nechť  $I_n, n \in \mathbb{N}$  jsou uzavřené intervaly a  $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$  (tzv. systém do sebe vložených uzavřených intervalů), potom  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ .

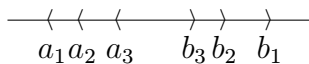
Úvahy opřené o veličiny "velké nebo malé jak je libo" můžeme najít již v třinácti knihách *Základů* řeckého matematika **Eukleida** (325?-265? př.n.l.).



Pomocí tzv. exhaustivní metody (ta je založena na nekonečném dělení) dokázal například odvodit tvrzení, že objem kužele je třetina objemu válce, který má stejnou podstavu a výšku.







Příklad:

Pro  $I_n = \langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \rangle$  je  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = 0$ .

**Důkaz:** Označíme  $I_i = \langle a_i, b_i \rangle, i \in \mathbb{N}$ , potom  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ . Tedy posloupnost  $\{a_n\}$  je neklesající, posloupnost  $\{b_n\}$  je nerostoucí a obě posloupnosti jsou omezené. Označíme  $a = \sup\{a_n\}$  a dokážeme, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Z definice **supréma** vyplývá, že

i)  $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a$ , ii)  $\forall \varepsilon > 0 \exists a_{n_0} \in \{a_n\}: a - \varepsilon < a_{n_0}$ .

Odtud vyplývá  $\forall n > n_0: a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$ , neboli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Podobně platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf\{b_n\} = b$ .

(Dokázali jsme, že omezená a monotónní posloupnost má limitu.)

Nyní dokážeme  $a \leq b$ , tedy  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \langle a, b \rangle$ .

Pro spor předpokládáme  $a > b$  a volíme  $\varepsilon$  takové, že  $a - \varepsilon > b + \varepsilon$ . Z vlastnosti supréma a infima dostaneme

$\exists a_{n_0} \in \{a_n\}: a - \varepsilon < a_{n_0}$ ,  $\exists b_{n_1} \in \{b_n\}: b_{n_1} < b + \varepsilon$  a pro  $n \geq \max\{n_0, n_1\}$  je  $b_n \leq b_{n_1} < b + \varepsilon < a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$ , což je spor s předpokladem  $a_n \leq b_n$ .

**Definice 4.4:** Nechť  $\{a_n\}$  je posloupnost a  $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$  je rostoucí posloupnost přirozených čísel, potom posloupnost  $\{a_{k_n}\}$  nazveme **vybranou posloupností** z posloupnosti  $\{a_n\}$ .

Příklad 4.5:

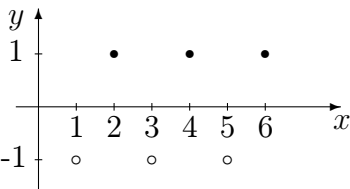
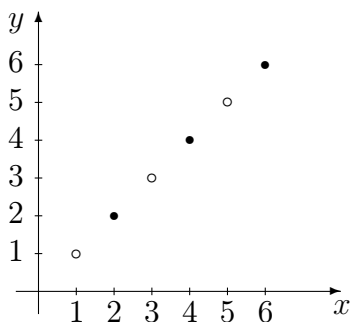
Uvažujeme posloupnost  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ , pak vybranou posloupností je například posloupnost  $\{2, 4, 6, \dots\}$ .

Z posloupnosti  $\{(-1)^n\}$ , je vybranou posloupností například posloupnost  $\{(-1)^{2n}\}$ .

Následující věta popisuje vztah omezené a konvergentní posloupnosti.

**Věta 4.4:**

- i) Každá konvergentní posloupnost je omezená.
- ii) Monotónní a omezená posloupnost je konvergentní.
- iii) (Bolzano-Weierstrass) Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní posloupnost.





Důkaz:

i) Jestliže posloupnost  $\{a_n\}$  je konvergentní, potom  $\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Rightarrow |a_n| < |a| + \varepsilon$ .

Položíme-li  $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, |a| + \varepsilon\}$ , pak platí  $\forall n \in \mathbb{N} : -K \leq a_n \leq K$ . Tedy  $\{a_n\}$  je omezená posloupnost.

ii) Tento bod jsme dokázali v důkazu věty (4.3).

iii) Jestliže  $\{a_n\}$  je omezená posloupnost, potom  $\exists \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : \alpha_1 \leq a_n \leq \beta_1$ . Rozdělíme interval  $I_1 = \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$  na dvě poloviny a označíme  $I_2 = \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle$  tu polovinu, která obsahuje nekonečně mnoho prvků posloupnosti  $\{a_n\}$  a opět ji rozdělíme na poloviny atd. Dostaneme systém do sebe vložených uzavřených intervalů  $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ , pro který platí  $I_k = \langle \alpha_k, \beta_k \rangle \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} |\beta_k - \alpha_k| = 0$ . Z věty (4.3) vyplývá, že  $\exists a \in \mathbb{R} : \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = a$ . Z každého intervalu  $I_k$  vybereme jeden člen posloupnosti  $\{a_n\}$  a označíme jej  $\{a_{n_k}\}$ , potom platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ .

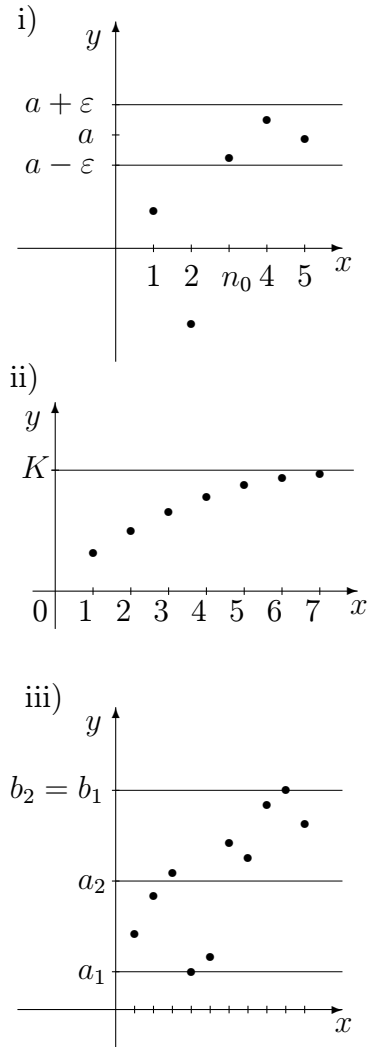
Příklad 4.6: Definice čísla  $e$ .

Budeme vyšetřovat posloupnost  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ .

Dokážeme, že uvedená posloupnost je neklesající:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}} = (\frac{(n+2)n}{(n+1)(n+1)})^{n+1} \frac{n+1}{n} \\ &= (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^{n+1} \frac{n+1}{n} \geq (\text{Podle Bernoulliovy nerovnosti}), \text{příklad (1.7)} \\ (1 - (n+1) \frac{1}{(n+1)^2}) \frac{n+1}{n} &= \frac{n+1-1}{n+1} \frac{n+1}{n} = 1. \end{aligned}$$

Podobně dokažte, že posloupnost  $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  je nerostoucí.



Na účtu úročeném úrokem  $u$  s počátečním vkladem  $a_1$  máme po  $k$  letech zůstatek  $a_{k+1} = a_1(1 + u)^k$ . Pokud budeme mít účet s měsíčním úročením, pak náš zůstatek bude  $a_{k+1} = a_1(1 + \frac{u}{12})^{12k}$ . Podobně při denním úročení dostaneme  $a_{k+1} = a_1(1 + \frac{u}{365})^{365k}$ . V roce 1683 **Jacob Bernoulli** zkoumal tento problém složeného úročení a hledal limitu výrazu  $(1 + \frac{1}{n})^n$ . Číslo  $e$  se proto také nazývá bankovní nebo růstová konstanta.

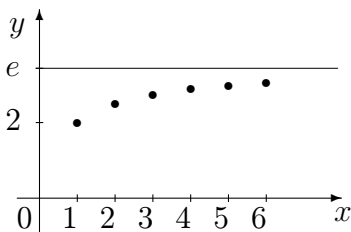
$$\left[ \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} \frac{n}{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)n}\right)^{n+2} \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{(n+2)n}\right)^{n+2} \frac{n}{n+1} \geq \left(1 + (n+2)\frac{1}{n(n+2)}\right) \frac{n}{n+1} = 1. \right]$$

Zároveň  $\forall n \in \mathbb{N}$  platí:  $2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4$ .

Posloupnost  $\{a_n\}$  je tedy i omezená a podle věty (4.4) má limitu. Píšeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Číslo  $e$  se nazývá **Eulerova konstanta**.



### Cvičení 4.2:

a) Dokažte, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$ .

$$\left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1} \rightarrow e^{-1}. \right]$$

b) Dokažte, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = e^u$ ,  $u \geq 0$ .

$$\left[ \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = \left(n = u \cdot m \Rightarrow m \rightarrow \infty\right) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{(um)} \rightarrow e^u. \right]$$

**Příklad 4.7:** Výpočet druhé odmocniny čísla  $a \geq 0$ .

Definujeme rekurentní posloupnost předpisem

$$a_{n+1} = \left(\frac{a}{a_n} + a_n\right)/2, \quad a_1 > 0.$$

Zřejmě  $\forall n \in \mathbb{N}$  je  $a_n > 0$ . Porovnáme  $a_{n+2}$  a  $a_{n+1}$  a zároveň porovnáme  $a_{n+1}$  a  $\sqrt{a}$ .

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\geq a_{n+2} \quad (?) & a_{n+1} &\geq \sqrt{a} \quad (?) \\ a_{n+1} &\geq \left(\frac{a}{a_{n+1}} + a_{n+1}\right)/2 & \left(\frac{a}{a_n} + a_n\right)/2 &\geq \sqrt{a} \\ 2(a_{n+1})^2 &\geq a + (a_{n+1})^2 & a + (a_n)^2 &\geq 2a_n\sqrt{a} \\ (a_{n+1})^2 &\geq a & a - 2a_n\sqrt{a} + (a_n)^2 &\geq 0 \\ a_{n+1} &\geq \sqrt{a} & (\sqrt{a} - a_n)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je nerostoucí a zdola omezená, tedy existuje  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Přejdeme k limitě v rovnosti

$$a_{n+1} = \left(\frac{a}{a_n} + a_n\right)/2 \quad \text{a dostaneme } b = \left(\frac{a}{b} + b\right)/2, \quad \text{odtud } 2b^2 = a + b^2 \quad \text{a } b = \sqrt{a}.$$

Cvičení 4.3:

a) Najděte  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , jestliže

$$a_1 = 5 \text{ a } a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}.$$

[Zřejmě  $\forall n \in \mathbb{N}$  je  $a_n > 0$ .

Porovnáme  $a_{n+2}$  a  $a_{n+1}$  a matematickou indukcí dokážeme, že  $\forall n \in \mathbb{N}$  je  $a_n > 3$ .

$$\begin{array}{ll} a_{n+1} > a_{n+2} \quad (?) & a_{n+1} > 3 \quad (?) \\ a_{n+1} > \sqrt{6 + a_{n+1}} & 1) \quad a_1 = 5 > 3 \\ (a_{n+1})^2 - a_{n+1} - 6 > 0 & 2) \quad \text{Nechť } a_n > 3, \text{ pak} \\ (a_{n+1} - 3)(a_{n+1} + 2) > 0 & a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} > \sqrt{6 + 3} = 3 \\ a_{n+1} > 3 & \end{array}$$

Vidíme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je zdola omezená a klesající, tedy existuje  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Přejdeme k limitě v rovnosti  $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$  a dostaneme  $b = \sqrt{6 + b}$ , odtud  $b = 3$ .]

b) Pravděpodobnost přežití buněk.

Předpokládáme, že k rozdělení buňky na dvě dochází s pravděpodobností  $p > 0$ . Označíme  $p_n$  pravděpodobnost, že existuje  $n$  generací potomků první buňky, tedy  $p_1 = p$ . Potom pro pravděpodobnost existence  $n+1$  generací potomků platí  $p_{n+1} = p(1 - (1 - p_n)(1 - p_n))$ . Najděte limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ .

$[p_{n+2} > p_{n+1} \Leftrightarrow p(1 - (1 - p_{n+1})(1 - p_{n+1})) > p(1 - (1 - p_n)(1 - p_n)) \Leftrightarrow (1 - p_{n+1})(1 - p_{n+1}) > (1 - p_n)(1 - p_n) \Leftrightarrow p_{n+1} > p_n \Rightarrow$   
Posloupnost  $p_n$  je monotónní a zřejmě  $0 \leq p_n \leq 1$ . Tedy existuje  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ , která splňuje  $b = p(1 - (1 - b)(1 - b))$ , odtud  $b = 2 - \frac{1}{p}$ .]

**Definice 4.5:** (Fundamentální posloupnost)

Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je fundamentální (cauchyovská), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \in \mathbb{N}: m > n_0, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

**Věta 4.5:** (Bolzanova-Cauchyova; nutná a postačující podmínka konvergence)

Posloupnost  $\{a_n\}$  je konvergentní právě tehdy, když je fundamentální.

Louis Augustin Cauchy (1789-1857)



vypracoval základy aritmetizace analýzy, zpřesnil pojmy limita, spojitost ap.

Důkaz:

” $\Rightarrow$ ” Pro konvergentní posloupnost  $\{a_n\}$  platí

$\exists s \in \mathbb{R} \forall \varepsilon_1 > 0 \exists n_1 \forall n \in \mathbb{N}: n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1$ .  
Tedy  $\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1$  je  $|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < 2\varepsilon_1 = \varepsilon$ . Tedy  $\{a_n\}$  je fundamentální.

” $\Leftarrow$ ” Jestliže  $\{a_n\}$  je fundamentální, pak položíme

$K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, |a_{n_0+1}| + \varepsilon\}$ . Zřejmě  $\forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq K$ . Tedy posloupnost  $\{a_n\}$  je omezená a podle věty (4.4) lze z ní vybrat konvergentní posloupnost  $\{a_{n_k}\}$ . Nechť  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ , potom  $\forall \varepsilon_2 > 0 \exists n_2 \in \mathbb{N} \forall n_k \in \mathbb{N}: n_k > n_2 \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \varepsilon_2$  a pro  $n_k, n > n_0 \Rightarrow |a_{n_k} - a_n| < \varepsilon$  ( $\{a_n\}$  je fundamentální). Odtud pro  $n_k, n > \max\{n_0, n_1\}$  dostaneme  $|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon + \varepsilon_1$ . Tedy  $a_n \rightarrow a$ .

**Věta 4.6:** (algebra limit)

Nechť  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , pak platí:

- i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ ,
- ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$ ,
- iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ ,
- iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad b_n \neq 0, b \neq 0$ .

Důkaz: Dokážeme bod iv), ostatní důkazy jsou podobné.

Budme předpokládat, že  $b > 0$  (pro  $b < 0$  je důkaz obdobný). Potom z předpokladu  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  vyplývá, že  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0: b_n > b/2 > 0$ .

Chceme dokázat, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = 0$ .

Upravíme proto rozdíl  $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| = |\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}| = |\frac{a_n b - a b + a b - a b_n}{b_n b}| = |\frac{(a_n - a)b + a(b - b_n)}{b_n b}| \leq \frac{2}{b^2} (|a_n - a| |b| + |a| |b - b_n|)$ .

Odtud a z konvergence  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$  vyplývá konvergence  $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| \rightarrow 0$ .

Příklad 4.8:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-2)}{3n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1-\frac{1}{n})(2-\frac{2}{n})}{n^2(3+\frac{1}{n^2})} = \frac{(1-0)(2-0)}{(3+0)} = \frac{2}{3}.$$

**Věta 4.7:** (Věta o sevření) Nechť pro posloupnosti  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$  platí  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ , potom i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

Důkaz: Z předpokladů  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$  vyplývá, že  $\forall \varepsilon > 0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n$  a  $\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: n > n_1 \Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon \Rightarrow c_n < a + \varepsilon$ .

Odtud dostaneme pro  $n > \max\{n_0, n_1\}$ :  $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$  neboli  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

Příklad 4.9: Pomocí věty o sevření ukážeme, že platí:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ ,

neboť  $0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$  pro  $a > 1$ .

Volíme  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že  $n_0 \geq a$ ,  
potom  $0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n_0 \cdot \dots \cdot n} < \frac{a^{n_0}}{n_0!} \frac{a}{n} \rightarrow 0$ .

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$  pro  $a > 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Položíme  $a = 1 + h$ ,  $h > 0$  a použijeme binomickou větu, pak

$$0 < \frac{n^k}{a^n} = \frac{n^k}{(1+h)^n} = \frac{n^k}{1+n \cdot h + \dots + \binom{n}{k+1} h^{k+1} + \dots + h^n} < \frac{n^k}{\frac{n(n-1) \dots (n-k)}{(k+1)!} h^{k+1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(k+1)!}{(1-\frac{1}{n}) \dots (1-\frac{k}{n}) h^{k+1}} \rightarrow 0.$$

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0$  pro  $a > 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Substitucí  $\log_a n = m$  dostaneme  $\frac{\log_a n}{n^k} = \frac{m}{a^{mk}} = \frac{m}{(a^k)^m}$ . Tvrzení tedy vyplývá z předchozího příkladu.

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

V příkladu 3 jsme ukázali, že pro každé  $h > 0$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+h)^n} = 0$ . Odtud vyplývá  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow n < (1+h)^n \Rightarrow 1 < \sqrt[n]{n} < 1+h \Rightarrow \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ .

Jestliže platí

$a_n \rightarrow \infty$ ,  $b_n \rightarrow \infty$   
a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ , pak říkáme že posloupnost  $b_n$  roste v nekonečnu mnohem rychleji než posloupnost  $a_n$  a píšeme  $a_n \ll b_n$  u  $\infty$ .

Tedy

$\ln n \ll n \ll e^n \ll n! \ll n^n$ .

Cvičení 4.4: Dokažte, že posloupnost  $\sqrt[n]{n}$  je omezená a monotónní.

[ Zřejmě  $1 < \sqrt[n]{n}$ . Omezenost shora, např.  $\sqrt[n]{n} < 2$ , můžeme dokázat pomocí matematické indukce ( $n < 2^n \Rightarrow n + 1 < 2^n + 1 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ ).

Monotónnost plyne z nerovnosti  $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!} \leq n^k$  a binomické věty. (Pro  $n > 2$  platí:  $(n+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} n^{n-k} + (n^2 + 1) < (n-1) \cdot n^k \cdot n^{n-k} + n^n = n^{n+1} \Rightarrow \sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$ .)]

Cvičení 4.5: Dokažte, že pro  $a > 0$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

[Pro  $a > 1$  využijeme nerovnosti  $1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$ , pro  $a < 1$  nerovnosti  $1 < \sqrt[n]{\frac{1}{a}} < \sqrt[n]{n}$ .]

Nyní předpokládáme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je omezená a budeme zkoumat její chování v  $\infty$ . Pro  $n \in \mathbb{N}$  položíme

$$\alpha_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \text{ a } \beta_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}.$$

Například pro posloupnost  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$  dostaneme

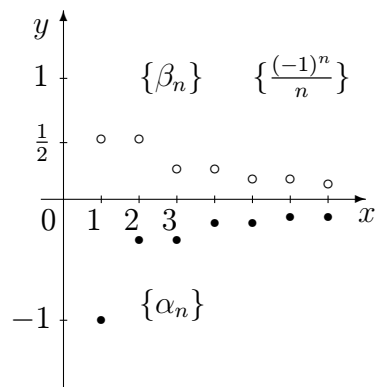
$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -\frac{1}{3}, \alpha_3 = -\frac{1}{3}, \dots \quad \beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = \frac{1}{2}, \beta_3 = \frac{1}{4}, \dots$$

Z definic posloupností  $\alpha_n, \beta_n$  vyplývá  $\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n$ , posloupnost  $\{\alpha_n\}$  je neklesající a posloupnost  $\{\beta_n\}$  je nerostoucí. Z omezenosti posloupnosti  $\{a_n\}$  zároveň plyne i omezenost posloupností  $\{\alpha_n\}$  a  $\{\beta_n\}$ . Tedy podle věty (4.4) mají obě posloupnosti limity a má smysl následující definice.

**Definice 4.6:** Nechť posloupnost  $\{a_n\}$  je omezená, pak existuje limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ , kterou nazýváme **dolní limita (limes inferior)** posloupnosti  $\{a_n\}$ . Zároveň existuje limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ , kterou nazýváme **horní limita (limes superior)** posloupnosti  $\{a_n\}$ .

Pro zkrácení zápisu se používá značení  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  a  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Příklad 4.10: Uvažujeme posloupnost  $\{(-1)^n\}$ , potom  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$  a  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$ .



**Věta 4.8:** Omezená posloupnost  $\{a_n\}$  je konvergentní právě tehdy, když  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)$ .

Důkaz:

” $\Rightarrow$ ” Nechť  $\{a_n\}$  je konvergentní, potom

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Zároveň  $\alpha_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ .

Chceme dokázat, že  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , neboli

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow |\alpha_n - a| < \varepsilon_1.$$

Z definice **infima** vyplývá, že k  $\frac{\varepsilon_1}{2}$  existuje  $k \geq n$  takové, že  $\alpha_n \leq a_k < \alpha_n + \frac{\varepsilon_1}{2} \Rightarrow |\alpha_n - a_k| < \frac{\varepsilon_1}{2}$ .

Položíme  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$ , pak pro  $k \geq n > n_0$  platí:

$$|\alpha_n - a| = |\alpha_n - a + a - a_k| \leq |\alpha_n - a_k| + |a - a_k| < \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_1 \Rightarrow \alpha_n \rightarrow a.$$

Podobně dokážeme  $\beta_n \rightarrow a$ , kde  $\beta_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ .

” $\Leftarrow$ ” Nyní  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Dále víme, že  $\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n$ . Z věty o sevření (4.7) pak vyplývá, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Příklady na posloupnosti lze nalézt na internetové adrese <http://trial.kma.zcu.cz/Tdb/main.php?T0=2&T1=0&T2=0&T3=0&T0b=2&C=../4/>

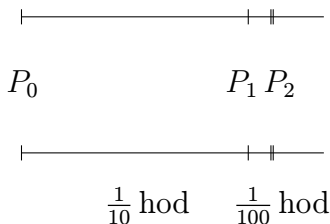
## 5 Řady

Problém sčítání nekonečně mnoha kladných čísel se objevil například v Zénonově paradoxu o Achilovi a želvě.

Achilles závodí se želvou a dá jí náskok. Po 1 hodině, kdy je želva v bodě  $P_1$  vyběhne z bodu  $P_0$ . Doběhne do bodu  $P_1$ , ale mezitím želva dojde do bodu  $P_2$ , Achilles běží do  $P_2$ , ale želva do  $P_3$  a tak dále. Tedy Achilles želvu nikdy nedoběhne.

Uvědomíme-li si však, že na pohyb mezi body  $P_0$  a  $P_1$  potřebuje Achilles například desetkrát méně času než želva, pak lze ukázat, že k doběhnutí želvy Achilles potřebuje dobu

$$t = 0,1 + 0,01 + \dots = 0,1\bar{1} = \frac{1}{9} \text{ hodiny.}$$



### Definice 5.1: Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

se nazývá **(nekonečná) řada** odpovídající posloupnosti  $\{a_n\}$ . Čísla  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  se nazývají **členy řady**. Součet

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

se nazývá **částečný součet** řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Jestliže posloupnost  $\{s_n\}$  konverguje k číslu  $s \in \mathbb{R}$ , pak říkáme, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je **konvergentní** a má **součet s**. Píšeme

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ . Rozdíl  $s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$  nazýváme **zbytek řady** příslušný členu  $a_n$ .

Jestliže posloupnost  $\{s_n\}$  diverguje, pak říkáme, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je **divergentní**.

Příklad 5.1: **Geometrická řada**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ .

Částečný součet geometrické řady je  $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$  (viz cvičení (1.4 a)).

Pro  $|q| < 1$  je součet řady  $\frac{a_1}{1-q}$  (řada konverguje).

Pro  $|q| \geq 1$  je geometrická řada divergentní.

Poznámka 5.1: Protože součty konvergentních řad jsou definovány pomocí limit částečných součtů, platí pro ně stejná pravidla jako pro limity posloupnosti ve větě (4.6).

Příklad 5.2:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (3 \frac{1}{2^{n-1}} + 4 \cdot (-3)^{-n}) &= \sum_{n=1}^{\infty} 3 \frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot (-3)^{-n} = \\ &= 3 \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + 4 \cdot \frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = 6 - 1 = 5. \end{aligned}$$

Aby součet nekonečně mnoha čísel byl konečný, tak na "konci sčítání" musí být velmi malá čísla. Správnost této úvahy dokazuje následující věta.



**Věta 5.1:** (nutná podmínka konvergence řady)

Jestliže řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je konvergentní, pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

*Důkaz:* Pripomeňme si, že konvergentní posloupnost  $\{s_n\}$  je podle věty (4.5) zároveň fundamentální. Neboli  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N} : m > n_0, n > n_0 \Rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon$ . Konkrétně pro  $m = n + 1$  dostaneme  $|a_{n+1}| < \varepsilon$  a odtud  $a_n \rightarrow 0$ .

*Příklad 5.3:* (harmonická řada)

Podmínka  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  však není postačující pro konvergenci řady.

Například **harmonická řada**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  splňuje nutnou podmínku  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , ale její součet diverguje k  $+\infty$ .

Platí totiž  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \dots \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \dots \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ .

Harmonická řada diverguje k  $\infty$  velice pomalu. Sečteme-li první milion členů dostaneme součet asi 14,35, součet prvního bilionu členů je přibližně 28.

**5.1 Kritéria konvergence**

Dále budeme uvažovat řady s kladnými členy ( $a_n > 0$ ).

**Věta 5.2:** Řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  s kladnými členy je konvergentní právě tehdy, když její posloupnost částečných součtů  $\{s_n\}$  je omezená.

*Důkaz:* Platí  $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} > 0 \Rightarrow \{s_n\}$  je rostoucí. Zároveň podle předpoladu je posloupnost  $\{s_n\}$  omezená, tedy podle věty (4.4)  $\exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  a řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je konvergentní.

*Příklad 5.4:* Rozhodněte o konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}}$ .

Pro částečný součet této řady platí  $s_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{3^{n+1}} < \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{1}{2}$ .

Posloupnost  $\{s_n\}$  je tedy omezená a řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}}$  je podle předchozí věty konvergentní.

**Věta 5.3:** (srovnávací kritérium)

Nechť  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : 0 < b_n \leq a_n$ , potom jestliže

- i)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje, pak  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konverguje,  
 ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  diverguje, pak  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje.

Řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se nazývá **majoranta** řady  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Řada  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  se nazývá **minoranta** řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Důkaz: i) Označíme  $s_n(a)$  částečné součty řady  $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ ,

$s_n(b)$  částečné součty řady  $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n$ . Z předpokladu  $b_n \leq a_n$

plyne  $s_n(b) \leq s_n(a) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ . Posloupnost  $s_n(b)$  je

tedy omezená a podle předchozí věty (5.2) i konvergentní.

Z rovnosti  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{n_0} b_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n$  vyplývá i konvergence

řady  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

Bod ii) věty je ekvivalentní bodu i), jedná se o **obměnu** implikace.

Příklad 5.5: Pro členy řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1}$  platí  $\frac{2}{2n-1} > \frac{1}{n}$

a víme, že harmonická řada (minoranta)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverguje,

tedy i (majoranta) řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1}$  diverguje.

Důsledkem věty (5.3) je následující věta.

**Věta 5.4:** (limitní srovnávací kritérium)

Nechť  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0, b_n > 0$  a  $\exists c \in \mathbb{R}, c > 0$  takové,

že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ , potom

- i)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konverguje.  
 ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  diverguje.

Důkaz: Z předpokladu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$  vyplývá, že  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$   
 $\forall n : n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \varepsilon \Leftrightarrow (c - \varepsilon) b_n < a_n < (c + \varepsilon) b_n$ .  
 Zvolíme  $\varepsilon$  tak, aby  $c - \varepsilon > 0$ . Potom podle věty (5.3) z  
 konvergence řady  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  plyne konvergence řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  a na-  
 opak.

Příklad 5.6: Rozhodněte o kovergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n + (-1)^n}$ .

Tedy  $a_n = \frac{2}{2^n + (-1)^n}$ . Volíme  $b_n = \frac{1}{2^n}$ .

Pak platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{2^n + (-1)^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{(-1)^n}{2^n}} = 2 > 0$ . Protože ge-  
 ometrická řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  s kvocientem  $q = \frac{1}{2} < 1$  konverguje,

tak konverguje podle věty (5.4) i řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n + (-1)^n}$ .

Poznámka 5.2: Zatím umíme rozhodnout o konvergenci  
 řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  pouze pomocí jejího srovnání s geometrickou  
 řadou  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  s  $q < 1$ . Z podobného chování obou řad vy-  
 plývají přibližné rovnosti  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \doteq q$  nebo  $a_n \doteq q^n$  a odtud  
 následující kritéria.

**Věta 5.5:** (Obecné d'Alembertovo (podílové), obecné Cau-  
 chyovo (odmocninové) kritérium)

Nechť  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je řada s kladnými členy. Jestliže  $\exists q < 1$  a  
 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že  $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0$  platí

i)  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$  nebo  $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$   
 konverguje,

ii)  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  nebo  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje.

Důkaz: i) Z předpokladu  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$  pro  $n > n_0$   
 plyne  $a_{n_0+2} \leq q a_{n_0+1}, \dots, a_{n_0+k} \leq q^{k-1} a_{n_0+1}, k \in \mathbb{N}$ . Z  
 předpokladu  $q < 1$  plyne konvergence geometrické řady  
 $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} a_{n_0+1}$  a odtud i konvergence minoranty  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Po-  
 dobně  $\sqrt[n]{a_n} < q \Rightarrow a_n < q^n$  a pro  $q < 1$  konverguje majoranta  
 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ , tedy konverguje i řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

O "chování posloup-  
 nosti" v nekonečnu  
 rozhoduje její "nej-  
 rychleji rostoucí  
 složka". Pro velké  $n$   
 je  $(-1)^n$  zanedbatelý  
 vzhledem k  $2^n$ , proto  
 $\frac{2}{(-1)^n + 2^n}$  porovnáváme  
 s  $\frac{1}{2^n}$ .

Francouzský mate-  
 matik a fyzik **Jean  
 Le Rond d'Alembert  
 (1717-1783)** se v ma-  
 tematice především  
 věnoval parciálním  
 diferenciálním rovni-  
 cím, například našel  
 (za jistých podmínek)  
 obecné řešení pro  
 rovnici chvění struny.



ii) V opačném případě, pokud  $a_{n_0+k} \geq a_{n_0+1} > 0$  nebo  $a_n \geq 1$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  zřejmě nesplňuje nutnou podmínku konvergence ( $a_n \rightarrow 0$ ) a diverguje.

Důsledkem obecných kritérií jsou opět kritéria limitní.

**Věta 5.6:** (limitní d'Alembertovo, Cauchyovo kritérium)

Nechť  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je řada s kladnými členy. Jestliže

- i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  nebo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ , pak daná řada konverguje,
- ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  nebo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ , pak daná řada diverguje,
- iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$  a zároveň  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ , pak neumíme podle těchto kritérií rozhodnout o konvergenci řady.

Příklad 5.7: 1) Rozhodněte o konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ .

Použijeme limitní podílové kritérium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = 0 < 1.$$

Odtud vyplývá, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$  konverguje.

2) Rozhodněte o konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$ .

Nyní použijeme odmocninové kritérium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[n]{\frac{3}{n} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n}} \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Tedy řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$  konverguje.

3) Rozhodněte o konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Pomocí limitního odmocninového kritéria  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$ , ani

limitního podílového kritéria  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = 1$  nelze rozhodnout o chování této řady.

Pokud řada obsahuje  $n!$  je vhodné použít podílové kritérium, pro řadu obsahující  $n$ -tou mocninu je vhodné odmocninové kritérium, řady s "polynomy" nelze pomocí těchto kritérií vyšetřovat.

Cvičení 5.1: Uvažujeme harmonickou řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Pak platí  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1$ , tedy podle obecného podílového kritéria daná řada konverguje. Dříve jsme však dokázali, že harmonická řada diverguje. Kde je chyba?

[Předpoklad podílového kritéria  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$  není splněn!]

Příklad 5.8: (Vztah podílového a odmocninového kritéria)

Rozhodněte o konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$  pomocí podílového i odmocninového kritéria.

Podílové kritérium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3+(-1)^n)^n}{(3+(-1)^{n+1})^{n+1}} = \begin{cases} \frac{2^n}{4^{n+1}} < 1 & n \text{ je liché,} \\ \frac{4^n}{2^{n+1}} > 1 & n \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Odmocninové kritérium:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{(3+(-1)^n)} < 1 \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Závěr: Pomocí podílového kritéria nelze rozhodnout, ale podle odmocninového kritéria uvedená řada konverguje. Říkáme, že odmocninové kritérium je "obecnější (silnější)" než podílové kritérium.

Cvičení 5.2: Dokažte následující tvrzení:

Jestliže řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje podle podílového kritéria, pak konverguje i podle odmocninového kritéria.

$$[\forall n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \Rightarrow a_{n_0+2} \leq q \cdot a_{n_0+1} \Rightarrow a_{n_0+k} \leq q^{k-1} \cdot a_{n_0+1} \quad (n = n_0 + k) \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{q^{n-n_0-1}} \cdot \sqrt[n]{a_{n_0+1}} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq q \sqrt[n]{q^{-n_0-1} \cdot a_{n_0+1}} \leq \hat{q} < 1 \quad (\sqrt[n]{q^{-n_0-1} \cdot a_{n_0+1}} \rightarrow 1).]$$

Na následujícím příkladu si ukážeme, že se dají sečíst i řady, které nejsou geometrické.

Příklad 5.9: Najděte součet řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .

Použijeme rovnost  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  a pro částečný součet této řady dostaneme  $s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ .

Odtud  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .

**Poznámka 5.3:** 1) Rozložení zlomku na součet více zlomků se nazývá **rozklad na parciální zlomky**.

V předchozím příkladě hledáme konstanty  $A, B$  takové, aby

$$\text{platilo } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{\mathbf{A}(n+1) + \mathbf{B}n}{n(n+1)}.$$

Čítec prvního a posledního zlomku se musí rovnat, tedy

$$\begin{aligned} 1 &= A(n+1) + Bn = (A+B)n + A \\ \Rightarrow A &= 1 \wedge A+B=0 \Rightarrow B = -1. \end{aligned}$$

$$\text{Odtud } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{-1}{n+1}.$$

2) Uvedený rozklad algebraicky upravíme do tvaru

$$\frac{1}{n(n+1)} = (n-1)\frac{1}{(n-1)n} - n\frac{1}{n(n+1)}, \quad n > 1. \text{ Položíme } k = n-1$$

$$\text{a } a_k = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Obecně píšeme  $0 < a_{k+1} = ka_k - (k+1)a_{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Vidíme, že posloupnost  $\{ka_k\}$  je klesající a zdola omezená, tedy podle věty (4.4) konvergentní, nechť  $ka_k \rightarrow a$ .

Zároveň platí  $s_n = \sum_{k=1}^n ka_k - (k+1)a_{k+1} = a_1 - 2a_2 + 2a_2 - 3a_3 + \dots + na_n - (n+1)a_{n+1} \rightarrow a_1 - a$ . Odtud vyplývá,

že konverguje i (minoranta) řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  a zároveň pro její

součet platí  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 - a$ .

Tento postup lze zopakovat i v případě, kdy existuje  $\delta > 0$  takové, že  $0 < \delta a_{n+1} \leq na_n - (n+1)a_{n+1}$ .

Řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  pak konverguje, protože má konvergentní majo-

rantu  $\frac{1}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} na_n - (n+1)a_{n+1}$ . Tato úvaha vede k následující větě.

**Věta 5.7:** (Raabeovo kritérium)

Nechť  $a_n > 0$  a  $\exists \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0$ :

- i)  $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq 1 + \delta$ , potom řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje,
- ii)  $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$ , potom řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje.

Důkaz:

i) Upravíme předpoklad  $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq 1 + \delta$  do tvaru  $n(a_n - a_{n+1}) \geq a_{n+1}(1 + \delta) \Rightarrow \delta a_{n+1} \leq n a_n - (n + 1)a_{n+1}$ .

Konvergence řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  tedy plyne z předchozí poznámky.

ii) Opět upravíme předpoklad  $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \Rightarrow n(a_n - a_{n+1}) \leq a_{n+1} \Rightarrow n a_n \leq (n + 1)a_{n+1}$ .

Indukcí dostaneme  $(n_0 + 1)a_{n_0+1} \leq (n_0 + 2)a_{n_0+2} \leq \dots \leq (n + 1)a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} \geq \frac{1}{n+1}(n_0 + 1)a_{n_0+1}$

a z divergence harmonické řady (zde minoranty) plyne i divergence řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Raabeovo kritérium má také svou limitní podobu.

**Věta 5.8:** (limitní Raabeovo kritérium)

Nechť  $a_n > 0$  a

- i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$ , potom řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje,
- ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ , potom řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje.

Důležitým důsledkem Raabeova kritéria je následující věta.

**Věta 5.9:**

Řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  konverguje pro  $\alpha > 1$ , diverguje pro  $\alpha \leq 1$ .

Důkaz:

i) K důkazu použijeme limitní Raabeovo kritérium.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{(n+1)^\alpha}} - 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1\right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{e^{\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}}_{\rightarrow \alpha} \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}_{\rightarrow 1} = \alpha.$$

Podle věty (5.9) řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  konverguje pro  $\alpha > 1$  a diverguje pro  $\alpha < 1$ . Pro  $\alpha = 1$  dostaneme harmonickou řadu, o které již víme, že diverguje.

## 5.2 Absolutně konvergentní a alternující řady

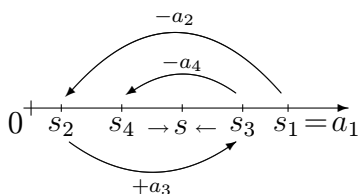
**Definice 5.2:** Nechť  $a_1, a_2, \dots$  je posloupnost kladných čísel. Řada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$  se nazývá **alternující řada**.

**Věta 5.10:** (Leibnizovo kritérium)

Jestliže pro alternující řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  platí

- i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  (nutná podmínka konvergence) a
- ii)  $\exists n_0 \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq a_{n+1}$  (nerostoucí od  $n_0$ ),

pak alternující řada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  konverguje.



Důkaz: Bez újmy na obecnosti budem předpokládat, že v předpokladu ii) je  $n_0 = 1$  (o konvergenci či divergenci řady nerozhoduje konečný počet členů). Označíme  $s_n$   $n$ -tý částečný součet řady, potom platí

$$0 \leq (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) = s_{2n} < s_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n+1} - a_{2n}) \leq a_1.$$

Odtud vyplývá, že posloupnosti  $s_{2n}$ ,  $s_{2n+1}$  jsou omezené. Dále posloupnost  $s_{2n}$  je rostoucí, posloupnost  $s_{2n+1}$  je klesající, tedy podle věty (4.4) obě posloupnosti jsou konvergentní. Z rovnosti  $s_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n+1}$  a předpokladu  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  vyplývá, že existuje  $s \in \mathbb{R}$  takové, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  ( $s \leftarrow s_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n+1} \rightarrow s$ ).

Cvičení 5.3: Dokažte, že pro alternující řadu platí odhad  $|s - s_n| \leq a_{n+1}$ . (Jsme tedy schopni odhadnout chybu, které se dopustíme, když součet  $s$  alternující řady nahradíme částečným součtem  $s_n$ .)

[Z předchozího důkazu

je zřejmé, že  $s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1} \Rightarrow |s - s_{2n}| \leq |s_{2n+1} - s_{2n}| = a_{2n+1}$ . Podobně  $s_{2n+2} \leq s \leq s_{2n+1} \Rightarrow |s - s_{2n+2}| \leq |s_{2n+2} - s_{2n+1}| = a_{2n+2}$ .]

Příklad 5.10: Podle Leibnizova kritéria (5.10) řada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  konverguje. Přerovnáním jejich členů, však můžeme dostat jiný součet (dokonce libovolný).



i) Pro součet  $s$  naší řady platí

$$s = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \dots < \frac{5}{6} - \frac{1}{20}.$$

ii) Přerovnáme uvedenou řadu do tvaru

$$\hat{s} = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \dots$$

a ukážeme, že součet zlomků v závorkách je vždy kladný.

$$\text{Platí } \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{(4n-1)2n + (4n-3)2n - (4n-3)(4n-1)}{(4n-3)(4n-1)2n} = \frac{8n-3}{(4n-3)(4n-1)2n} > 0.$$

$$\text{Tedy } \hat{s} > \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6} > s.$$

Nyní zavedeme řady, u kterých se přerovnááním členů součet nezmění.

**Definice 5.3:** Řekneme, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **konverguje absolutně**, jestliže konverguje řada  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

Příklad 5.11: Řada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  konverguje, avšak absolutně diverguje (harmonická řada).

Vztah absolutní konvergence a (neabsolutní) konvergence řady popisuje následující věta.

**Věta 5.11:** Jestliže řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje absolutně, pak konverguje.

*Důkaz:* Označíme  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ,  $S_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ . Protože řada  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konverguje, je posloupnost  $\{S_n\}$  podle věty (4.5) fundamentální. Z nerovnosti  $|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| \leq |S_{n+p} - S_n|$  plyne, že i posloupnost  $\{s_n\}$  je fundamentální, tedy konvergentní a řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.

Příklad 5.12: Rozhodneme o chování řady  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n^2+1}$ .

Z nerovnosti  $\left|\frac{\sin n}{n^2+1}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ , konvergence majoranty  $\frac{1}{n^2}$  a srovnávacího kritéria (5.3) vyplývá, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n^2+1}$  konverguje absolutně, tedy konverguje (neabsolutně).

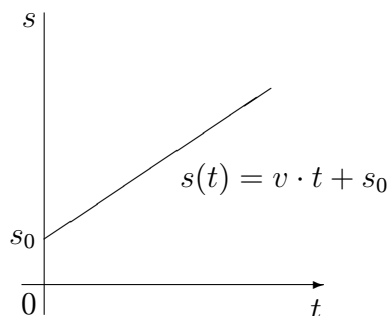
Příklady na řady lze nalézt na internetové adrese

<http://trial.kma.zcu.cz/Tdb/main.php?T0=2&T1=0&T2=0&T3=0&T0b=2&C=./4/>

## 6 Funkce

**Definice 6.1:** **Zobrazení**  $f$  z množiny  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$  se nazývá **reálná funkce reálné proměnné**.

Množina všech bodů  $[x, f(x)]$  v kartézském souřadném systému se nazývá **graf funkce  $f$** .



Tabulka hodnot

x	f(x)
1	5
3	-4
4	8

Pojem funkce poprvé zavedl německý matematik **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)** v práci z roku 1673.



**Příklad 6.1:** Popíšeme vzdálenost, kterou ujede auto pohybující se konstantní rychlostí  $v$ . Označíme  $s_0$  vzdálenost, kterou auto ujelo do počátku měření a  $s(t)$  vzdálenost ujetou v čase  $t$ . Funkce  $s: t \rightarrow s(t)$ , pak splňuje rovnost  $s(t) = v \cdot t + s_0$ .

**Poznámka 6.1:** Pokud je funkce zadána pomocí matematické formule, např.  $f(x) = \frac{x}{x-2}$ , pak **definičním oborem**  $D(f)$  funkce  $f$  je množina všech reálných čísel, pro která má daná formule smysl, v našem příkladě  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

Funkce může být také zadána grafem nebo tabulkou hodnot.

**Definice 6.2:** Funkce  $g: D(g) \rightarrow \mathbb{R}$  se nazývá **restrikce funkce**  $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ , jestliže  $D(g) \subset D(f)$  a  $\forall x \in D(g): g(x) = f(x)$ .

Funkce  $f, g$  se **rovnají**, jestliže  $D(g) = D(f)$  a  $\forall x \in D(g): g(x) = f(x)$ .

(algebraické operace s funkcemi) Nechť  $D(g) = D(f)$ , potom pomocí následujících předpisů definujeme

**součet funkcí**  $f + g: x \rightarrow f(x) + g(x)$ ,

**rozdíl funkcí**  $f - g: x \rightarrow f(x) - g(x)$ ,

**součin funkcí**  $f \cdot g: x \rightarrow f(x) \cdot g(x)$ ,

**podíl funkcí**  $\frac{f}{g}: x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$ ,

**násobek funkce**  $\alpha f: x \rightarrow \alpha f(x), \alpha \in \mathbb{R}$ .

**Cvičení 6.1:** Rozhodněte o rovnosti funkcí  $f(x) = 2 \ln x$  a  $g(x) = \ln x^2$ . [Funkce  $f$  má definiční obor  $D(f) = (0, \infty)$ , kdežto funkce  $g = \ln x^2 = 2 \ln |x|$  má definiční obor  $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Funkce  $f$  se tedy nerovná funkci  $g$ , je pouze její restrikcí na intervalu  $(0, \infty)$ .]

**Definice 6.3:** Řekneme, že funkce  $f$  je

**lichá**, jestliže  $\forall x \in D(f): f(-x) = -f(x)$ ,

**sudá**, jestliže  $\forall x \in D(f): f(-x) = f(x)$ ,

**periodická**, jestliže  $\exists T > 0 \forall x \in D(f): f(x+T) = f(x)$ ,  
nejmenší takové číslo se nazývá **základní perioda**,

**shora omezená** na množině  $I$ , jestliže

$$\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in I: f(x) \leq K,$$

**zdola omezená** na množině  $I$ , jestliže

$$\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in I: f(x) \geq K,$$

**omezená** na množině  $I$ , jestliže je shora i zdola omezená,

**neklesající** na množině  $I$ , jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

**nerostoucí** na množině  $I$ , jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

**monotónní** na množině  $I$ , jestliže

je neklesající nebo nerostoucí na množině  $I$ ,

**rostoucí** na množině  $I$ , jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

**klesající** na množině  $I$ , jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

**ostře monotónní** na množině  $I$ , jestliže

je rostoucí nebo klesající na množině  $I$ .

**konvexní** na množině  $I$ , jestliže  $\forall t \in \langle 0, 1 \rangle \forall x_1, x_2 \in I:$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2),$$

**ostře konvexní** na  $I$ , jestliže  $\forall t \in (0, 1) \forall x_1 \neq x_2 \in I:$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2),$$

**konkávní** na množině  $I$ , jestliže  $\forall t \in \langle 0, 1 \rangle \forall x_1, x_2 \in I:$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2),$$

**ostře konkávní** na  $I$ , jestliže  $\forall t \in (0, 1) \forall x_1 \neq x_2 \in I:$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) > tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

*Poznámka 6.2:*

Graf liché funkce je symetrický podle počátku.

Graf sudé funkce je symetrický podle osy  $y$ .

Funkce je ostře konvexní, jestliže její graf leží pod libovolnou sečnou grafu (úsečka spojující dva body grafu).

Funkce je ostře konkávní, jestliže její graf leží nad libovolnou sečnou grafu.

Příklady

$$y = x, y = \cotg x$$

$$y = x^2, y = \cos x$$

$$y = \sin x, y = \operatorname{tg} x$$

$$y = -x^2 \text{ na } \mathbb{R}$$

$$y = x^3 \text{ na } (1, \infty)$$

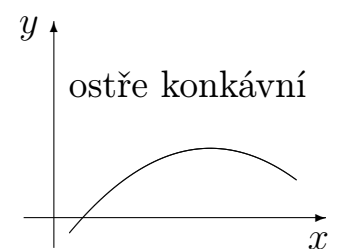
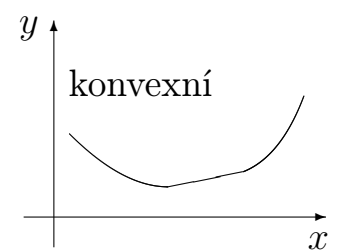
$$y = \frac{1}{x^2+1} \text{ na } \mathbb{R}$$

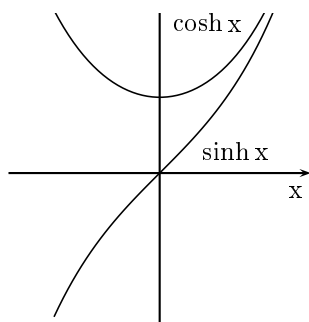
$$y = 2 \text{ na } \mathbb{R}$$

$$y = \frac{1}{x} \text{ na } (0, \infty)$$

$$y = \ln x \text{ na } (0, \infty)$$

$$y = e^{-x} \text{ na } \mathbb{R}$$





Průhyb lana mezi dvěma stožáry (tzv. řetězovka) lze popsat pomocí funkce  $\cosh x$ .

### Příklad 6.2: Hyperbolické funkce

1. Funkce  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  je lichá a rostoucí na  $\mathbb{R}$ .
2. Funkce  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  je sudá a ostře konvexní na  $\mathbb{R}$ .

Cvičení 6.2: Dokažte, že platí:  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ,  $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$ ,  $2 \sinh x \cosh x = \sinh 2x$ .

$$[\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1, \quad \cosh^2 x + \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh 2x.]$$

Cvičení 6.3: Dokažte:

- a) Součin lichých funkcí je funkce sudá.
- b) Součin liché a sudé funkce je funkce lichá.
- c) Součin a součet  $T$ -periodických funkcí je opět funkce  $T$ -periodická.

[a)  $f(-x)g(-x) = -f(x)(-g(x)) = f(x)g(x)$ ; b)  $f(-x)g(-x) = -f(x)g(x)$ ; c)  $f(x+T) + g(x+T) = f(x) + g(x)$ , v případě součinu se může základní perioda zmenšit:  $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ , pak  $T = \pi$ .]

Cvičení 6.4: Ověřte, zda existuje funkce  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a) sudá a zároveň **prostá**;
- b) sudá a monotónní;
- c) sudá a lichá;
- d) periodická a monotónní;
- e) periodická a ostře monotónní;
- f) ostře konvexní a ostře monotónní?

[a) ne; b)  $y = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ; c)  $y = 0$ ; d)  $y = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ; e) ne; f)  $y = e^x$ .]

Příklad 6.3: Funkce  $y = x^2$  je ostře konvexní na  $\mathbb{R}$ .

Tvrzení plyne z následujících nerovností

$$\begin{aligned} (tx_1 + (1-t)x_2)^2 &< t(x_1)^2 + (1-t)(x_2)^2 \Leftrightarrow \\ t^2x_1^2 + 2t(1-t)x_1x_2 + (1-t)^2x_2^2 &< t(x_1)^2 + (1-t)(x_2)^2 \Leftrightarrow \\ 2t(1-t)x_1x_2 &< t(x_1)^2(1-t) + (1-t)(x_2)^2(1-(1-t)) \Leftrightarrow \\ 2x_1x_2 &< (x_1)^2 + (x_2)^2 \Leftrightarrow 0 < (x_1 - x_2)^2 \quad (x_1 \neq x_2). \end{aligned}$$

Cvičení 6.5: Pro  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  nakreslete graf funkce  $y(tx_1 + (1-t)x_2) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ .

[Grafem je úsečka spojující body  $[x_1, f(x_1)]$  a  $[x_2, f(x_2)]$ . Položíme  $\tau = tx_1 + (1-t)x_2$ , potom  $y(\tau) = \frac{\tau - x_2}{x_1 - x_2}(f(x_1) - f(x_2)) + f(x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \cdot \tau + \frac{f(x_1)(-x_2) + f(x_2)x_1}{x_1 - x_2}$ .]

Pojmy konvexní a konkávní křivka se poprvé objevily v roce 1571 v práci "A Geometricall Practise named Pantometria", jejíž autorem byl anglický matematik **Thomas Digges** (1546-1595).

**Definice 6.4:** (Inverzní funkce)

Jestliže k zobrazení  $f$  z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$  existuje **inverzní zobrazení**  $f^{-1}$ , pak se nazývá **inverzní funkce** k funkci  $f$  (a naopak).

Příklad 6.4: Při popisu rovnoměrného pohybu auta v příkladu (6.1) jsme dostali funkci  $s(t) = v \cdot t + s_0$ . Pokud chceme zjistit čas  $t_1$  potřebný k ujetí vzdálenosti  $s_1$ , pak dostaneme  $t_1 = \frac{s_1 - s_0}{v}$ . Inverzní funkce  $s^{-1}$  k funkci  $s$  má tedy tvar  $t(s) = \frac{s - s_0}{v}$ .

Poznámka 6.3:

- Podle věty (2.1) inverzní funkce existuje právě tehdy, když původní funkce je **prostá**. K funkci  $f: y = x^2$  s **definičním oborem**  $D(f) = \mathbb{R}$  inverzní funkce neexistuje! Omezíme-li se však na interval  $(0, \infty)$ , neboli provedeme **restrikci** funkce  $f$ , pak k danému  $y$  najdeme  $x$  předpisem  $x = \sqrt{y}$ . Pro zakreslení do stejného kartézského systému zaměníme proměnné  $x \leftrightarrow y$  a inverzní funkce má pak tvar  $f^{-1}: y = \sqrt{x}$ .
- Pro **definiční obor**  $D(f)$  a **obor hodnot** inverzní funkce  $H(f^{-1})$  platí  $D(f) = H(f^{-1})$  a naopak  $H(f) = D(f^{-1})$ .
- Graf inverzní funkce  $f^{-1}$  je symetrický s grafem původní funkce  $f$  podle přímky  $y = x$  (osy prvního a třetího kvadrantu).

Cvičení 6.6: Dokažte: Jestliže funkce  $f$  je klesající na intervalu  $I$ , pak funkce  $f$  je na  $I$  prostá a inverzní funkce  $f^{-1}$  je také klesající.

[Označíme  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$ . Potom  $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2 \Rightarrow$  funkce  $f$  je prostá. Tedy existuje  $f^{-1}$  a  $f^{-1}(y_1) = x_1$ ,  $f^{-1}(y_2) = x_2$ . Nechť  $y_1 < y_2$ , pokud by  $x_1 \geq x_2$ , pak  $y_1 \geq y_2$  ( $f$  je klesající), to je spor s předpokladem  $y_1 < y_2$ . Tedy  $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$  a  $f^{-1}$  je klesající.]

Cvičení 6.7: K funkci  $y = x^2 - 2x - 3$  najděte inverzní funkci na množině, na které je funkce  $y$  klesající.

[ $y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4 \Rightarrow$  funkce  $y$  je klesající pro  $x \in (-\infty, 1)$  a inverzní funkce má tvar  $y = 1 - \sqrt{x + 4}$  pro  $x \in \langle -4, \infty \rangle$ .]

## 6.1 Limity funkcí

Německý matematik **Heinrich Eduard Heine** (1821-1881).



je znám svými pracemi v matematické analýze. Mimo jiné definoval pojem stejnoměrné spojitosti funkce.

**Definice 6.5:** (Heineova definice limity)

Nechť  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  a  $x_0$  je **hromadný bod množiny**  $D$ . Jestliže

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall \{x_n\} \subset D, x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow a,$$

pak říkáme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  **limitu**  $a$  a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Jestliže  $x_n > x_0$ , pak  $a$  se nazývá **limita zprava** funkce  $f$  v bodě  $x_0$  a píšeme  $a = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ .

Jestliže  $x_n < x_0$ , pak  $a$  se nazývá **limita zleva** funkce  $f$  v bodě  $x_0$  a píšeme  $a = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ .

*Poznámka 6.4:* V uvedené definici lze uvažovat i  $x_n \rightarrow \pm\infty$ . Pokud  $f(x_n) \rightarrow \pm\infty$ , pak říkáme, že funkce  $f$  diverguje k  $\pm\infty$ .

*Cvičení 6.8:* Dokažte tvrzení

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \wedge \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a.$$

[Implikace "⇒"

je zřejmá. Při důkazu obrácené implikace rozdělíme posloupnost  $\{x_n\}$  konvergující k bodu  $x_0$  na dvě části  $\{x_n\} = \{y_n\} \cup \{z_n\}$ , kde  $y_n < x_0$ ,  $z_n > x_0$  a využijeme existence jednostranných limit.]

**Definice 6.6:** (Cauchyova definice limity)

Nechť  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  a  $x_0$  je **hromadný bod množiny**  $D$ . Jestliže

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon,$$

pak říkáme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  **limitu**  $a$ .

*Cvičení 6.9:* Dokažte, že Heineova a Cauchyova definice limity jsou ekvivalentní.

[Nejdříve dokážeme implikaci "Heine ⇒ Cauchy".

Pro spor předpokládáme, že tvrzení z definice (6.6) neplatí, tedy

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D: 0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - a| \geq \varepsilon.$$

$$\text{Volíme } \delta = \frac{1}{n} \text{ a } \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n: 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - a| \geq \varepsilon.$$

Odtud vyplývá, že  $x_n \neq x_0$ ,  $x_n \rightarrow x_0 \wedge f(x_n) \not\rightarrow a$ , což je spor s definicí (6.5).

Obráceně "Cauchy  $\Rightarrow$  Heine".

Důkaz povedeme přímo. Jestliže  $x_n \neq x_0$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ , pak  $\exists n_0$  tak, že  $\forall n > n_0, n \in \mathbb{N}$  je  $0 < |x_n - x_0| < \delta$  a z definice (6.5) vyplývá, že  $\forall \varepsilon > 0 |f(x_n) - a| < \varepsilon$ , tedy  $f(x_n) \rightarrow a$ , což jsme měli dokázat.]

**Definice 6.7:** (spojitost v bodě)

Jestliže  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , pak říkáme, že funkce  $f$  je **spojitá v bodě  $x_0$** .

Jestliže  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ , pak říkáme, že funkce  $f$  je **spojitá zprava v bodě  $x_0$** .

Jestliže  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ , pak říkáme, že funkce  $f$  je **spojitá zleva v bodě  $x_0$** .

Poznámka 6.5:

1. Z cvičení (6.8) plyne, že funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$  právě tehdy, když je v bodě  $x_0$  spojitá zprava i zleva.
2. Z definice okolí bodu  $U(x_0) = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < \varepsilon\}$  vyplývá, že Cauchyovská definice spojitosti funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je ekvivalentní následující **topologické definici**:

$$\forall U(f(x_0)) \exists U_\delta(x_0) : f(U_\delta(x_0) \cap D(f)) \subset U(f(x_0)).$$

**Věta 6.1:** (lokální chování spojitě funkce)

i) (lokální omezenost spojitě funkce)

Nechť je funkce  $f$  spojitá v bodě  $x_0$ , potom existuje okolí  $U(x_0)$  takové, že funkce  $f$  je omezená na  $U(x_0)$ .

ii) (zachování znaménka spojitě funkce)

Nechť navíc je  $f(x_0) \neq 0$ , potom existuje okolí  $U_1(x_0)$  takové, že  $\forall x \in U_1(x_0) : \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0)$ .

Důkaz:

i) Ze spojitosti funkce  $f$  v bodě  $x_0$  vyplývá, že k danému  $\varepsilon > 0$  existuje  $U(x_0)$  takové, že  $\forall x \in U(x_0) : f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ . Funkce  $f$  je tedy omezená.

ii) Nechť  $f(x_0) > 0$  (pro  $f(x_0) < 0$  je důkaz podobný), potom volíme  $\varepsilon$  tak, aby  $0 < f(x_0) - \varepsilon < f(x)$ , tedy  $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0)$ .



**Definice 6.8:** (body nespojitosti)

Nechť  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  a  $P(x_0) \subset D$ . Jestliže funkce  $f$  není spojitá v bodě  $x_0$ , pak říkáme, že bod  $x_0$  je bodem nespojitosti funkce  $f$ . Pokud navíc

1.  $f(x_0+) = f(x_0-)$ , pak  $x_0$  je **bodem odstranitelné nespojitosti**.

2.  $f(x_0+) \neq f(x_0-)$ , pak  $x_0$  je **bodem neodstranitelné nespojitosti 1.druhu**.

Číslo  $f(x_0+) - f(x_0-)$  se nazývá **skok funkce  $f$** .

3. alespoň jedna z limit  $f(x_0+)$ ,  $f(x_0-)$  neexistuje nebo je nevlastní (tj.  $\pm\infty$ ), pak  $x_0$  je **bodem neodstranitelné nespojitosti 2.druhu**.

Z Heineho definice limity a algebry limit posloupností (věta (4.5)) vyplývají následující vztahy.

**Věta 6.2:** (algebra limit funkcí)

Nechť  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , pak platí:

i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$ ,

ii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$ ,

iii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$   $b \neq 0$ .

*Poznámka 6.6:* Pokud v předchozí větě (6.2) je  $a = f(x_0)$  a  $b = g(x_0)$ , pak dostaneme "algebru spojitých funkcí". Neboli součet, rozdíl, součin a podíl ( $g(x_0) \neq 0$ ) spojitých funkcí je opět spojitá funkce.

*Příklad 6.5:*

1. Dokažte, že  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2}{x} = 3$ .

Nechť  $\{x_n\}$  je libovolná posloupnost s  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ , pak

podle věty (6.2) je  $\lim_{x_n \rightarrow 2} \frac{x_n^2+2}{x_n} = \frac{\lim_{x_n \rightarrow 2} x_n \cdot \lim_{x_n \rightarrow 2} x_n+2}{\lim_{x_n \rightarrow 2} x_n} = 3$ .

Obecně pro **racionální lomenou funkci**  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  (tj. podíl dvou polynomů  $P(x), Q(x)$ ) platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad Q(x_0) \neq 0.$$



2. Vypočítejte limitu  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}$ .

Nechť  $x_n \rightarrow 4$ , potom  $\exists n_0 \forall n > n_0 : x_n > 0$  a z rovnosti  $x_n - 4 = (\sqrt{x_n} - \sqrt{4})(\sqrt{x_n} + \sqrt{4})$  (tzv. násobení sdruženým výrazem) vyplývá  $\sqrt{x_n} \rightarrow \sqrt{4}$ . Tedy  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$ .

Obecně použijeme rovnost  $(x - x_0) = (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}) \cdot ((\sqrt[n]{x})^{n-1} + (\sqrt[n]{x})^{n-2} \sqrt[n]{x_0} + \dots + (\sqrt[n]{x_0})^{n-1})$ . Odtud vyplývá  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ , pokud mají dané výrazy smysl (např. pro  $n = 2, x_0 = 0$  uvažujeme pouze  $x \rightarrow 0+$ ).

Analogií věty o sevření (4.7) pro posloupnosti je následující věta.

**Věta 6.3:** (věta o sevření pro funkce)

Nechť  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$  a  $\exists U(x_0) \forall x \in U(x_0) : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ , potom také  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ .

Příklad 6.6:

1. Z obrázku vyplývá, že pro  $|x| < \frac{\pi}{2}$  platí  $|\sin x| < |x|$  a z věty o sevření dostaneme  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ . Z rovnosti  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  a podmínky  $\cos x \geq 0$  ( $|x| < \frac{\pi}{2}$ ) plyne  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ .
2. Z obrázku rovněž vyplývá, že  $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x| \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ . Z věty o sevření dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

3. Nechť  $x_n \rightarrow 0$ , potom  $\forall k \in \mathbb{N} \exists n_0 \forall n > n_0 : -\frac{1}{k} < x_n < \frac{1}{k}$ . Zároveň  $e^{-\frac{1}{k}} < e^{x_n} < e^{\frac{1}{k}}$  a  $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{k}} = 1$ . Odtud

vyplývá, že  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ .

Podobně  $e^{-\frac{1}{k}} < 1 + x_n < e^{\frac{1}{k}} \Rightarrow -\frac{1}{k} < \ln(1 + x_n) < \frac{1}{k}$ .

Odtud plyne  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$ .

4. Nechť  $\{x_n\}$  je taková posloupnost, že  $n \leq x_n \leq n + 1$ , pak  $\Rightarrow (1 + \frac{1}{n+1})^n < (1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ . Odtud opět pomocí věty o sevření dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$$

Cvičení 6.10:

a) Dokažte, že platí  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ .

$$\left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \cdot \right]$$

b) Dokažte, že funkce  $\sin x$ ,  $e^x$ ,  $\ln x$  jsou spojité na  $\mathbb{R}$ .

[Nechť  $x_n \rightarrow x_0$ , pak  $x_n - x_0 \rightarrow 0$

$$\text{a } \sin(x_n) - \sin(x_0) = 2 \cos \frac{x_n + x_0}{2} \sin \frac{x_n - x_0}{2} \rightarrow 0 \Rightarrow \sin(x_n) \rightarrow \sin(x_0), \quad e^{x_n} = e^{x_n - x_0} e^{x_0} \rightarrow 1 \cdot e^{x_0}, \quad \ln x_n - \ln x_0 = \ln \frac{x_n}{x_0} \rightarrow 0.]$$

**Věta 6.4:** (věta o limitě složené funkce)

Nechť  $f: D(f) \rightarrow H(f)$ ,  $g: D(g) \rightarrow H(g)$  a  $H(f) \subset D(g)$ .

Dále  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$  ( $i \pm \infty$ ),  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = a$ . Je-li splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

i) existuje  $P(x_0)$  takové, že  $\forall x \in P(x_0): f(x) \neq y_0$ ,

ii) funkce  $g$  je spojitá v bodě  $y_0$ ,

potom také **složená funkce**  $h(x) = g(f(x))$  má limitu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a.$$

Příklad 6.7: Dokážeme, že platí

$$1. \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}.$$

Položíme  $y = -x - 1$  a výraz v limitě upravíme

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{-1-y+1}{-1-y}\right)^{-1-y} = \left(\frac{y}{1+y}\right)^{-(1+y)} = \left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1} = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \left(1 + \frac{1}{y}\right).$$

Dále platí  $y \rightarrow \infty$  a funkce  $y = -x - 1$  ( $= f(x)$ ) splňuje předpoklad i) věty (6.4) ( $y \neq \infty$ ).

$$\text{Tedy } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \left(1 + \frac{1}{y}\right) = e \cdot 1 = e.$$

$$2. \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e}.$$

Položíme  $y = \frac{1}{x}$ . Pro  $x > 0$   $y \rightarrow \infty$ , pro  $x < 0$

$y \rightarrow -\infty$ . Tedy  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$  a

zároveň  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$ . Z cvičení

(6.8) vyplývá, že i  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ .

$$3. \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.}$$

Funkce  $\ln x$  je podle cvičení (6.10) spojitá v každém bodě. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

$$4. \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.}$$

Použijeme substituci  $y = e^x - 1$  a předchozí příklad.

$$\text{Potom } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1.$$

Cvičení 6.11: Dokažte, že platí

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1.$$

$$[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} + \frac{e^{-x} - 1}{-2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.]$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cosh x)(1 + \cosh x)}{x^2(1 + \cosh x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh^2 x}{x^2(1 + \cosh x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sinh^2 x}{x^2(1 + \cosh x)} = -\frac{1}{2}.]$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1.$$

$$[\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = (y = \frac{1}{x}) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[y]{y}} = 1.]$$

**Definice 6.9:** Funkce  $f$  se nazývá **omezená ve srovnání s funkcí  $g$**  (nebo  **$g$ -omezená**) pro  $x \rightarrow x_0$ , jestliže

$$\exists P(x_0) \exists c \in \mathbb{R} \forall x \in P(x_0) : |f(x)| \leq c |g(x)|.$$

Píšeme a čteme  $f = O(g)$ . Je-li  $f = O(g)$  a  $g = O(f)$ , pak říkáme, že funkce  $f, g$  jsou **stejného řádu** v bodě  $x_0$ .

Říkáme, že funkce  $f, g$  jsou si **asymptoticky rovny** v bodě  $x_0$ , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

a píšeme  $f \sim g$ .

Říkáme, že funkce  **$f$  je malé  $o$  funkce  $g$** , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

a píšeme  $f = o(g)$ .

Pojmy "velké a malé  $o$ " se používají při hodnocení výpočetní složitosti programu.

**Poznámka 6.7:** Z příkladů (6.6), (6.7) a cvičení (6.10) vyplývá, že v bodě  $x_0 = 0$  platí:  $\sin x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \sinh x$ .

**Cvičení 6.12:** Dokažte:

a)  $x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x$ .

$$\left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = (y = \arcsin x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctan} x}{x} = (y = \operatorname{arctg} x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1. \right]$$

b) Nechť  $f = O(g)$  a  $g = 1$ , pak  $\exists P(x_0)$  takové, že funkce  $f$  je omezená na  $P(x_0)$ .

$$[f = O(g), g = 1 \Rightarrow \exists P(x_0) \forall x \in P(x_0) : |f(x)| \leq c.]$$

c) Nechť existuje  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ ,  $c \neq 0$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , pak  $f = O(g)$  i  $g = O(f)$ .

$$\left[ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \Rightarrow c - \varepsilon < \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq c + \varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq (c + \varepsilon)|g(x)| \wedge |g(x)| \leq (c - \varepsilon)|f(x)|. \right]$$

**Definice 6.10:** Číslo  $c$  se nazývá **částečná limita** funkce  $f$  v bodě  $x_0$ , jestliže existuje posloupnost  $\{x_n\} \subset D(f)$ ,  $x_n \neq x_0$  taková, že  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = c$ . Největší a nejmenší (pokud existují) částečné limity funkce  $f$  v bodě  $x_0$  se nazývají **horní limita** a **dolní limita** funkce  $f$  a značí se  $\limsup_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$

a  $\liminf_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

**Příklad 6.8:** Mějme funkci  $\cos \frac{1}{x}$ .

Pro posloupnost  $x_n = \frac{1}{2n\pi}$  je  $\lim_{x_n \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x_n} = 1$ , pro po-

sloupnost  $x_n = \frac{1}{(2n-1)\pi}$  je  $\lim_{x_n \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x_n} = -1$  a pro po-

sloupnost  $x_n = \frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}}$  je  $\lim_{x_n \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x_n} = 0$ .

Libovolná hodnota  $c \in \langle -1, 1 \rangle$  je částečnou limitou funkce  $\cos \frac{1}{x}$  v bodě  $x_0 = 0$  a  $\limsup_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = 1$ ,  $\liminf_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = -1$ .

**Věta 6.5:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ .

**Cvičení 6.13:** Dokažte větu (6.5).

[ $\Rightarrow$ ]  $\forall \{x_n\}, x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0$  je  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = L \Rightarrow$  také největší a nejmenší hodnota  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = L$ .

" $\Leftarrow$ " Horní limita  $\limsup_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = L \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$   
 $\forall n > n_0: f(x_n) < L + \varepsilon$ . Podobně dolní limita  $\liminf_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = L \Rightarrow$   
 $L - \varepsilon < f(x_n)$ . Tedy  $|f(x_n) - L| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \rightarrow L$ . ]

## 6.2 Spojité funkce na množině

**Definice 6.11:** Funkce  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  je **spojitá na množině**  $I$ , jestliže  $f$  je spojitá v každém bodě  $x \in I \subset D$ . Neboli

$$\forall x \in I \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tilde{x} \in D: |\tilde{x} - x| < \delta \Rightarrow |f(\tilde{x}) - f(x)| < \varepsilon.$$

Cvičení 6.14: Jestliže funkce  $f$  je konvexní nebo konkávní na  $\langle a, b \rangle$ , pak je spojitá na  $(a, b)$ .

[V intervalu  $\langle a, b \rangle$  uvažujeme body  $x_1 < x_2 < x_3$  a posloupnost  $\{x_n\}$ , která konverguje k bodu  $x_2$  zprava a  $x_n < x_3$ . Budeme předpokládat, že funkce  $f$  je konvexní (pro konkávní funkce je důkaz podobný) a položíme  $g(x) = f(x) - \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1)$ , potom funkce  $g$  je opět konvexní (od konvexní funkce jsme odečetli přímku) a platí  $f(x_1) = g(x_1) > g(x_n)$  a  $f(x_3) = g(x_3) > g(x_2)$ .

Z konvexity funkce  $g$  vyplývá, že  $\forall x_n \exists t_n \rightarrow 0+, \tau_n \rightarrow 1-: g(x_2) \leq t_n g(x_1) + (1 - t_n)g(x_n) \wedge g(x_n) \leq \tau_n g(x_2) + (1 - \tau_n)g(x_3) \Rightarrow g(x_2) \leq t_n(g(x_1) - g(x_n)) + g(x_n) \wedge g(x_n) \leq g(x_2) + (1 - \tau_n)(g(x_3) - g(x_2)) \Rightarrow g(x_2) - t_n(g(x_1) - g(x_n)) \leq g(x_n) \leq g(x_2) + (1 - \tau_n)(g(x_3) - g(x_2)) \Rightarrow \lim_{x_n \rightarrow x_2+} g(x_n) = g(x_2)$ . Podobně lze dokázat, že je funkce  $g$  spojitá zleva v bodě  $x_2$ , tedy funkce  $g$  i  $f$  jsou spojitě na  $(a, b)$ . ]

Cvičení 6.15: Dokažte, že spojitá a prostá funkce na  $I$  je ostře monotónní na  $I$ .

[Důkaz provedeme sporem. Nechť funkce  $f$  není ostře monotónní na intervalu  $(a, b)$ , pak existují body  $x_0, x_1, x_2 \in (a, b)$  takové, že  $f(x_0) < f(x_1) > f(x_2)$  (nebo  $f(x_0) > f(x_1) < f(x_2)$ ), (rovnost nemůže nastat, protože funkce  $f$  je monotónní). Zvolíme  $\varepsilon > 0$  tak, aby  $f(x_0) < f(x_1) - \varepsilon > f(x_2)$ . Protože funkce  $f$  je spojitá na uzavřených intervalech  $\langle x_0, x_1 \rangle$  a  $\langle x_1, x_2 \rangle$ , tak existují body  $\xi_0 \in (x_0, x_1)$ ,  $\xi_1 \in (x_1, x_2)$  takové, že  $f(\xi_0) = f(x_1) - \varepsilon = f(\xi_1)$ , což je spor s předpokladem, že funkce  $f$  je prostá.]

**Věta 6.6:** Nechť funkce  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  (v bodě  $a$  je spojitá zprava, v bodě  $b$  zleva), potom

$$\text{i) } \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in \langle a, b \rangle : |f(x)| \leq K \quad (\text{je omezená na } \langle a, b \rangle),$$

$$\text{ii) } \exists x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : f(x_1) = \min_{x \in \langle a, b \rangle} f(x), \quad f(x_2) = \max_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) \\ (\text{nabývá svého minima a maxima na } \langle a, b \rangle),$$

$$\text{iii) } \forall y \in \langle f(a), f(b) \rangle \exists x \in \langle a, b \rangle : f(x) = y \\ (\text{existence řešení rovnice, nabývání všech mezihodnot}).$$

Důkaz:

- i) Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že funkce  $f$  není omezená, tedy  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \langle a, b \rangle : |f(x_n)| > n$ . Posloupnost  $\{x_n\}$  ( $\subset \langle a, b \rangle$ ) je omezená. Podle věty (4.4 iii) můžeme z ní vybrat konvergentní posloupnost  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ . Z věty (4.2) vyplývá, že  $x_0 \in \langle a, b \rangle$  a ze spojitosti funkce  $f$  plyne  $\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ , což je spor s předpokladem  $|f(x_{n_k})| > n_k \rightarrow \infty$ .
- ii) Z bodu i) vyplývá, že funkce  $f$  má suprémum na  $\langle a, b \rangle$ . Položíme  $M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$  a pro spor předpokládáme, že  $\forall x \in \langle a, b \rangle$  je  $M - f(x) > 0$ , tedy i funkce  $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$  je kladná. Zároveň  $g$  je spojitá funkce na  $\langle a, b \rangle$ . Podle bodu i) existuje  $M_1 \in \mathbb{R}$  takové, že  $M_1 > \frac{1}{M - f(x)} > 0 \Rightarrow M - f(x) > \frac{1}{M_1} \Rightarrow M - \frac{1}{M_1} > f(x) \forall x \in \langle a, b \rangle$ . To je spor s předpokladem, že  $M$  je suprémem funkce  $f$  na  $\langle a, b \rangle$ .
- iii) Nechť  $f(a) < y < f(b)$ . Postupným půlením intervalu  $\langle a, b \rangle$  vytvoříme intervaly  $\langle a_n, b_n \rangle$  ( $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ ) takové, že  $f(a_n) < y < f(b_n)$ . (Pokud  $y = f(a_n)$  nebo  $y = f(b_n)$ , pak jsme bod  $x$  našli). Z věty (4.3) vyplývá, že existuje bod  $x \in \langle a, b \rangle$  takový, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$ . Ze spojitosti funkce  $f$  a z věty o sevření (4.7) dostaneme  $f(x) \leftarrow f(a_n) < y < f(b_n) \rightarrow f(x) \Rightarrow f(x) = y$ .

**Definice 6.12:** Funkce  $f$  je **stejněměrně spojitá na množině**  $I \subset D$ , jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in I : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

*Poznámka 6.8:* Pokud bod  $x_1$  v předchozí definici zvolíme pevně, pak dostaneme definici spojitosti funkce  $f$  v bodě  $x_1$ . Odtud je zřejmé, že stejněměrně spojitá funkce na množině  $I$  je zároveň spojitá na  $I$ . Obrácená implikace však neplatí.

*Příklad 6.9:*

1. Funkce  $f(x) = \frac{1}{x}$  je spojitá na intervalu  $(0, 1)$ , není zde však stejněměrně spojitá.

Zvolíme  $\forall n \in \mathbb{N}$  body  $x_{1n} = \frac{1}{n}$ ,  $x_{2n} = \frac{1}{2n}$ . Pro jejich vzdálenost platí  $\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} (< \delta)$ . Pro rozdíl funkčních hodnot však dostaneme  $|f(x_{1n}) - f(x_{2n})| = |n - 2n| = n (> \varepsilon)$ .

2. Funkce  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  je spojitá na intervalu  $(0, 1)$ , není zde však stejněměrně spojitá.

Zvolíme  $\forall n \in \mathbb{N}$  body  $x_{1n} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ ,  $x_{2n} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ .

Pro vzdálenost těchto bodů dostaneme  $\left| \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} - \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \right| = \frac{\pi}{-\frac{\pi^2}{4} + 4n^2\pi^2} (< \delta)$ . Pro rozdíl funkčních hodnot však dostaneme  $|f(x_{1n}) - f(x_{2n})| = |1 - (-1)| = 2 (> \varepsilon)$ .

**Věta 6.7:** (Cantorova)

Je-li funkce  $f$  spojitá na uzavřeném intervalu  $I$ , potom je na intervalu  $I$  také stejněměrně spojitá.

*Cvičení 6.16:* Dokažte Cantorovu větu (6.7)

[Důkaz povedeme sporem.

Nechť  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  není stejněměrně spojitá funkce, pak

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x_1, x_2 \in I : |x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon.$$

Položíme  $\delta = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , potom

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_{1n}, x_{2n} \in I : |x_{1n} - x_{2n}| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_{1n}) - f(x_{2n})| > \varepsilon.$$

Posloupnosti  $\{x_{1n}\}, \{x_{2n}\} \subset I$  jsou omezené, tedy podle věty (4.4) existují vybrané posloupnosti  $\{\hat{x}_{1n}\} \subset \{x_{1n}\}, \{\hat{x}_{2n}\} \subset \{x_{2n}\}$  a  $x_0 \in \mathbb{R}$  tak, že  $\hat{x}_{1n} \rightarrow x_0, \hat{x}_{2n} \rightarrow x_0$ . Zároveň  $I$  je uzavřený interval, tedy podle věty (4.1) je  $x_0 \in I$ .

Podle předpokladu je funkce  $f$  spojitá funkce na intervalu  $I$ , tedy

$\exists n_1 \forall n > n_1: |f(\hat{x}_{1n}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\exists n_2 \forall n > n_2: |f(\hat{x}_{2n}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .  
Odtud plyne  $|f(\hat{x}_{1n}) - f(\hat{x}_{2n})| \leq |f(\hat{x}_{1n}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(\hat{x}_{2n})| < \varepsilon$ ,  
což je spor s nerovností  $|f(\hat{x}_{1n}) - f(\hat{x}_{2n})| > \varepsilon$ .]

*Příklad 6.10:* Dokážeme, že funkce  $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x}$  stejnoměrně spojitá na intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

Nejdříve poznamenejme, že funkce stejnoměrně spojitá na množině  $M$ , je rovněž stejnoměrně spojitá i na podmnožině  $M_1 \subset M$ .

Dále  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$  a  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 0$ . Nyní dodefinujeme  $f(0) = 1$ ,  $f(\frac{\pi}{2}) = 0$  (spojité dodefinování v krajních bodech), potom funkce  $f$  je spojitá na uzavřeném intervalu  $M = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ , tedy podle Cantorovy věty (6.7) a úvodní poznámky je funkce  $f$  také stejnoměrně spojitá na podmnožině  $M_1 = (0, \frac{\pi}{2})$ .



## 7 Derivace

Příklad 7.1: Máme auto, jehož ujetá dráha je popsána funkcí  $s(t)$ . Chceme-li spočítat jeho průměrnou rychlost  $\bar{v}$  v časovém intervalu  $\langle t_0, t \rangle$ , pak  $\bar{v} = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ .

Rozdíl  $\Delta t = t - t_0$  se nazývá **diference argumentu**, rozdíl  $\Delta s(t_0, \Delta t) = s(t) - s(t_0)$  se nazývá **diference funkce**  $s$  v bodě  $t_0$  a podíl  $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$  se nazývá **poměrná diference funkce**  $s$  v bodě  $t_0$ .

K výpočtu okamžité rychlosti  $v_0$  auta v čase  $t_0$  potřebujeme znát hodnotu limity  $v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ .

**Definice 7.1:** Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad (= f'|_{x_0}),$$

pak se nazývá **derivace** funkce  $f$  v bodě  $x_0$ . (Jestliže  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ , pak hovoříme o **nevlastní derivaci**.)

Jestliže existuje  $\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$ , pak se nazývá **derivace zprava**.

Jestliže existuje  $\lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$ , pak se nazývá **derivace zleva** funkce  $f$  v bodě  $x_0$ .

Funkce  $f': x \rightarrow f'(x)$ ,  $x \in I$  se nazývá **derivace funkce**  $f$  na intervalu  $I$ .

Poznámka 7.1: 1. Z cvičení (6.7) vyplývá, že funkce má derivaci  $f'(x_0)$  právě tehdy, když existují obě jednostranné derivace  $f'_+(x_0)$ ,  $f'_-(x_0)$  a tyto derivace se rovnají.

Funkce  $f(x) = |x|$  má  $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|-0}{x-0} = 1$  a  $f'_-(0) = -1$ .

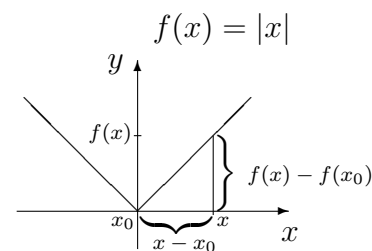
Tedy derivace  $f'(0)$  neexistuje.

2. Pokud  $f'$  je spojitá funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$  (v krajních bodech zprava, resp. zleva), pak říkáme, že funkce  $f$  je **spojitě diferencovatelná na  $\langle a, b \rangle$**  a množinu všech **spojitě diferencovatelných funkcí na intervalu  $\langle a, b \rangle$**  značíme  $\mathbf{C}^1(\langle a, b \rangle)$ . Podobně množinu všech **spojitých funkcí na  $\langle a, b \rangle$**  značíme  $\mathbf{C}(\langle a, b \rangle)$ .

V 17.století se matematici pokoušeli vyřešit tzv. "Problém tečny"- nalezení tečny ke grafu funkce a "Problém plochy"- spočítat obsah plochy pod grafem funkce. Na úspěšném vyřešení těchto problémů se nezávisle na sobě podíleli **Isaac Newton (1643-1727)**



a **Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)**. Další rozvoj v této oblasti vedl k získání velkého množství matematických poznatků, které nazýváme "kalkulus".



Příklad 7.2: Vypočítáme derivaci funkce  $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Dostaneme  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1})}{x - x_0} = nx_0^{n-1} \Rightarrow \boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$ .

Cvičení 7.1: Dokažte následující tvrzení.

a) Jestliže funkce  $f$  má derivaci zprava i zleva v bodě  $x_0$ , pak funkce  $f$  je spojitá v  $x_0$ .

[Využijeme předpoklad, že funkce  $f$  má derivaci zprava v bodě  $x_0$  a píšeme  $\lim_{x \rightarrow x_0+} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = f'_+(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0+} (x - x_0) = 0$ . Odtud plyne  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$  a funkce  $f$  je spojitá zprava v bodě  $x_0$ . Podobně dokážeme spojitost zleva, tedy podle poznámky (6.6) je funkce  $f$  spojitá v bodě  $x_0$ .]

b) Derivace sudé funkce je funkce lichá a naopak.

[Nechť  $f$  je sudá, tedy  $f(-x) = f(x)$ . Pro derivaci v bodě  $-x_0$ , pak platí  $f'(-x_0) = \lim_{x \rightarrow -x_0} \frac{f(x) - f(-x_0)}{x - (-x_0)} = (y = -x) = \lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f(-y) - f(-x_0)}{-y - (-x_0)} = \lim_{y \rightarrow x_0} -\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} = -f'(x_0)$ .]

Důsledkem bodu a) cvičení (7.1) je následující věta.

**Věta 7.1:** Jestliže funkce  $f$  je derivovatelná v bodě  $x_0$ , pak funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$ .

Poznámka 7.2: Obrácené tvrzení k předchozí větě neplatí.

Funkce  $f(x) = \sqrt{|x|}$  je spojitá v bodě  $x_0 = 0$ , ale nemá v tomto bodě derivaci.

Derivace zprava  $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = +\infty$  a derivaci zleva  $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{-x} - 0}{x - 0} = -\infty$  jsou nevlastní.

**Definice 7.2:** Nechť k funkci  $f: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  existují konstanta  $A$  a funkce  $\omega: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že  $\forall x \in U(x_0)$ :

$$f(x) - f(x_0) = A \cdot (x - x_0) + \omega(x - x_0) \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\omega(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

pak řekneme, že funkce  $f$  je **diferencovatelná** v bodě  $x_0$ . Položíme  $h = x - x_0$ . Funkce

$$df(x_0, h) = A \cdot h$$

se nazývá **diferenciál** funkce  $f$  v bodě  $x_0$ .

**Věta 7.2:** Funkce  $f$  má derivaci v bodě  $x_0$  (je derivovatelná v  $x_0$ ) právě tehdy, když je diferencovatelná v bodě  $x_0$ . Navíc platí

$$df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h.$$

Důkaz: "⇒" Jestliže  $\exists f'(x_0)$ , pak upravíme rozdíl  $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$  a položíme  $\omega(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ ,  $A = f'(x_0)$ .

Tedy  $f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x - x_0)$  a pro funkci  $\omega$  dostaneme  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\omega(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$ .

"⇐" Jestliže  $f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x - x_0)$ , pak  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\omega(x - x_0)}{x - x_0} = A$ .

Poznámka 7.3:

1. Pro funkci  $f(x) = x$  je  $f(x) - f(x_0) = 1(x - x_0) + 0 = h$ . Tedy  $f'(x) = 1$  a  $df(x_0, h) = dx = h$ , proto se pro diferenciál funkce  $f$  v bodě  $x_0$  zavádí značení

$$\boxed{df(x_0, h) = f'(x_0) dx}.$$

2. Diferenciál funkce  $f$  určuje hlavní (lineární) změnu funkce  $f$  v bodě  $x_0$  a používá se pro výpočet přibližných hodnot dané funkce na okolí bodu  $x_0$  pomocí vztahu  $f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

Například pro funkci  $f(x) = \sqrt{x}$  a body  $x = 4,1$ ,  $x_0 = 4$  dostaneme  $\sqrt{4,1} \doteq \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (4,1 - 4) = 2,025$ .

3. Rovnice **tečny ke grafu funkce  $f$**  v bodě  $[x_0, f(x_0)]$  má tvar

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

4. Pokud  $f'(x_0) \neq 0$ , pak rovnice **normály ke grafu funkce  $f$**  v bodě  $[x_0, f(x_0)]$  má tvar

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Příklad 7.3: Najdeme derivaci a diferenciál funkce  $e^x$ .

$$\text{Platí } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x_0}(e^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} = e^{x_0} \Rightarrow \boxed{(e^x)' = e^x}$$

$$\text{a } de^x(x_0, h) = e^{x_0} \cdot h.$$

Cvičení 7.2: Najděte derivaci a diferenciál funkce  $\sqrt{x}$ .

$$\begin{aligned} & [\text{Platí } \sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \Rightarrow \\ & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \text{ Tedy pro derivaci platí } (\sqrt{x})'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \text{ a pro} \\ & \text{diferenciál } d\sqrt{x}(x_0, h) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot h, \ x_0 > 0.] \end{aligned}$$

Příklad 7.4: Najdeme rovnici tečny ke grafu funkce  $\cos x$  v bodě  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .

$$\begin{aligned} \text{Platí } \cos x - \cos x_0 &= \cos\left(\frac{x+x_0}{2} + \frac{x-x_0}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+x_0}{2} - \frac{x-x_0}{2}\right) = \\ &= \cos \frac{x+x_0}{2} \cos \frac{x-x_0}{2} - \sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2} - \\ &= \cos \frac{x+x_0}{2} \cos \frac{x-x_0}{2} - \sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2} = -2 \sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-2 \sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} = -\sin x_0. \end{aligned}$$

Tedy  $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$  a pro  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  má rovnice tečny tvar  $y - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -(x - \frac{\pi}{2})$ .

**Věta 7.3:** (algebra derivací)

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ , pak platí:

- i)  $(af \pm bg)'(x_0) = af'(x_0) \pm bg'(x_0)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,
- ii)  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ ,
- iii)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ ,  $g(x_0) \neq 0$ .

Důkaz: Dokážeme vztah iii) pro derivaci podílu dvou funkcí. Ostatní vztahy se dokazují podobně.

$$\begin{aligned} \text{Platí } \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}{g(x)g(x_0)}. \end{aligned}$$

a věty (7.1) vyplývá, že funkce  $g$  je spojitá v bodě  $x_0$ .

$$\begin{aligned} \text{Tedy } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &= g(x_0) \text{ a } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}{g(x)g(x_0)} = \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned}$$

Příklad 7.5:

$$1. ((2x + 1) \ln x e^x)' = 2 \ln x e^x + (2x + 1)(\ln x e^x)' = \\ = 2 \ln x e^x + (2x + 1) \frac{1}{x} e^x + (2x + 1) \ln x e^x.$$

$$2. (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}.$$

**Věta 7.4:** (Derivace složené a inverzní funkce)

Nechť funkce  $f$  je diferencovatelná v bodě  $x_0$ ,  $y_0 = f(x_0)$  a funkce  $g$  je diferencovatelná v bodě  $y_0$ , potom i složená funkce  $h(x) = g(f(x))$  je diferencovatelná v bodě  $x_0$  a platí

$$(h(x))'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Nechť  $f'(x_0) \neq 0$ , pak pro derivaci inverzní funkce  $f^{-1}$  v bodě  $y_0 = f(x_0)$  platí

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Důkaz: Položíme  $y = f(x)$  a upravíme zlomek  $\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} =$   
 $= \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} \cdot \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$

Funkce  $f$  je derivovatelná a podle věty (7.1) i spojitá v bodě  $x_0$ . Tedy  $y \rightarrow y_0$  a přechodem k limitě ve výše uvedené rovnosti dostaneme  $(h(x))'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} =$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y-y_0}{x-x_0} = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

(Pokud  $y = y_0$  na okolí  $U(x_0)$ , pak funkce  $f$  i  $h$  jsou konstantní, jejich derivace nulové a platí  $0 = g'(y_0) \cdot 0$ .)

První část věty je tedy dokázána.

Vztah pro derivaci inverzní funkce nyní dostaneme, když položíme  $g = f^{-1}$ , pak  $h(x) = f^{-1}(f(x)) = x$  a  $h'(x) = 1$ . Tedy  $1 = (f^{-1})'(y) \cdot f'(x)$ . Odtud již plyne druhé tvrzení věty.

Příklad 7.6:

$$1. (a^x)' = (e^{x \ln a})' = (y = x \ln a) = (e^y)' \cdot (x \ln a)' =$$

$$e^{x \ln a} \cdot \ln a \Rightarrow \boxed{(a^x)' = a^x \ln a}.$$

$$\begin{aligned}
 2. (\operatorname{arctg} y)'(y_0) &= \frac{1}{(\tan x_0)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x_0)}} = \frac{1}{\frac{\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)}} = \\
 &= \frac{1}{1 + \tan^2(x_0)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\operatorname{arctan}(y_0))} = \frac{1}{1 + (y_0)^2} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot}$$

Základní derivace	
$(e^x)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x \in (0, \infty)$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x \in (0, \infty)$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty)$
$(x^n)' = n x^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$(\sinh x)' = \cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\cosh x)' = \sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{cotgh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$	$x \neq 0$
$(\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (1, \infty)$
$(\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1, 1)$
$(\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

## 7.1 Základní věty diferenciálního počtu

**Definice 7.3:** Funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  (**ostré**) **lokální maximum**, jestliže existuje okolí  $U(x_0)$  takové, že

$$\forall x \in U(x_0): f(x_0) (>) \geq f(x).$$

V případě opačných nerovností hovoříme o (**ostrém**) **lokální minimum**, funkce  $f$  v bodě  $x_0$ .

Společně hovoříme o (**ostrém**) **lokálním extrému** funkce  $f$  v bodě  $x_0$ .

**Věta 7.5:** (nutná podmínka extrému - Fermat)

Nechť bod  $x_0$  je bodem lokálního extrému funkce  $f$  a existuje  $f'(x_0)$ , pak  $f'(x_0) = 0$ .

*Důkaz:* Nechť  $x_0$  je bodem lokálního maxima funkce  $f$  (pro lokální minimum je důkaz podobný), pak existuje okolí  $U(x_0)$  takové, že

$\forall x \in U(x_0), x < x_0: \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \Rightarrow f'_-(x_0) \geq 0$ . Podobně

$\forall x \in U(x_0), x > x_0: \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 \Rightarrow f'_+(x_0) \leq 0$ .

Z existence derivace  $f'(x_0)$  pak plyne  $0 \leq f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0) \leq 0$ , tedy  $f'(x_0) = 0$ .

Příklad 7.7:

1. Podmínka  $f'(x_0) = 0$  není postačující podmínkou extrému. Funkce  $f(x) = x^3$  má v bodě  $x_0 = 0$  derivaci  $(x^3)'|_0 = (3x^2)|_0 = 0$ , přesto v bodě  $x_0 = 0$  nemá extrém.
2. Funkce  $f$  může mít extrém i v bodě, ve kterém neexistuje derivace. Například funkce  $f(x) = |x|$  má v bodě  $x_0 = 0$  minimum, ale derivace  $(|x|)'|_0$  podle poznámky (7.1) neexistuje.

**Definice 7.4:** Jestliže  $f'(x_0)$  neexistuje nebo  $f'(x_0) = 0$ , pak říkáme, že bod  $x_0$  je **kritickým bodem** funkce  $f$  (nebo bod podezřelý z extrému). Pokud  $f'(x_0) = 0$ , pak bod  $x_0$  je navíc **stacionárním bodem** funkce  $f$ .

**Věta 7.6:** (o střední hodnotě - Rolle)

Nechť funkce  $f$  je spojitá na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$ , diferencovatelná na otevřeném intervalu  $(a, b)$  a v krajních bodech platí  $f(a) = f(b) = 0$ , potom existuje bod  $\xi \in (a, b)$  takový, že

$$f'(\xi) = 0.$$

*Důkaz:* Podle věty (6.6) nabývá spojitá funkce na uzavřeném intervalu svého minima i maxima. Nechť  $x_m$  je bodem minima a  $x_M$  je bodem maxima funkce  $f$ , potom  $f(x_m) \leq f(a) = f(b) \leq f(x_M)$ .

Pokud je funkce  $f$  konstantní, pak je tvrzení věty zřejmé.

Pokud funkce  $f$  není konstantní, pak nastane alespoň jedna z možností:  $f(x_m) < f(a)$ , pak položíme  $\xi = x_m$  nebo  $f(b) < f(x_M)$ , pak položíme  $\xi = x_M$ . Bod  $\xi$  je tedy bodem lokálního extrému funkce  $f$  a podle věty (7.5) je  $f'(\xi) = 0$ .

**Věta 7.7:** (o střední hodnotě)

(Lagrangeova) Nechť funkce  $f$  je spojitá na  $\langle a, b \rangle$  a diferencovatelná na  $(a, b)$ , potom existuje bod  $\xi \in (a, b)$  takový, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(Zobecněná) Nechť také funkce  $g$  je spojitá na  $\langle a, b \rangle$ , diferencovatelná na  $(a, b)$  a  $\forall x \in (a, b)$  je  $g'(x) \neq 0$ , potom existuje bod  $\eta \in (a, b)$  takový, že

$$\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

*Důkaz:* Zavedeme funkce  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$  předpisem

$$h_1(x) = (f(b) - f(a)) \frac{b-x}{b-a} - (f(b) - f(x)),$$

$$h_2(x) = (f(b) - f(a)) \frac{g(b)-g(x)}{g(b)-g(a)} - (f(b) - f(x)).$$

Funkce  $h_1$ ,  $h_2$  splňují předpoklady Rolleovy věty (7.6). Tedy existují body  $\xi, \eta \in (a, b)$  takové, že  $h'_1(\xi) = 0$ ,  $h'_2(\eta) = 0$ .

$$\text{Neboli } 0 = (f(b) - f(a)) \frac{-1}{b-a} + f'(\xi) \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$\text{a } 0 = (f(b) - f(a)) \frac{-g'(\eta)}{g(b)-g(a)} + f'(\eta) \Rightarrow \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$



Poznámka 7.4:

1. Lagrangeova věta o střední hodnotě říká, že ke grafu diferencovatelné funkce  $f$  existuje tečna se stejnou směrnici, jakou má sečna grafu funkce  $f$  procházející body  $[a, f(a)]$ ,  $[b, f(b)]$ .
2. Věta (7.7) zůstává v platnosti i pro funkce  $f$  s nevlastní derivací v některém bodě  $x_0$  intervalu  $(a, b)$ , např. pro funkci  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  na intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ , kde  $f'(0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Big|_0 = \infty$ .

Důsledek: (věty (7.7)). Funkce  $f$  je na intervalu  $(a, b)$  konstantní právě tehdy, když  $\forall x \in (a, b): f'(x) = 0$ .

Důkaz:

”  $\Rightarrow$  ” Pokud  $f(x) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , pak zřejmě  $f'(x) = 0$ .

”  $\Leftarrow$  ” Nechť  $x_1, x_2$  jsou libovolné dva body z intervalu  $(a, b)$ , pak podle věty (7.7)  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$  takové, že  $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$ . Podle předpokladu je  $f'(\xi) = 0$ , tedy  $f(x_1) = f(x_2)$  a funkce  $f$  je konstantní.

Cvičení 7.3: Pomocí věty (7.7) dokažte následující tvrzení.

Nechť funkce  $f$  je spojitá na  $\langle a, b \rangle$ , diferencovatelná na  $(a, b)$  a existuje  $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$ , potom existuje  $f'_+(a)$  a platí  $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x) = f'_+(a)$ .

[Z věty (7.6) plyne  $\forall x \in (a, x) \exists \xi_x \in (a, x): f'(\xi_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .  
Dále  $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+} f'(\xi_x) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$ .]

Pokud v zobecněné větě o střední hodnotě (7.6) položíme  $f(a) = g(a) = 0$  a uvažujeme  $b \rightarrow a$ , pak dostaneme následující pravidlo.

**Věta 7.8:** (l'Hospitalovo pravidlo)

Předpokládáme, že  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  (nebo  $\pm\infty$ ) a existuje limita (i nevlastní)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Tvrzení věty platí i pro  $x \rightarrow x_0 \pm$ ,  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Příklad 7.8:

1. Z existence limity  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1$  vyplývá  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ .

2. Pozor z neexistence limity  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  nevyplývá, že  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  neexistuje.

Limita  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \sin \frac{1}{x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$  neexistuje, přesto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

3. L'Hospitalovo pravidlo používáme na limity typu " $\frac{0}{0}$ " nebo " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Limitu  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ , která je typu " $0 \cdot \infty$ ", můžeme převést na typ  $\frac{0}{0}$ , tj.  $x \ln x = \frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$  nebo  $\frac{\infty}{\infty}$ , tj.  $x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ . Potom

$$\frac{(x)'}{(\frac{1}{\ln x})'} = \frac{1}{-\ln^{-2} x \frac{1}{x}} = \frac{x}{-\ln^{-2} x} \text{ nám sice nepomůže, ale}$$

$$\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -x \rightarrow 0. \text{ Tedy } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

**7.2 Vyšší derivace a Taylorova formule**

**Definice 7.5:** Nechť funkce  $f$  je diferencovatelná na  $U(x_0)$ . Jestliže existuje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0),$$

pak číslo  $f''(x_0)$  se nazývá **druhá derivace** funkce  $f$  v bodě  $x_0$ .

Tedy  $f''(x_0) = (f')'(x_0)$  a analogicky pro **n-tou derivaci** funkce  $f$  v bodě  $x_0$  platí

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0).$$

Říkáme, že funkce  $f$  je  $n$ -krát diferencovatelná v bodě  $x_0$ .

Funkce  $f^{(n)}: x \rightarrow f^{(n)}(x)$ ,  $x \in I$  se nazývá **n-tá derivace funkce  $f$**  na intervalu  $I$ .

Funkce  $d^n f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$  se nazývá **n-tý diferenciál funkce  $f$**  v bodě  $x_0$ .

Příklad 7.9: Spočítáme druhou derivaci a druhý diferenciál funkce  $f(x) = x^3$  v bodě  $x_0 = 1$ .

Platí  $(x^3)'' = (3x^2)' = 6x$ .

Tedy  $(x^3)''(1) = 6$  a  $d^2(x^3)(1, h) = 6h^2$ .

Formálně můžeme druhý diferenciál počítat jako první diferenciál z prvního diferenciálu funkce  $f$ .

Pro  $f(x) = x^3$  dostaneme  $d^2(x^3) = d(dx^3) = d(3x^2 \cdot h) = (d(3x^2)) \cdot h = (6xh)h = 6x \cdot h^2$ .

Nyní budeme předpokládat, že funkce  $f$  je dvakrát diferencovatelná na intervalu  $I$  a  $(a, b) \subset I$ .

Označíme-li  $R_1(x) = f(b) - f(x)$ , pak funkce  $R_1(x)$  udává chybu, které se dopustíme, když hodnotu funkce  $f(b)$  nahradíme hodnotou  $f(x)$ . Z Lagrangeovy věty (7.6) vyplývá, že  $\exists \xi \in (a, b)$  takové, že  $R_1(a) = f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$ . Odtud plyne  $f(b) = f(a) + f'(\xi) \cdot (b - a)$ .

V důkazu Lagrangeovy věty jsme zavedli funkci  $h_1(x) = (f(b) - f(a)) \frac{b-x}{b-a} - (f(b) - f(x))$ , jejíž hodnoty udávají vzdálenost bodu  $[x, f(x)]$  od bodu  $[x, f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)]$ , který leží na sečně spojující body  $[a, f(a)]$  a  $[b, f(b)]$ .

Nyní uvažujeme funkci  $R_2(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x)$ , která udává chybu při nahrazení funkce  $f$  tečnou ke grafu funkce  $f$  v bodě  $x$ :  $y = f(x) + f'(x)(b-x)$ .

Funkci  $R_2(x)$  popíšeme pomocí druhé derivace funkce  $f$ . Proto analogicky k funkci  $h_1$  zavedeme funkci

$$h_2(x) = (f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)) \frac{(b-x)^2}{(b-a)^2} - (f(b) - f(x) - f'(x)(b-x)).$$

Funkce  $h_2(x)$  splňuje předpoklady Rolleovy věty (7.5), tedy  $\exists \xi \in (a, b) : h_2'(\xi) = 0 \Rightarrow$

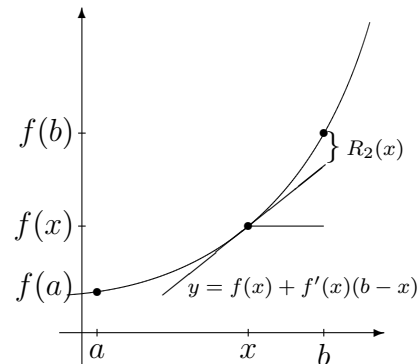
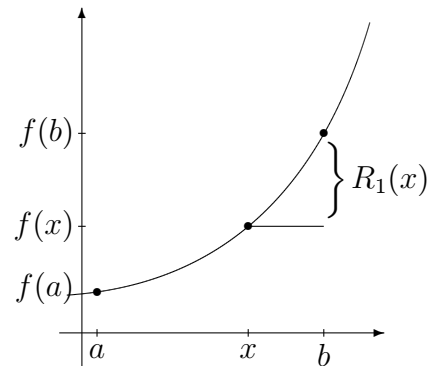
$$0 = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) \frac{-2(b-\xi)}{(b-a)^2} + f'(\xi) - f'(\xi)(b-\xi) - f'(\xi).$$

Odtud vyplývá  $R_2(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) = \frac{f''(\xi)}{2}(b-a)^2$

a

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(b-a)^2.$$

Uvedený postup zobecňuje následující věta.



Taylor (1685-1731).



**Věta 7.9:** (Taylorova věta)

Nechť funkce  $f$  má  $(n + 1)$  derivací na intervalu  $(a, b)$ , bod  $x_0 \in (a, b)$ . Potom  $\forall x \in (a, b)$  existuje  $\xi$  ležící mezi body  $x_0$  a  $x$  takové, že platí následující **Taylorová formule**

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Polynom

$$T_n(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se nazývá **Taylorův polynom**  $n$ -tého řádu funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$ . Výraz

$$R_{n+1}(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

se nazývá **zbytek** nebo **chyba Taylorova polynomu**.

Poznámka 7.5:

1. Zkráceně píšeme  $f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x, x_0)$ .

2. Pomocí diferenciálu píšeme

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0, h) + \frac{d^2 f(x_0, h)}{2!} + \dots \\ + \frac{d^{(n)} f(x_0, h)}{n!} + R_{n+1}(x, h).$$

3. Pro  $x_0 = 0$  hovoříme o **Maclaurinově formuli**.

Příklad 7.10: Najdeme Maclaurinovu formuli pro funkci  $\sin x$ . Platí

$$\sin x = \sin 0 + \cos 0(x-0) + \frac{-\sin 0}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n \\ + \frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} \Rightarrow \text{Taylorův polynom } T_{2n+1} \text{ funkce } \sin x \\ \text{v bodě } 0 \text{ má tvar } T_{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \text{a pro zbytek polynomu platí } R_{2n+2}(0, x) = \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

Poznámka 7.6: (Taylorův rozvoj funkce)

Funkce  $f(x) = \sin x$  má spojité derivace všech řádu (píšeme  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ). Tyto derivace jsou navíc omezené, tj.

$\exists K > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}: |f^{(n)}(x)| \leq K$ . Odtud plyne  $|R_{2n+2}(0, x)| \leq \frac{K|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n+2}(0, x) = 0$ .

Funkci  $\sin x$  tedy můžeme vyjádřit ve tvaru **Taylorovy řady**

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Podobně  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$  a  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$  (pro  $x = 1$

dostaneme  $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ).

Příklad 7.11: Pomocí Taylorovy formule lze aproximovat hodnoty funkcí s předem zvolenou přesností.

S přesností na tři desetinná místa spočítáme hodnotu  $\ln 1,1$ .

Najdeme Taylorův rozvoj funkce  $\ln x$  v bodě  $x_0 = 1$ . Pro  $n$ -tou derivaci platí  $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$ . Tedy

$$\ln x = \ln 1 + 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n + \frac{(-1)^n \xi^{-n-1}}{n+1}(x-1)^{n+1}.$$

Odhadneme chybu  $R_{n+1}(x, 1) = \frac{(-1)^n \xi^{-n-1}}{n+1}(x-1)^{n+1}$  pro  $x = 1$  a  $\xi \in (1; 1,1)$ .

Dostaneme  $|R_{n+1}(1,1; 1)| = \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)\xi^{n+1}}(1,1-1)^{n+1} \right| < \frac{(0,1)^{n+1}}{n+1}$ .

Pro  $n = 2$  je  $|R_{n+1}(1,1; 1)| < \frac{0,001}{3} < 0,001$ .

Tedy  $\ln 1,1 \doteq 0,1 - \frac{1}{2}(0,1)^2 = 0,095$ .

### 7.3 Průběh funkce

**Definice 7.6:** Řekneme, že funkce  $f$  **roste (klesá)** v bodě  $x_0$ , když existuje okolí  $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  takové, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0): f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)) \quad \wedge \\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta): f(x) > f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

V případě neostrých nerovností říkáme, že funkce  $f$  v bodě  $x_0$  **neklesá (neroste)**.

**Cvičení 7.4:** Dokažte, že funkce  $f$  roste na intervalu  $I$  právě tehdy, když funkce  $f$  roste v každém bodě intervalu  $I$ .

[” $\Rightarrow$ ” Podle definice (6.2) funkce  $f$  roste na  $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \forall x \in (x_0 - \delta, x_0): f(x) < f(x_0) \wedge \forall x \in (x_0, x_0 + \delta): f(x_0) < f(x) \Rightarrow f$  roste v  $x_0$ .

” $\Leftarrow$ ” Pro spor předpokládáme, že  $\exists a_1 < b_1 \in I \wedge f(a_1) > f(b_1)$ . Označíme  $\bar{x} = \frac{a_1 + b_1}{2}$ . Jestliže  $f(\bar{x}) \geq f(a_1)$ , pak položíme  $a_2 = \bar{x}, b_2 = b_1$  jinak  $a_2 = a_1, b_2 = \bar{x}$  atd. Pro posloupnosti  $a_n, b_n$  platí  $b_n - a_n \rightarrow 0+$ ,  $f(a_n) > f(b_n)$  a protože jsou omezené a motónní, tak podle věty (4.4)  $\exists c \in I: a_n \rightarrow c-, b_n \rightarrow c+$ . Podle předpokladu funkce  $f$  roste v bodě  $c$ , tedy  $\exists n_0 \forall n > n_0: f(a_n) < f(c) < f(b_n)$  což je spor s vlastností  $f(a_n) > f(b_n)$ .]

**Věta 7.10:** Jestliže  $f'(x_0) > 0$  ( $f'(x_0) < 0$ ), pak funkce  $f$  v bodě  $x_0$  roste (klesá).

*Důkaz:* Nechť  $f'(x_0) > 0$ .

Z definice derivace plyne  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f): 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \Rightarrow$  (volbou  $\varepsilon$ )  $0 < f'(x_0) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow$  pro  $x > x_0$  je  $f(x) > f(x_0)$ , pro  $x < x_0$  je  $f(x) < f(x_0) \Rightarrow$  funkce  $f$  roste v bodě  $x_0$ .

*Příklad 7.12:* Funkce  $f(x) = x^2$  má derivaci  $f'(x) = 2x$ , tedy  $f'(x) < 0$  pro  $x < 0$  a  $f'(x) > 0$  pro  $x > 0$ . Z věty (7.10) vyplývá, že funkce  $f(x) = x^2$  klesá na intervalu  $(-\infty, 0)$  a roste na intervalu  $(0, \infty)$ .

**Věta 7.11:** (postačující podmínky existence lokálního extrému)

- i) Nechť  $f \in C(U(x_0))$ ,  $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  a zároveň funkce  $f$  roste (klesá) na  $(x_0 - \delta, x_0)$ , klesá (roste) na  $(x_0, x_0 + \delta)$ , pak bod  $x_0$  je bodem lokálního maxima (minima) funkce  $f$ .
- ii) Nechť funkce  $f$  je diferencovatelná na  $P(x_0)$  a spojitá v bodě  $x_0$ . Nechť  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0): f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) a  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta): f'(x) < 0$  ( $f'(x) > 0$ ), pak bod  $x_0$  je bodem lokálního maxima (minima) funkce  $f$ .

Příklad 7.13: Funkce  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  je sudá, spojitá, klesající na intervalu  $(-\infty, 0)$  a rostoucí na  $(0, \infty)$ . Derivace  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$  je záporná na  $(-\infty, 0)$  a kladná na  $(0, \infty)$ . V bodě  $x_0 = 0$  nabývá funkce  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  svého minima, i když derivace v tomto bodě neexistuje.

### Cvičení 7.5:

1. Najděte nejrychlejší cestu ke zraněnému v lese, když po silnici běžíme rychlosti 5km/h, v lese 4km/h. Vzdálenost zraněného od silnice je 9km (tj. od paty  $P$  kolmice spuštěné z místa zranění na silnici) a vzdálenost místa výběhu a bodu  $P$  je 15km.

[Nejdříve běžíme po silnici a ve vzdálenosti  $x$  km od bodu  $P$  odbočíme do lesa. Čas  $t$  potřebný k doběhnutí ke zraněnému je dán funkcí  $t(x) = \frac{15-x}{5} + \frac{\sqrt{x^2+9}}{4}$ , kde  $x \in \langle 0, 15 \rangle$ . Pro derivaci této funkce platí  $t'(x) = \frac{-1}{5} + \frac{x}{4\sqrt{x^2+9}}$ . Vyřešíme nerovnost  $\frac{-1}{5} + \frac{x}{4\sqrt{x^2+9}} < 0 \Leftrightarrow 5x > 4\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow 25x^2 > 16x^2 + 16 \cdot 9 \Leftrightarrow x > 4$ . Tedy funkce  $t(x)$  roste pro  $x \in \langle 0, 4 \rangle$  a klesá pro  $x \in (4, 15)$ . V bodě  $x = 4$  nabývá svého minima. ]

2. Z kartónu tvaru obdélníka vyrobte krabici bez víka tak, aby měla maximální objem.

[V každém rohu obdélníka o rozměrech  $a \times b$  vyřízneme čtverec o straně  $x$ . Objem takto vzniklé krabice je popsán funkcí  $f(x) = (a - 2x)(b - 2x)x$ , kde  $x \in (0, \min\{a, b\})$ .

Spočítáme derivaci funkce  $f$ . Platí  $f'(x) = (abx - 2(a+b)x^2 - 4x^3)' = 12x^2 - 4(a+b)x + ab = 12(x - \frac{1}{6}(a+b - \sqrt{a^2 - ab + b^2})) (x - \frac{1}{6}(a+b + \sqrt{a^2 - ab + b^2})) \Rightarrow$  funkce  $f$  nabývá maxima pro  $x = \frac{1}{6}(a+b - \sqrt{a^2 - ab + b^2})$ . ]

3. Navrhněte plechovku o objemu 1 litr tak, aby měla co nejmenší povrch.

[Nechť  $r$  je poloměr kruhové podstavy válce a  $v$  je jeho výška. Potom pro objem  $V$  válce platí  $V = \pi r^2 v$  a pro povrch  $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$ . Z předpokladu, že objem plechovky je 1 litr dostaneme  $v = \frac{1}{\pi r^2}$  a její povrch vyjádříme jako funkci proměnné  $r$ .  $S(r) = 2\pi r \left( r + \frac{1}{\pi r^2} \right)$ . Pro derivaci platí  $S'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2}$ . Minimum funkce  $f$  je v bodě  $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ . Odtud  $v = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}$  a  $v = 2r$ . Optimální jsou plechovky, které mají průměr podstavy shodný s výškou. ]

**Definice 7.7:** Nechť  $f: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  a existuje  $f'(x_0)$ . Řekneme, že funkce  $f$  je **(ostře) konkávní** v bodě  $x_0$ , jestliže  $\exists P(x_0)$  takové, že

$$\forall x \in P(x_0): f(x)(>) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Řekneme, že funkce  $f$  je **(ostře) konvexní** v bodě  $x_0$ , jestliže  $\exists P(x_0)$  takové, že

$$\forall x \in P(x_0): f(x)(<) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Diferencovatelná funkce  $f$  je **(ostře) konkávní (konvexní) na intervalu**  $I \subset D(f)$ , jestliže  $f$  je (ostře) konkávní (konvexní) v každém bodě  $x \in I$ .

Bod  $x_0$  se nazývá **inflexní bod** funkce  $f$ , jestliže existuje okolí  $P(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  takové, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0): f(x) < (>)f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta): f(x) > (<)f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Poznámka 7.7: Graf ostře konvexní (konkávní) funkce  $f$  leží v prstencovém okolí bodu  $P(x_0)$  nad (pod) tečnou v bodě  $x_0$ . V inflexním bodě přechází graf funkce  $f$  z jedné strany tečny na druhou.

Pokud funkce  $f$  nemá derivaci v bodě  $x_0$ , pak v tomto bodě nedefinujeme konvexitu (konkávitu) funkce  $f$ .

Příklad 7.14: Zjistíme, pro která  $x$  je funkce  $f(x) = x^2$  ostře konvexní.

Platí  $f'(x_0) = 2x_0$  a ověřujeme nerovnost  $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

Tedy  $x^2 > x_0^2 + 2x_0(x - x_0) \Leftrightarrow x^2 > 2xx_0 - x_0^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xx_0 + x_0^2 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - x_0)^2 > 0$ . Tato nerovnost platí pro každé  $x \neq x_0$ .

Funkce  $f(x) = x^2$  je tedy ostře konvexní na  $\mathbb{R}$ . (Porovnejte s příkladem (6.3)).

Cvičení 7.6: Nechť funkce  $f$  je konvexní na intervalu  $I$  (podle definice (6.3)) a diferencovatelná na  $I$ , pak  $f$  je konvexní v každém bodě intervalu  $I$  (podle definice (7.7)).



[ Z konvexity podle definice (6.3) plyne  
 $\forall x_1, x_2 \in I \forall t \in \langle 0, 1 \rangle: f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \Leftrightarrow$   
 $f(x_1 + (1-t)(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + (1-t)(f(x_2) - f(x_1)) \Rightarrow$   
 $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{f(x_1 + (1-t)(x_2 - x_1)) - f(x_1)}{(1-t)(x_2 - x_1)}(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \Leftrightarrow f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq$   
 $f(x_2) - f(x_1) \Rightarrow$  funkce  $f$  je konvexní i podle definice (7.7).]

**Věta 7.12:** Necht' funkce  $f$  je dvakrát diferencovatelná na intervalu  $I$ .

- i) Jestliže  $f''(x_0) > 0$  ( $f''(x_0) < 0$ ),  $x_0 \in I$ , pak funkce  $f$  je ostře konvexní (ostře konkávní) v bodě  $x_0$ .
- ii) Funkce  $f$  je konvexní (konkávní) na  $I$  právě tehdy, když  $\forall x \in I: f''(x) \geq 0$  ( $f''(x) \leq 0$ ).
- iii) Jestliže bod  $x_0 \in I$  je inflexní bod funkce  $f$ , pak  $f''(x_0) = 0$ .

Důkaz: i) Necht'  $f''(x_0) > 0$ , pak podle věty (7.10) derivace  $f'$  v bodě  $x_0$  roste.

Volíme  $x > x_0$  (pro  $x < x_0$  je důkaz podobný) a chceme dokázat, že  $f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$ .

Z věty o střední hodnotě (7.7) vyplývá, že  $\exists \xi \in (x_0, x): f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$ . Tedy dokazujeme nerovnost  $f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow f'(\xi) > f'(x_0)$ , což plyne z růstu derivace  $f'$  v bodě  $x_0$ .

ii) Obměnou bodu i) dostaneme tvrzení: Jestliže funkce  $f$  je konkávní v bodě  $x_0 \in I$ , pak  $f''(x_0) \leq 0$ . Podobně jestliže funkce  $f$  je konvexní v bodě  $x_0$ , pak  $f''(x_0) \geq 0$ . Stačí tedy dokázat obrácenou implikaci.

K důkazu použijeme Taylorovu větu (7.9). Z ní vyplývá, že  $\exists P(x_0) \forall x \in P(x_0) \exists \xi \in (x_0, x)$  (popř.  $(x, x_0)$ ):

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$ . Z předpokladu  $f''(\xi) \geq 0$  dostaneme  $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , tedy funkce  $f$  je konvexní v bodě  $x_0 \in I$ .

iii) Poslední tvrzení dokážeme sporem.

Necht'  $f''(x_0) \neq 0$ , pak podle bodu i) je funkce  $f$  v bodě  $x_0$  ostře konvexní nebo konkávní, tedy

$\exists P(x_0) \forall x \in P(x_0): f(x) > (<) f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , což je spor s předpokladem, že  $x_0$  je **inflexní bod** funkce  $f$ .

Příklad 7.15:

- i) Pokud je funkce  $f$  ostře konvexní v bodě  $x_0$ , pak nemusí  $f''(x_0) > 0$ .
- ii) Pokud  $f''(x_0) = 0$ , pak v bodě  $x_0$  nemusí být inflexní bod.

Pro funkci  $f(x) = x^6$  je  $f''(x)|_0 = 30x^4|_0 = 0$ , přesto je tato funkce v bodě 0 ostře konvexní a nemá zde inflexní bod.

**Definice 7.8:** Jestliže alespoň jedna z limit  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$  je nevlastní ( $\pm\infty$ ), pak říkáme, že přímka  $x = x_0$  je **asymptotou ve vlastním bodě** ke grafu funkce  $f$ .

Jestliže existují limity  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = q$ , pak říkáme, že přímka  $y = kx + q$  je **asymptotou v nevlastním bodě** ke grafu funkce  $f$ . (Podobně definujeme asymptotu pro  $x \rightarrow -\infty$ .)

Příklad 7.16: Vyšetříme průběh funkce  $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x}$ .

Funkce  $f$  má **definiční obor**  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , je spojitá na  $D(f)$  a je lichá. Stačí tedy, když ji budeme vyšetřovat pro  $x \in (0, \infty)$ .

Protože ve funkci  $f$  se vyskytuje absolutní hodnota, rozdělíme úlohu na dva případy.

a) Pro  $x \in (0, 1)$  je  $f(x) = \frac{-x^2+1}{x} = -x + \frac{1}{x}$ . Potom  $f'(x) = -1 - \frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow$  funkce  $f$  klesá na  $(0, 1)$ . Dále  $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0 \Rightarrow$  funkce  $f$  je ostře konvexní na  $(0, 1)$ .

b) Pro  $x \in (1, \infty)$  je  $f(x) = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x}$ . Potom  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow$  funkce  $f$  roste na  $(1, \infty)$ . Dále  $f''(x) = \frac{-2}{x^3} < 0 \Rightarrow$  funkce  $f$  je ostře konkávní na  $(1, \infty)$ .

Tedy v bodě  $x = 1$  má funkce  $f$  ostré lokální minimum. Pozor v bodě  $x = 1$  nemá funkce  $f$  inflexní bod, i když zde přechází z konvexity do konkávnosti. Podle cvičení (7.3) je  $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} -1 - \frac{1}{x^2} = -2$  a  $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} 1 + \frac{1}{x^2} = 2$ . V bodě  $x = 1$  není tedy funkce  $f$  diferencovatelná.

Funkce  $f$  je spojitá, proto nemá asymptoty ve vlastních bodech. Najdeme asymptoty v nevlastních bodech. Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-1}{x} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-1-x^2}{x} = 0.$$

Přímka  $y = x$  je asymptotou dané funkce v  $\pm\infty$ .

**Cvičení 7.7:** Nechť funkce  $f$  je dvakrát diferencovatelná na okolí  $U(x_0)$  a derivace  $f'$  má v bodě  $x_0$  ostrý extrém, pak bod  $x_0$  je bodem inflexe funkce  $f$ .

[Položíme  $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ , pak  $g(x_0) = 0$ ,  $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$  a  $g'(x_0) = 0$ . Nechť má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  maximum (pro minimum je důkaz obdobný), pak existuje okolí  $U_\delta(x_0) \subset U(x_0)$  takové, že  $\forall x \in U_\delta(x_0): f'(x) - f'(x_0) < 0$ , tedy  $g'(x) < 0$  a funkce  $g$  klesá na  $U_\delta(x_0)$ . Odtud plyne  $f(x) > f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$  pro  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  a  $f(x) < f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$  pro  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ . Tedy  $x_0$  je inflexní bod funkce  $f$ .]

**Věta 7.13:** Nechť funkce  $f \in C^{(n)}(U(x_0))$  (spojitě diferencovatelná až do řádu  $n$  na okolí  $U(x_0)$ ) a platí

$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

- i) Jestliže  $n$  je sudé a  $f^{(n)}(x_0) > 0$  ( $f^{(n)}(x_0) < 0$ ), potom je funkce  $f$  v bodě  $x_0$  ostře konvexní (konkávní).
- ii) Jestliže  $n$  je liché, potom  $x_0$  je inflexní bod funkce  $f$ .

Nechť navíc  $f'(x_0) = 0$ , pak

- i) Jestliže  $n$  je sudé a  $f^{(n)}(x_0) > 0$  ( $f^{(n)}(x_0) < 0$ ), potom v bodě  $x_0$  je ostré lokální minimum (maximum) funkce  $f$ .
- ii) Jestliže  $n$  je liché a  $f^{(n)}(x_0) > 0$  ( $f^{(n)}(x_0) < 0$ ), potom bod  $x_0$  je bodem poklesu (růstu) funkce  $f$ .

**Důkaz:** i) Použijeme Taylorův rozvoj funkce  $f$  v bodě  $x_0$   
 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$ . Podle předpokladů tedy platí  $f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$ . Ze spojitosti  $n$ -té derivace funkce  $f$  a předpokladu  $f^{(n)}(x_0) > 0$  plyne, že existuje okolí  $U(x_0)$  takové, že  $\forall x \in U(x_0): f^{(n)}(x) > 0$ . Pro  $n$  sudé je tedy  $f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) > 0$  a funkce  $f$  je ostře konvexní.

Podobně lze dokázat i ostatní tvrzení věty.

Příklad 7.17: Uvažujeme funkci  $f(x) = x^4$ , potom  $f'(0) = 4x^3|_0 = 0$ ,  $f''(0) = 12x^2|_0 = 0$ ,  $f'''(0) = 24x|_0 = 0$  a  $f^{(4)}(0) = 24$ . Funkce  $f(x) = x^4$  je tedy v bodě  $x_0 = 0$  ryze konvexní a nabývá zde svého minima.

Cvičení 7.8: Příklad funkce se všemi derivacemi rovnými

$$\text{nule v bodě extrému } f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$[f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}} - 0}{x - 0} = (y = \frac{1}{x}) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0, \quad f'(x) = 2x^{-3}e^{\frac{-1}{x^2}} \Rightarrow f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{2x^{-3}e^{\frac{-1}{x^2}} - 0}{x - 0} = (y = \frac{1}{x}) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{2y^4}{e^{y^2}} = 0 \text{ atd.}]$$

Příklady na průběh funkce lze nalézt na adrese <http://trial.kma.zcu.cz/Tdb/main.php?T0=2&T1=0&T2=0&T3=0&T0b=2&C=./8/>

## 8 Integrály

### 8.1 Neurčité integrály

Už víme, že derivace  $s'(t)$  funkce  $s(t)$  popisující ujetou vzdálenost auta v závislosti na čase  $t$  udává jeho rychlost  $v(t)$ . V této kapitole budeme řešit opačný problém. K dané rychlosti budeme hledat ujetou vzdálenost.

**Definice 8.1:** Funkce  $F$  se nazývá **primitivní funkce** k funkci  $f$  na množině  $M$ , jestliže  $\forall x \in M: F'(x) = f(x)$ .

Nechť  $G, F$  jsou primitivní funkce k funkci  $f$ , pak  $(G - F)' = f - f = 0$ . Z důsledku (7.1) věty (7.7) vyplývá, že existuje konstanta  $C \in \mathbb{R}$  taková, že  $G - F = C$ , tedy  $G = F + C$ .

**Definice 8.2:** Množina všech primitivních funkcí k funkci  $f$  se nazývá **neurčitý integrál** funkce  $f$  a značí se

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Konstanta  $C$  se nazývá integrační konstanta.

Příklad 8.1:

1. Funkce  $s(t)$  popisující dráhu auta je primitivní funkcí k funkci  $v(t)$  popisující rychlost auta.
2. Funkce  $x^3 + 2$ ,  $x^3 - 23$  jsou primitivní k funkci  $3x^2$  na  $\mathbb{R}$  a pro neurčitý integrál k funkci  $3x^2$  platí  $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Úloha najít primitivní funkci je obrácená k úloze nalézt derivaci dané funkce. Z linearitativy operace derivování (věta (7.3) i)) plyne i linearita neurčitého integrálu.

**Věta 8.1:** Nechť funkce  $f, g$  mají primitivní funkce na intervalu  $I$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , potom platí

$$\int [\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx \pm \beta \int g(x) dx.$$

Příklad 8.2:  $\int 3e^x - 2 \sin x dx = 3 \int e^x dx - 2 \int \sin x dx = 3e^x + 2 \cos x + C$ .

Ze znalosti derivací základních funkcí lze odvodit následující primitivní funkce.

Základní primitivní funkce	
$\int e^x dx = e^x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$x \in (0, \infty)$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\alpha \neq -1, x \in (0, \infty)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cosh x dx = \sinh x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \sinh x dx = \cosh x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \operatorname{tgh} x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\operatorname{cotgh} x + C$	$x \neq 0$
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{argsinh} x + C = \ln  x + \sqrt{1+x^2}  + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{argcosh}  x  + C = \ln  x + \sqrt{x^2-1}  + C$	$ x  \in (1, \infty)$
$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{argtgh} x + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{argcotgh} x + C$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Cvičení 8.1:

(Darbouxovská vlastnost integrovatelných funkcí)

Dokažte následující tvrzení. Nechť k funkci  $f$  existuje primitivní funkce  $F$  na intervalu  $I$  a  $\langle x_1, x_2 \rangle \subset I$ . Nechť  $f(x_1) < 0$ ,  $f(x_2) > 0$ , potom  $\exists x_0 \in (x_1, x_2) : f(x_0) = 0$ .

[Funkce  $F$  je derivovatelná na  $I$  a  $\langle x_1, x_2 \rangle \subset I$ , tedy podle věty (7.1) je funkce  $F$  spojitá na uzavřeném intervalu  $\langle x_1, x_2 \rangle$ . Z předpokladů  $F'(x_1) = f(x_1) < 0$ ,  $F'(x_2) = f(x_2) > 0$  vyplývá, že funkce  $F$  není na intervalu  $\langle x_1, x_2 \rangle$  monotónní, tudíž existuje bod  $x_0 \in (x_1, x_2)$  takový, že funkce  $F$  nabývá extrému v bodě  $x_0 \in (x_1, x_2)$ . Z nutné podmínky extrému (Fermatova věta (7.5)) plyne  $F'(x_0) = f(x_0) = 0$ .]

Obecně pro  $y_0 \in (f(x_1), f(x_2))$  (popř.  $y_0 \in (f(x_2), f(x_1))$ ) lze pomocí substituce  $g(x) = f(x) - y_0$  snadno dokázat, že  $\exists x_0 \in (x_1, x_2) : f(x_0) = y_0$ . Odtud vyplývá následující tvrzení.

Jestliže k funkci  $f$  existuje primitivní funkce, pak funkce  $f$  nabývá všech mezihodnot mezi hodnotami  $(f(x_1), f(x_2))$ .

Z věty (6.6 iii)) už víme, že také každá spojitá funkce nabývá všech mezihodnot. Integrovatelná funkce však nemusí být spojitá!

Např. funkce  $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  je primitivní funkce k funkci  $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , která není spojitá v bodě  $x_0 = 0$ .

Ze vztahu pro derivaci součinu dvou funkcí (věta (7.3) ii)) plyne následující věta.

**Věta 8.2:** (integrace per partes)

Nechť funkce  $u, v$  jsou derivovatelné na intervalu  $I$  a existuje primitivní funkce k součinu  $u \cdot v'$  na  $I$ , pak na  $I$  platí

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx.$$

Důkaz: Z věty (7.3 ii) dostaneme  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Rightarrow u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$  a podle předpokladu existuje primitivní funkce k pravé straně uvedené rovnosti. Tedy existuje i integrál  $\int u'(x) \cdot v(x) dx$  a platí  $\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$ .

Příklad 8.3:

1) Vypočtěte integrál  $\int x \cos x \, dx$ .

$$\int x \cos x \, dx = \left[ \begin{array}{ll} u' = \cos x & v = x \\ u = \sin x & v' = 1 \end{array} \right] = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Podobně počítáme integrály funkcí  $x^n \cos kx$ ,  $x^n \sin kx$ ,  $x^n e^{kx}$ ,  $k, n \in \mathbb{N}$ .

2) Vypočtěte integrál  $\int \log_a x \, dx$ .

$$\int \log_a x \, dx = \left[ \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \log_a x \\ u = x & v' = \frac{1}{x \ln a} \end{array} \right] = x \log_a x - \int \frac{x}{x \ln a} \, dx = x \log_a x - \frac{x}{x \ln a} + C.$$

Podobně počítáme integrály funkcí  $\arcsin ax$ ,  $\arccos ax$ ,  $\operatorname{arctg} ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$  ap.

3) Vypočtěte integrál  $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$ .

Obecně označíme  $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$  a pomocí metody "per partes" dostaneme

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx = \left[ \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \frac{1}{(1+x^2)^n} \\ u = x & v' = \frac{-n \cdot 2x}{(1+x^2)^{n+1}} \end{array} \right] = \frac{x}{(1+x^2)^n} - \\ &\int \frac{x(-n \cdot 2x)}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + \\ &2n \left( \int \frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \right) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}). \end{aligned}$$

Odtud vyplývá  $I_{n+1} = \frac{1}{2n} \left( \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n \right)$ .

Nyní vypočítáme  $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx = (n=1)$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{x}{(1+x^2)^1} + (2-1) \int \frac{1}{1+x^2} \, dx \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right) + C.$$

**Věta 8.3:** (integrace substitucí)

Nechť  $f: D(f) \rightarrow H(f)$ ,  $g: D(g) \rightarrow H(g)$  a  $H(f) \subset D(g)$ . Jestliže funkce  $f$  je derivovatelná na  $D(f)$  a existuje primitivní funkce  $G$  k funkci  $g$  na  $D(g)$ , potom na  $D(f)$  platí

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) \, dx = \int g(y) \, dy = G(f(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$



*Důkaz:* Funkce  $G(f(x))$  splňuje předpoklady věty (7.4) o derivaci složené funkce. Odtud vyplývá  $(G(f(x)))' = g(f(x)) \cdot f'(x)$  a funkce  $G(f(x))$  je primitivní funkcí k funkci  $g(f(x)) \cdot f'(x)$  na  $D(f)$ .

*Příklad 8.4:* Větu 8.3 je vhodné použít v příkladech, kdy se v integrálu vyskytuje funkce  $f$  a její diferenciál  $f' dx$ , pak provedeme substituci za funkci  $f$ .

$$\int \cotg x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \left( \begin{array}{l} y = \sin x \\ dy = \cos x \, dx \end{array} \right) = \int \frac{1}{y} \, dx = \ln |y| + C = \ln |\sin x| + C.$$

Obráceně je někdy výhodné proměnnou  $x$  nahradit funkcí  $x(t)$ . V tomto případě však musíme mít zaručenou existenci inverzní funkce  $x^{-1}(t)$ .

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \left( \begin{array}{ll} x = \cos t & t \in (0, \pi) \\ dx = -\sin t \, dt & t = \arccos x \end{array} \right) = \int \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 t}} (-\sin t) \, dt = \int -\frac{\sin t}{|\sin t|} \, dt = \left( \begin{array}{l} \text{pro } t \in (0, \pi) \\ \text{je } \sin t > 0 \end{array} \right) = \int -1 \, dt = -t + C = -\arccos x + C.$$

## Integrály typu $\int \mathbf{R}(x) \, dx$

Nejdříve budeme integrovat základní racionální funkce typu

$$1. \int \frac{A}{x-x_1} \, dx, \quad \text{kde } A, x_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{-3}{x-4} \, dx = \left( \begin{array}{l} u = x - 4 \\ du = dx \end{array} \right) = -3 \int \frac{1}{u} \, du = -3 \ln |x - 4| + C.$$

$$2. \int \frac{A}{(x-x_1)^k} \, dx, \quad \text{kde } A, x_1 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \setminus 1.$$

$$\int \frac{2}{(1-x)^3} \, dx = \left( \begin{array}{l} u = 1 - x \\ du = -dx \end{array} \right) = 2 \int \frac{1}{u^3} (-du) = -2 \frac{u^{-2}}{-2} = \frac{1}{(1-x)^2} + C.$$

$$3. \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \, dx, \quad \text{kde } A, B, p, q \in \mathbb{R} \text{ a jmenovatel zlomku má komplexní kořeny.}$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2} \, dx = \int \frac{2x+2-1}{x^2+2x+2} \, dx = \left( \begin{array}{l} u = x^2 + 2x + 2 \\ du = (2x + 2) \, dx \end{array} \right) =$$

$$\int \frac{1}{u} \, du - \int \frac{1}{(x+1)^2+1} \, dx = \left( \begin{array}{l} v = x + 1 \\ dv = dx \end{array} \right) = \ln |u| + C - \int \frac{1}{v^2+1} = \ln |x^2 + 2x + 2| + \operatorname{arctg}(x + 1) + C.$$

4.  $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx$ , kde  $A, B, p, q \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus 1$  a jmenovatel zlomku má komplexní kořeny.

$$\int \frac{6x-3}{(x^2+4)^2} dx = 3 \int \frac{2x-1}{(x^2+4)^2} dx = \left( \begin{array}{l} u = x^2 + 4 \\ du = 2x dx \end{array} \right) =$$

$$3 \int \frac{1}{u^2} du - 3 \int \frac{1}{16\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)^2} dx = \left( \begin{array}{l} v = \frac{x}{2} \\ 2dv = dx \end{array} \right) =$$

$$3 \frac{u^{-1}}{-1} + C - \frac{3}{8} \int \frac{1}{(v^2+1)^2} dv = (\text{viz příklad (8.1) 3}) = -3 \frac{1}{x^2+4} - \frac{3}{8} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{v}{v^2+1} + \operatorname{arctg} v \right) \right) + C = \frac{-3}{x^2+4} - \frac{3}{16} \left( \frac{2x}{x^2+4} + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

### Rozklad na parciální zlomky

Z algebry víme, že polynom  $Q(x)$  lze rozložit na součin polynomů nejvýše druhého stupně. Tedy

$$Q(x) = \prod_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} (x-x_i)^{k_i} (x^2+p_jx+q_j)^{r_j}, \quad k_i, r_j \in \mathbb{N}, p_j, q_j \in \mathbb{R}.$$

Racionální lomenou funkci  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , kde  $P(x)$ ,  $Q(x)$  jsou polynomy a stupeň  $P(x) <$  stupeň  $Q(x)$  rozložíme na součet základních racionálních funkcí:

$$R(x) = \sum_{i=1}^n \frac{A_{1i}}{x-x_i} + \frac{A_{2i}}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{A_{k_i}}{(x-x_i)^{k_i}} + \sum_{j=1}^m \frac{B_{1j}x+C_{1j}}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{B_{2j}x+C_{2j}}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \dots + \frac{B_{r_j}x+C_{r_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{r_j}}$$

a jednotlivé zlomky integrujeme zvlášť.

Příklad:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} dx &= \int \frac{2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)} dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} dx \\ &= \int \frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} dx = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{x^2+1} dx = \\ &= -\ln|x-1| - 2(x-1)^{-1} + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Konstanty  $A, B, C, D$  vypočítáme z rovnosti

$$2x+2 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2.$$

Pro  $x=1$  je  $4 = B \cdot 2 \Rightarrow B = 2$ .

Pro  $x=i$  je  $2i+2 = (Ci+D)(i-1)^2 \Rightarrow 2i+2 = -2C+2iD \Rightarrow C = -1, D = 1$ .

Pro  $x=0$  je  $2 = A(-1) + 2 + 1 \Rightarrow A = 1$ .

**Integrály typu**  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  Řešíme přechodem k racionálním lomeným funkcím pomocí následujících substitucí.

1. Pokud  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , pak  $t = \cos x$ .

Pokud  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , pak  $t = \cos x$ .

$$\int \sin x \cos^2 x dx = \left( \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right) = \int -t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \left( \begin{array}{l} t = \sin x \quad t \in \langle -1, 1 \rangle \\ dt = \cos x dx \end{array} \right) = \int \frac{1}{\cos x \cos x} \frac{dt}{\cos x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \operatorname{arctgh} t + C = \operatorname{arctgh}(\sin x) + C.$$

2. Pokud  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ , pak  $t = \operatorname{tg} x$ .

Potom

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 1} dx = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + 1} dt = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2+1+t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{(\sqrt{2}t)^2 + 1} dt = \left( \begin{array}{l} u = \sqrt{2}t \\ du = \sqrt{2} dt \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$$

V některých speciálních případech je vhodné použít základní vztahy pro goniometrické funkce.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \cotg^2 x dx = \left( \begin{array}{l} u = \cotg x \\ du = -\frac{1}{\sin^2 x} dx \end{array} \right) = \cotg x + \int u^2 du = \cotg x + \frac{\cotg^3 x}{3} + C.$$

Metoda snižování řádu.

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int 1 + \cos 2x dx = \left( \begin{array}{l} u = 2x \\ du = 2 dx \end{array} \right) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{2} \int \cos u du \right) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

3. V obecném případě používáme univerzální substituci

$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  ( $x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ ). Potom

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{1}{2+\sin x} dx = \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}} dx = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \left( \begin{array}{l} u = t + \frac{1}{2} \\ du = dt \end{array} \right) = \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{du}{\frac{3}{4}((\frac{2}{\sqrt{3}}u)^2+1)} = \left( \begin{array}{l} v = \frac{2}{\sqrt{3}}u \\ dv = \frac{2}{\sqrt{3}} du \end{array} \right) = \frac{4}{3} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} dv}{v^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} v + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) + C.$$

Základní vztahy pro goniometrické funkce  
 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$   
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$   
 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$   
 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$   
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ .

$t = \operatorname{tg} x \Rightarrow t^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$   
 $\Rightarrow t^2 \cos^2 x = 1 - \cos^2 x$   
 $\Rightarrow \cos^2 x (t^2 + 1) = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ .

**Integrály typu** Pro  $m, n \in \mathbb{Z}$  platí:

$$\begin{aligned}\int \cos mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \, dx, \\ \int \sin mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] \, dx, \\ \int \sin mx \sin nx \, dx &= \frac{1}{2} \int [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \, dx, \\ \int \cos 2x \cos 3x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos 5x + \cos(-x)] \, dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} \sin 5x + \sin x \right),\end{aligned}$$

**Integrály typu**  $\int R(\sqrt{1-x^2}) \, dx$  Počítáme pomocí substitucí  $x = \sin t$  nebo  $x = \cos t$ .

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} \, dx &= \left( \begin{array}{l} x = \sin t \quad t \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ dx = \cos t \, dt \quad t = \arcsin x \end{array} \right) = \\ \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt &= \int |\cos t| \cos t \, dt = \left( \begin{array}{l} \text{pro } t \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{je } \cos t > 0 \end{array} \right) = \\ \int \cos^2 t \, dt &= (\text{viz metoda snižování řádu}) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \\ \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin 2(\arcsin x) + C.\end{aligned}$$

**Integrály typu**  $\int R(\sqrt{1+x^2}) \, dx, \int R(\sqrt{x^2-1}) \, dx$  Počítáme pomocí substitucí  $x = \sinh t$  nebo  $x = \cosh t$  a vzorců

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1, \quad \cosh^2 t + \sinh^2 t = \cosh 2t, \quad \sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t, \quad 2 \cosh^2 t = \cosh 2t + 1, \quad 2 \sinh^2 t = \cosh 2t - 1.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx &= \left( \begin{array}{l} x = \sinh t \quad t \in \mathbb{R} \\ dx = \cosh t \, dt \quad t = \operatorname{argsinh} x \end{array} \right) = \\ \int \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 t+1}} \cosh t \, dt &= \int \frac{1}{|\cosh t|} \cosh t \, dt = \int 1 \, dt = \operatorname{argsinh} x + C.\end{aligned}$$

## 8.2 Určité integrály

*Příklad 8.5:* Pro jednoduchost si nyní představíme, že rychlost našeho auta je konstantní  $v(t) = c, c \in \mathbb{R}$ . Ujetá dráha auta  $s(t)$  v čase  $t$  od počátku měření v čase  $t_0$  je pak dána vztahem  $s(t) - s(t_0) = c \cdot (t - t_0)$ . Hodnota rozdílu  $s(t) - s(t_0)$  se zároveň rovná "ploše pod grafem funkce"  $v(t)$  na intervalu  $\langle t_0, t \rangle$ .

Připomeňme, že funkce  $s(t)$  je primitivní k funkci  $v(t)$ . Později ukážeme, že i v obecnějším případě lze primitivní funkci využít k výpočtu plochy pod grafem funkce.

**Definice 8.3:** Nechť k funkci  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  existuje primitivní funkce  $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  (v krajních bodech uvažujeme jednostranné derivace). Pak rozdíl  $F(b) - F(a)$  nazýváme **Newtonovým určitým integrálem** funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a píšeme

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Uvedený vztah se nazývá Newtonova-Leibnizova formule a také píšeme  $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b f$ .

Číslo  $a$  se nazývá **dolní mez**, číslo  $b$  se nazývá **horní mez** Newtonova integrálu.

Množinu všech funkcí, které mají Newtonův integrál na intervalu  $\langle a, b \rangle$  značíme  $\mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$ .

**Věta 8.4:** (vlastnosti Newtonova integrálu)

1) Newtonův integrál nezávisí na volbě primitivní funkce.

2) Nechť  $f \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$ ,  $c \in \langle a, b \rangle$ , pak platí

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad \int_a^a f(x) dx = 0,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

3) Nechť  $f, g \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , pak platí

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

(Tedy množina  $\mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$  je lineární prostor.)

Příklad 8.6:

$$\int_0^2 2x dx = [x^2 + C]_0^2 = [x^2]_0^2 = 4.$$

$$\int_0^\pi 3 \cos x - 2 \sin x dx = 3 \int_0^\pi \cos x dx + 2 \int_\pi^0 \sin x dx =$$

$$3 [\sin x]_0^\pi + 2 [\cos x]_\pi^0 = 3(0 - 0) + 2(1 - (-1)) = 4.$$

Následující dvě věty vyplývají z vět (8.2) a (8.3).

**Věta 8.5:** (per partes v Newtonově integrálu)

Nechť funkce  $u, v$  jsou derivovatelné na intervalu  $\langle a, b \rangle$  (v krajních bodech zprava, popř. zleva) a  $u \cdot v' \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$ , potom také  $u' \cdot v \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$  a platí

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = \left[ u(x) \cdot v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx.$$

Příklad 8.7: Vypočtěte integrál  $\int_0^1 e^x \sin x dx$ .

Metodu per partes použijeme dvakrát.

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x \sin x dx &= \left[ \begin{array}{l} u' = e^x \quad v = \sin x \\ u = e^x \quad v' = \cos x \end{array} \right] = [e^x \sin x]_0^1 - \\ \int_0^1 e^x \cos x dx &= \left[ \begin{array}{l} u' = e^x \quad v = \cos x \\ u = e^x \quad v' = -\sin x \end{array} \right] = [e^x \sin x]_0^1 - \\ &[e^x \cos x]_0^1 - \int_0^1 e^x \sin x dx. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá

$$\int_0^1 e^x \sin x dx = \frac{1}{2} [e^x (\sin x - \cos x)]_0^1 = \frac{e}{2} (\sin 1 - \cos 1) + \frac{1}{2}.$$

**Věta 8.6:** (substituce v Newtonově integrálu)

Nechť  $f: D(f) \rightarrow H(f)$ ,  $g: D(g) \rightarrow H(g)$  a  $H(f) \subset D(g)$ . Jestliže funkce  $f$  je derivovatelná na  $D(f)$  a existuje primitivní funkce  $G$  k funkci  $g$  na  $D(g)$ , potom pro  $\langle a, b \rangle \subset D(f)$  platí

$$\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy = G(f(b)) - G(f(a)).$$

Příklad 8.8:

$$\begin{aligned} 1) \quad \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx &= \left( \begin{array}{l} y = \ln x \\ dy = \frac{1}{x} dx \end{array} \right) = \int_{\ln 1}^{\ln e} y dy = \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \\ 2) \quad \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left( \begin{array}{ll} x = \sin t & -1 = \sin a \Rightarrow a = -\frac{\pi}{2} \\ dx = \cos t dt & 0 = \sin b \Rightarrow b = 0 \end{array} \right) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos t}{|\cos t|} dt = \left( \begin{array}{l} \text{pro } t \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ \text{je } \cos t > 0 \end{array} \right) = \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 1 dt = [t]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{2}.$$

**Definice 8.4:** (nevlastní integrál vlivem meze)

Nechť funkce  $f \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$  pro každé  $b > a$ . Nechť existuje limita  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ , pak se nazývá **nevlastní Newtonův integrál vlivem meze** a píšeme

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Značíme  $f \in \mathcal{N}(\langle a, \infty \rangle)$  a říkáme, že nevlastní integrál konverguje; v opačném případě diverguje.

Analogicky  $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$  a definujeme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Příklad 8.9:

$$1) \quad \int_1^{\infty} x^{\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\alpha+1} (b^{\alpha+1} - 1) \right] =$$

$$\begin{cases} \infty & \alpha > -1 & \text{diverguje} \\ \frac{1}{\alpha+1} & \alpha < -1 & \text{konverguje.} \end{cases}$$

$$2) \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln |x|]_1^b = [\ln x]_1^{\infty} = \infty \quad \text{diverguje.}$$

**Definice 8.5:** (nevlastní integrál vlivem funkce)

Nechť  $\forall t \in (a, b)$  je funkce  $f \in \mathcal{N}(\langle a, t \rangle)$  a  $f \notin \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$ .

Nechť existuje limita  $\lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x) dx$ , pak se nazývá **nevlastní Newtonův integrál vlivem funkce** a píšeme

$$\lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Značíme  $f \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$  a říkáme, že nevlastní integrál konverguje, v opačném případě diverguje.

$$\text{Analogicky } \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a+} \int_a^t f(x) dx.$$

Příklad 8.10:

$$1) \quad \int_0^1 x^\alpha dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x^\alpha dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{\alpha+1} (1 - t^{\alpha+1}) \right] =$$

$$\begin{cases} \infty & \alpha < -1 \text{ diverguje} \\ \frac{1}{\alpha+1} & \alpha > -1 \text{ konverguje.} \end{cases}$$

$$2) \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [\ln |x|]_t^1 = [\ln x]_0^1 = \infty \text{ diverguje.}$$

Poznámka 8.1: Jestliže existuje  $c \in (a, b)$  takové, že  $f \in \mathcal{N}(\langle a, c \rangle)$ ,  $f \in \mathcal{N}(\langle c, b \rangle)$  a zároveň  $f \notin \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$ , pak položíme

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Příklad 8.11:

$$\text{Nechť } f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle -1, 0 \rangle \\ 1 & x \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}, \text{ potom } \int_{-1}^1 f(x) dx =$$

$$\int_{-1}^0 0 dx + \int_0^1 1 dx = [0]_{-1}^0 + [x]_0^1 = 1.$$

Funkce  $F(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle -1, 0 \rangle \\ x & x \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$  není primitivní funkce k funkci  $f$  na intervalu  $(-1, 1)$ , protože  $F'(0)$  neexistuje, přesto platí  $F(1) - F(-1) = 1 - 0 = \int_{-1}^1 f(x) dx$ .

Uvedený příklad vede k následující definici.

**Definice 8.6:** (zobecněná primitivní funkce)

Nechť  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  a  $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že

1) Funkce  $F$  je spojitá na  $\langle a, b \rangle$ .

2) Platí  $F'(x) = f(x)$  na  $\langle a, b \rangle$  s výjimkou spočetně mnoha bodů intervalu  $\langle a, b \rangle$ ,

potom funkce  $F$  se nazývá **zobecněná primitivní funkce** k funkci  $f$  a číslo  $F(b) - F(a)$  se nazývá **zobecněný Newtonův integrál** funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .



### 8.3 Základní věty integrálního počtu

**Věta 8.7:** (srovnávací kritérium)

Jesliže  $\forall t \in (a, b)$  jsou  $f, g \in \mathcal{N}(\langle a, t \rangle)$  a  $\forall x \in (a, b)$  platí  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Potom (i pro  $b = \infty$ ) platí

1. Konverguje-li  $\int_a^b g(x) dx$ , pak konverguje i  $\int_a^b f(x) dx$ .

2. Diverguje-li  $\int_a^b f(x) dx$ , pak diverguje i  $\int_a^b g(x) dx$ .

Důkaz:

1. Nechť  $F, G$  jsou primitivní funkce k funkcím  $f, g$  na intervalu  $\langle a, t \rangle$ . Potom  $F'(x) = f(x) \geq 0$  a funkce  $F$  je podle věty (7.10) neklesající na  $\langle a, t \rangle$ .

Podobně  $(G(x) - G(a) - F(x) + F(a))' = g(x) - f(x) \geq 0$  a funkce  $H(x) = G(x) - G(a) - F(x) + F(a)$  je neklesající na  $\langle a, t \rangle$ . Zároveň  $H(a) = 0$ , tedy  $G(x) - G(a) \geq F(x) - F(a)$ .

Pokud konverguje  $\int_a^b g(x) dx$ , pak existuje  $\lim_{t \rightarrow b^-} G(t)$ . Z Heineho definice limity a věty (4.4i) vyplývá, že funkce  $G$  je omezená, tedy i funkce  $F$  je omezené na  $\langle a, b \rangle$ . Zároveň funkce  $F$  je neklesající a opět podle věty (4.4ii) existuje

$\lim_{t \rightarrow b^-} F(t)$  a integrál  $\int_a^b f(x) dx$  konverguje.

2. Druhé tvrzení věty je ekvivalentní prvnímu, jedná se o **obměnu** implikace.

Příklad 8.12: Ukážeme, že integrál  $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx$  diverguje.

Platí odhad  $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = [\sqrt{x}]_1^\infty = \infty$ .

Poznamenejme, že primitivní funkce k funkci  $\frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$  lze nalézt pomocí substituce  $t^6 = x$ .

Úvahy v důkazu předchozí věty vedou k následujícím jednoduchým tvrzením.

**Věta 8.8:**

i) Jestliže  $f \in \mathcal{N}(a, b)$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \langle a, b \rangle$  potom

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

ii) Jestliže navíc  $f \neq 0$ , potom

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

iii) Jestliže  $f, g \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$ ,  $f(x) \geq g(x)$ ,  $\forall x \in \langle a, b \rangle$  potom

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Důkaz:

i) Nechť  $F$  je primitivní funkce k funkci  $f$  na intervalu  $(a, b)$ . Protože  $F'(x) = f(x) \geq 0$ , tak funkce  $F$  je podle věty (7.10) neklesající na  $(a, b)$ , tedy  $\lim_{t \rightarrow b^-} F(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} F(t) \geq 0$ .

ii) Kdyby  $\lim_{t \rightarrow b^-} F(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} F(t) = 0$ , pak funkce  $F$  je konstantní a  $F'(x) = f(x) = 0$ , což je spor s předpokladem  $f \neq 0$ . Odtud plyne  $0 < \int_a^b f(x) dx$ .

iii) Z bodu i) této věty a předpokladu  $f(x) - g(x) \geq 0$  plyne  $\int_a^b f(x) - g(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0$ .

Cvičení 8.2:

Dokažte následující tvrzení. Nechť  $f, |f| \in \mathcal{N}(a, b)$ , pak

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

[Z nerovností  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$  a bodu ii) předchozí věty plyne  $-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .]

**Věta 8.9:** (integrální kritérium pro řady)

Nechť funkce  $f \in \mathcal{N}(\langle 1, b \rangle)$ ,  $\forall b > 1$  je nerostoucí, kladná na  $\langle 1, \infty \rangle$ . Položíme  $a_n = f(n)$  pro  $n \in \mathbb{N}$ , potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konverguje.}$$

*Důkaz:* Protože funkce  $f$  je nerostoucí, tak  $\forall n \in \mathbb{N}$   $\forall x \in \langle n, n+1 \rangle$  je  $a_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = a_n$ .

Z věty (8.9 ii) pak vyplývá

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} a_{n+1} dx &\leq \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} a_n dx \Rightarrow s_N - a_1 \\ &= a_2 + a_3 + \dots + a_N \leq \int_1^N f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} = s_{N-1}. \end{aligned}$$

" $\Rightarrow$ " Protože funkce  $f$  je kladná, tak její primitivní funkce  $F$  je rostoucí na  $\langle 1, \infty \rangle$ . Pokud řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje, pak posloupnost částečných součtů  $s_{N-1}$  i posloupnost  $\int_1^n f(x) dx = F(n) - F(1)$  jsou omezené a podle věty (4.4ii) funkce  $F$  konverguje.

" $\Leftarrow$ " Protože funkce  $f$  je kladná, tak  $s_N - a_1 \leq \int_1^N f(x) dx < \int_1^{\infty} f(x) dx$ . Jestliže integrál  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  konverguje, pak posloupnost částečných součtů  $s_N$  (řady s kladnými členy) je omezená a podle věty (5.2) řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.

*Příklad 8.13:* Rozhodneme o chování řady  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ .

Uvažujeme funkci  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  na intervalu  $\langle 2, \infty \rangle$ , která zřejmě splňuje předpoklady integrálního kritéria (8.11) a spočítáme integrál  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ .

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \left( \begin{array}{l} y = \ln x \\ dy = \frac{1}{x} dx \end{array} \right) = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{y} dy = [\ln |y|]_{\ln 2}^{\infty} = \infty.$$

Podle integrálního kritéria (8.9) řada  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  diverguje.

**Věta 8.10:** (o střední hodnotě v integrálním tvaru)  
 Jestliže  $f \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$ , pak existuje  $\xi \in (a, b)$  takové, že

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$

*Důkaz:* Nechť  $F$  je primitivní funkce k funkci  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pak  $F$  je derivovatelná na  $(a, b)$  a podle cvičení (7.1) a věty (7.1) spojitá na  $\langle a, b \rangle$ . Splňuje tedy předpoklady Lagrangeovy věty o střední hodnotě (7.7). Odtud vyplývá, že existuje bod  $\xi \in (a, b)$  takový, že  $F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \Rightarrow$   
 $f(\xi) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) dx.$

#### 8.4 Integrální součet, Riemannův integrál

**Definice 8.7:** (integrální součet)

Nechť funkce  $f$  je omezená na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Množinu bodů  $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n; a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  nazveme **dělením intervalu**  $\langle a, b \rangle$ .

Číslo

$$S(D) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) (x_i - x_{i-1})$$

se nazývá **horní součet** funkce  $f$  příslušný dělení  $D$ .

Číslo

$$s(D) = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) (x_i - x_{i-1})$$

se nazývá **dolní součet** funkce  $f$  příslušný dělení  $D$ .

Nechť  $\tau_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle, i = 1, 2, \dots, n$ , potom číslo

$$I(D) = \sum_{i=1}^n f(\tau_i) (x_i - x_{i-1})$$

se nazývá **integrální součet** funkce  $f$  příslušný dělení  $D$ .

**Definice 8.8:** (zjemnění dělení) Označíme  $\mathcal{D}$  množinu všech dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Nechť  $D_1, D \in \mathcal{D}$  a  $D \subset D_1$ , pak dělení  $D_1$  se nazývá **zjemnění dělení**  $D$ .

**Cvičení 8.3:** Nechť  $D_1$  je zjemnění dělení  $D$ , potom  $S(D_1) \leq S(D)$ .

[Nechť  $x_{i-1} = y_0 < y_1 < \dots < y_k = x_i$ ,  $x_{i-1}, x_i \in D$ ,  $y_j \in D_1, j = 0, 1, \dots, k$ . Potom na intervalu  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  platí: 
$$\sum_{j=1}^k \sup_{y \in \langle y_{j-1}, y_j \rangle} f(y)(y_j - y_{j-1}) \leq \sup_{y \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(y) \sum_{j=1}^k (y_j - y_{j-1}) = \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x)(x_i - x_{i-1}).$$
 Odtud již plyne výše uvedené tvrzení.]

**Poznámka 8.2:**

1. Nechť  $f \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$ , potom podle věty o střední hodnotě (8.10) existují body  $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle, i = 1, 2, \dots, n$ , takové, že 
$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

2. Z omezenosti funkce  $f$  vyplývá, že  $\exists K > 0 \forall x \in \langle a, b \rangle$ :  $|f(x)| \leq K$  a z předchozí definice (8.7) dostaneme  $-K(b-a) \leq s(D) \leq I(D) \leq S(D) \leq K(b-a)$ .

Množiny čísel  $\{s(D); D \in \mathcal{D}\}$ ,  $\{S(D); D \in \mathcal{D}\}$  jsou podle předchozí poznámky omezené a podle věty o existenci suprema (3.1) má smysl následující definice.

**Definice 8.9:** (Riemannův integrál)

Nechť funkce  $f$  je omezená na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Číslo

$$\inf_{D \in \mathcal{D}} S(D) = \int_a^{\overline{b}} f(x) dx$$

se nazývá **horní integrál** funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Číslo

$$\sup_{D \in \mathcal{D}} s(D) = \int_a^{\underline{b}} f(x) dx$$

se nazývá **dolní integrál** funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Jestliže  $\int_a^{\overline{b}} f(x) dx = \int_a^{\underline{b}} f(x) dx = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx$ , pak se tato hodnota nazývá **Riemannův určitý integrál** funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Množinu všech Riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu  $\langle a, b \rangle$  značíme  $\mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ .

Příklad 8.14: (Dirichletova funkce)

Nechť  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & x \in \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \cap \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$ , potom pro každé

dělení  $D$  intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  platí  $s(D) = 0$ ,  $S(D) = 1$ . Odtud vyplývá, že funkce  $f$  nemá Riemannův integrál.

**Věta 8.11**: Nechť funkce  $f$  je omezená na intervalu  $\langle a, b \rangle$ ,  $c \in (a, b)$ , potom platí

$$\int_a^{\overline{b}} f(x) dx = \int_a^{\overline{c}} f(x) dx + \int_c^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Uvedená rovnost platí i pro dolní integrál.

Důkaz: Označíme postupně  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}$  všechna dělení intervalů  $\langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle, \langle a, b \rangle$ , potom  $\{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2\} \subset \mathcal{D}$  a platí

$$(1) \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx = \inf_{D \in \mathcal{D}} S(D) \leq \inf_{D \in \{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2\}} S(D) = \\ \inf_{D \in \mathcal{D}_1} S(D) + \inf_{D \in \mathcal{D}_2} S(D) = \int_a^{\overline{c}} f(x) dx + \int_c^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Z druhé vlastnosti **infima** vyplývá, že ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje dělení  $D' \in \mathcal{D}$  takové, že

$$(2) \quad s(D') < \int_a^{\overline{b}} f(x) dx + \varepsilon.$$

Položíme  $D'_c = D' \cup \{c\}$  a  $D'_c = D'_1 \cup D'_2$ , kde  $D'_1 \in \mathcal{D}_1, D'_2 \in \mathcal{D}_2$ . Dělení  $D'_c$  je zjemnění dělení  $D'$ , tedy podle cvičení (8.3) platí

$$(3) \quad S(D'_1) + S(D'_2) = S(D'_c) \leq S(D').$$

Z první vlastnosti **infima** a vztahů (2), (3) plyne

$$\int_a^{\overline{c}} f(x) dx + \int_c^{\overline{b}} f(x) dx \leq S(D'_1) + S(D'_2) \leq S(D'_c) < \int_a^{\overline{b}} f(x) dx + \varepsilon.$$

Společně se vztahem (1) tak dostaneme

$$\int_a^{\overline{b}} f(x) dx \leq \int_a^{\overline{c}} f(x) dx + \int_c^{\overline{b}} f(x) dx < \int_a^{\overline{b}} f(x) dx + \varepsilon.$$

Odtud již vyplývá tvrzení věty.

**Věta 8.12 :**

- i) Nechť funkce  $f$  je omezená na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , potom funkce  $\overline{F}(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,  $\underline{F}(x) = \int_a^x f(t) dt$  jsou spojité na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .
- ii) Jestliže funkce  $f$  je navíc spojitá, pak  $\overline{F} = \underline{F} (\equiv F)$  a funkce  $F$  je primitivní funkce k funkci  $f$  na  $\langle a, b \rangle$ .

*Důkaz:* i) Nechť  $x_0, x \in \langle a, b \rangle$ . Z věty (8.11) vyplývá, že platí  $\overline{F}(x) - \overline{F}(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ .

Zároveň funkce  $f$  je omezená, tedy  $\exists K > 0 \forall t \in \langle a, b \rangle : |f(t)| \leq K$ , tedy  $-K(x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq K(x - x_0)$ .

Odtud plyne  $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = 0 \Rightarrow \overline{F}(x) \rightarrow \overline{F}(x_0)$  a funkce  $\overline{F}$  je spojitá v bodě  $x_0$ .

ii) Ze spojitosti funkce  $f$  vyplývá, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, 0 < |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pro  $x$  splňující  $|x - x_0| < \delta$  odhadneme

$$\left| \frac{\overline{F}(x) - \overline{F}(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt}{x - x_0} \right| < \varepsilon.$$

Odtud vyplývá  $\overline{F}'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\overline{F}(x) - \overline{F}(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ . Podobně lze dokázat  $\underline{F}'(x_0) = f(x_0)$ .

Zároveň platí  $\overline{F}(a) = \underline{F}(a) = 0$ . Tedy funkce  $\overline{F}, \underline{F}$  jsou primitivní k funkci  $f$  a rovnají se.

V předchozí větě jsme vlastně dokázali následující základní tvrzení.

**Věta 8.13 :** (Fundamentální věta matematické analýzy)

$$\text{Platí } \mathcal{C}(\langle a, b \rangle) \subset \mathcal{N}(\langle a, b \rangle) \quad \wedge \quad \mathcal{C}(\langle a, b \rangle) \subset \mathcal{R}(\langle a, b \rangle).$$

Neboli každá spojitá funkce je Newtonovsky i Riemannovsky integrovatelná.

**Definice 8.10:** Nechť funkce  $f \in \mathcal{R}(I)$  a  $a, x \in I$ . Potom primitivní funkci  $F$  k funkci  $f$  definovanou vztahem

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt$$

nazýváme **integrálem s proměnnou (horní) mezí**.

*Příklad 8.15:* Funkce  $\frac{\sin t}{t}$  je pro  $t \neq 0$  spojitá a podle předchozí věty (8.13) je Newtonovsky integrovatelná např. na intervalu  $\langle a, x \rangle$ ,  $a > 0$ . Má tedy smysl definovat integrál s proměnnou mezí tvaru  $F(x) - F(a) = \int_a^x \frac{\sin t}{t} dt$ .

Poznamenejme, že tento integrál se nedá vyjádřit jako lineární kombinace konečného počtu "základních funkcí" ( $x^n$ ,  $\sin x$ ,  $e^x$ , ...).

Příklady na integrály  
lze nalézt na adrese  
[http://trial.kma.zcu.cz/  
Tdb/main.php?T0=2&  
T1=0&T2=0&T3=0&  
T0b=2&C=../7/](http://trial.kma.zcu.cz/Tdb/main.php?T0=2&T1=0&T2=0&T3=0&T0b=2&C=../7/)



## 8.5 Aplikace v geometrii a fyzice

Při zavedení Riemannova integrálu jsme sčítali "nekonečně mnoho nekonečně malých ploch - tzv. elementů" a dostali jsme vlastně obsah plochy "pod grafem funkce  $f$ ". Tento postup lze použít i při výpočtu objemu těles, délek křivek, vykonané práce ap.

Dále budeme předpokládat, že funkce popř. jejich derivace vystupující v následujících vztazích jsou spojité a funkce  $f$  je na intervalu  $\langle a, b \rangle$  nezáporná. Podle věty (8.13) pak uvedené integrály existují.

Popis	Vztah	Obrázek
<p><b>Plocha</b> pod grafem funkce Plocha <math>S</math> je ohraničena grafem funkce <math>f</math>, přímkami <math>x = a</math>, <math>x = b</math> a osou <math>x</math>.</p>	$S = \int_a^b f(x) dx$ <p>Element plochy <math>dS = f(x) dx</math></p>	
<p><b>Objem</b> rotačního tělesa Objem <math>V</math> tělesa vzniklého rotací plochy pod grafem funkce <math>f</math> kolem osy <math>x</math>.</p>	$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ <p>Element objemu <math>dV = \pi f^2(x) dx</math></p>	
<p><b>Délka</b> křivky Délka <math>s</math> křivky určené grafem funkce <math>f</math>.</p>	$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ <p>Element délky <math>ds \doteq \sqrt{(dx)^2 + (df)^2} = \sqrt{(dx)^2 + f'(x)^2(dx)^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx</math></p>	
<p><b>Povrch</b> rotačního tělesa Obsah <math>S</math> plochy vzniklé rotací grafu funkce <math>f</math> kolem osy <math>x</math>.</p>	$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ <p>Element obsahu <math>dS \doteq 2\pi f(x) ds = 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx</math></p>	

<p><b>Statický moment křivky</b>          Statické momenty <math>M_x</math>, <math>M_y</math> křivky dané grafem funkce <math>f</math> vzhledem k osám <math>x</math>, <math>y</math>. Hmotnost křivky je reprezentována její délkou.</p>	$M_x = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ $M_y = \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$	<p>Statický moment <math>M</math> tělesa o hmotnosti <math>m</math> k vzhledem k ose otáčení <math>o</math>, která je ve vzdálenosti <math>d</math> od těžiště tělesa, je dán vztahem <math>M = m \cdot d</math>.</p>
<p><b>Moment setrvačnosti křivky</b>          Momenty setrvačnosti <math>I_x</math>, <math>I_y</math> křivky dané grafem funkce <math>f</math> vzhledem k osám <math>x</math>, <math>y</math>. Hmotnost křivky je reprezentována její délkou.</p>	$I_x = \int_a^b f^2(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ $I_y = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$	<p>Moment setrvačnosti <math>I</math> tělesa o hmotnosti <math>m</math> k vzhledem k ose otáčení <math>o</math>, která je ve vzdálenosti <math>d</math> od těžiště tělesa, je dán vztahem <math>I = m \cdot d^2</math>.</p>

## Rejstřík

absolutní hodnota, 18

Achiles, 32

axiom, 8

Bernoulli, 10, 25

Bernoulliova nerovnost, 9

bod

inflexní, 71

kritický, 62

nespojivosti

1.druhu, 48

2.druhu, 48

odstranitelné nespojivosti, 48

stacionární, 62

Boole, 7

Cantor, 11

Cantorovo diskontinuum, 17

Cauchy, 28

Cohen, 16

d'Alembert, 35

Dedekind, 14

definiční obor, 12

derivace, 56

$n$ -tá, 65

druhá, 65

funkce, 56

jednostranné, 56

nevlastní, 56

zleva, 56

zprava, 56

desetinná aproximace, 15

desetinný rozvoj, 14

diference

argumentu, 56

funkce, 56

diferenciál, 57

$n$ -tý, 65

Digges, 44

disjunkce, 6

dolní součet, 90

druhá derivace, 65

dělení intervalu, 90

důkaz, 8

nepřímý, 8

přímý, 8

sporem, 8

ekvivalence, 6

Euklides, 23

Fibonacci, 21

funkce, 42

asymptoticky rovné, 52

inverzní, 45

klesající, 43

klesající v bodě, 68

konkávní, 43

konkávní v bodě, 71

konvexní, 43

konvexní v bodě, 71

lichá, 43

monotónní, 43

neklesající, 43

nerostoucí, 43

omezená, 43

omezená ve srovnání, 52

ostře monotónní, 43

periodická, 43

primitivní, 74

rostoucí, 43

rostoucí v bodě, 68

spojitá v bodě, 47

spojitá v bodě zleva, 47

spojitá v bodě zprava, 47

- stejněměrně spojitá, 54
- sudá, 43
- zobecněná primitivní, 86
- graf funkce, 42
- Gregory, 22
- Gödel, 8
- Heine, 46
- horní součet, 90
- hranice množiny, 19
- hromadný bod množiny, 20
- hypotéza
  - kontinua, 16
- implikace, 6
- infimum, 17
- integrace
  - per partes, 77
  - substitucí, 78
- integrál
  - aplikace, 94
  - dolní, 91
  - horní, 91
  - neurčitý, 74
  - nevlastní vlivem funkce, 85
  - nevlastní vlivem meze, 84
  - s proměnnou horní mezí, 93
  - určitý Newtonův, 82
  - určitý Riemannův, 91
- integrální kritérium, 88
- integrální součet, 90
- inverzní zobrazení, 13
- kartézský součin, 12
- konjunkce, 6
- kritérium
  - Cauchyovo (odmocninové), 35
  - Cauchyovo limitní, 36
  - d'Alembertovo (podílové), 35
  - d'Alembertovo limitní, 36
  - Leibnizovo, 40
  - limitní srovnávací, 34
  - Raabeovo, 38
  - Raabeovo limitní, 39
  - srovnávací, 34
- l'Hospitalovo pravidlo, 64
- Leibniz, 42, 56
- limes inferior, 30
- limes superior, 30
- limita
  - dolní, 30, 52
  - horní, 30, 52
  - částečná, 52
- limita funkce
  - Cauchyova, 46
  - Heineova, 46
- limita posloupnosti, 22
- logické spojky, 6
- lokální maximum, 62
- lokální minimum, 62
- Maclaurinova formule, 67
- malé  $o$ , 52
- matematická indukce, 9
- maximum, 17
- minimum, 17
- množina, 11
  - diskrétní, 20
  - konečná, 16
  - neomezená, 17
  - nespočetná, 16
  - omezená, 17
  - otevřená, 19
  - prázdna, 11
  - shora omezená, 17
  - spojitě diferencovatelných funkcí, 56
  - spojitých funkcí, 56
  - spočetná, 16
  - uzavřená, 19

- zdola omezená, 17
- množiny
  - doplňěk, 11
  - průnik, 11
  - rozdíl, 11
  - sjednocení, 11
- mohutnost množiny, 16
- normála ke grafu, 58
- obměna implikace, 7
- obor hodnot, 12
- okolí bodu, 19
- parciální zlomky, 79
- podmnožina, 11
- polynom
  - Taylorův, 67
- poměrná diference, 56
- posloupnost, 21
  - aritmetická, 21
  - cauchyovská, 27
  - divergentní, 22
  - Fibonacciova, 21
  - fundamentální, 27
  - geometrická, 21
  - harmonická, 21
  - klesající, 21
  - konvergentní, 22
  - monotónní, 21
  - omezená, 21
  - rekurentní, 21
  - rostoucí, 21
  - vybraná, 24
- prvek množiny, 11
- Pythagoras, 15
- relace, 12
- rovnost čísel, 15
- sdružený výraz, 49
- suprémum, 17
- Taylor, 67
- tečna ke grafu, 58
- trojúhelníková nerovnost, 19
- uspořádaná dvojice, 12
- uspořádání čísel, 15
- uzávěr množiny, 19
- velké O, 52
- věta
  - Bolzanova-Cauchyova, 27
  - Bolzanova-Weierstrassova, 24
  - Cantorova, 55
  - Fermatova, 62
  - Lagrangeova, 63
  - o existenci supréma, 18
  - o limitě složené funkce, 50
  - o sevření, 29
  - o střední hodnotě, 63
  - Rolleova, 63
  - Taylorova, 67
- výrok, 6
  - negace výroku, 6
  - složený, 6
- výroková formule, 7
- zbytek řady, 32
- zobrazení, 12
  - na množinu, 13
  - prosté, 13
  - vzájemně jednoznačné, 13
- čísla
  - celá, 14
  - komplexní, 14
  - přirozená, 14
  - rationální, 14
  - reálná, 14
- číslo
  - iracionální, 14
- číslo  $e$ , 25

řada, 32

absolutně konvergentní, 41

alternující, 40

divergentní, 32

geometrická, 32

harmonická, 33

konvergentní, 32

## Reference

- [1] Čížek, Kubr, Míková: Sběrka příkladů z matematické analýzy I., skripta ZČU Plzeň 1997
- [2] Čížek, Kubr, Míková: Seminář z matematické analýzy I., skripta ZČU Plzeň 1995
- [3] Drábek, Míka: Matematická analýza I., skripta ZČU Plzeň 1996