5 Spojitost funkcí

5.1 Spojitost v bodě a body nespojitosti

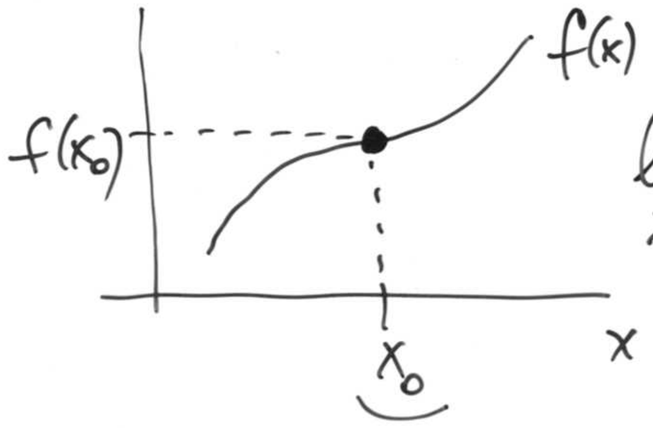
<u>Definice</u>: Nechť $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 je hromadným bodem D, $x_0 \in D$.

Řekneme, že fce f je

1) spojitá v bodě x_0
2) spojitá zleva v bodě x_0
3) spojitá zprava v bodě x_0
4) ~~spojitost~~ spojitá zdola v bodě x_0
5) ~~spojitost~~ spojitá shora v bodě x_0

, pokud

- $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ← spojitost oboustr.
- $\exists \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$ ← jednostr. spojitost
- $\exists \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$ ← jednostr. spojitost
- $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$
- $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$

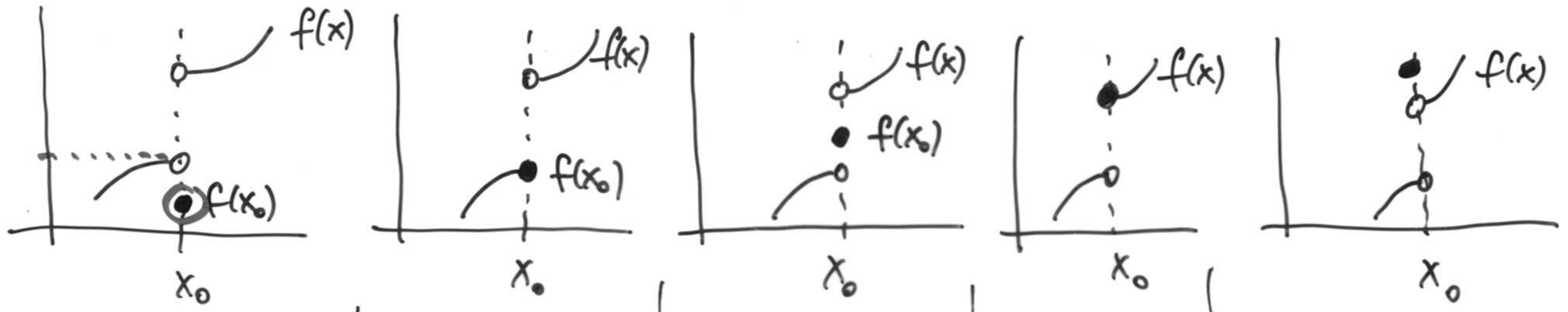


$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \exists f(x_0+), \exists f(x_0-)$

$\Rightarrow$ f je spojitá zleva i zprava

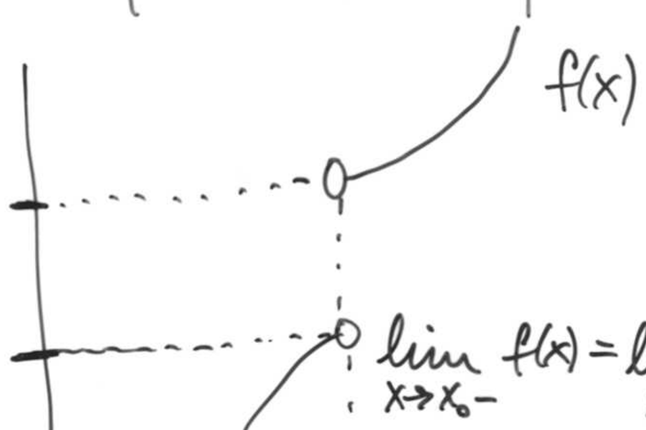
$\Rightarrow \liminf\limits_{x \to x_0} (x) = \limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Rightarrow$ f je spojitá shora i zdola



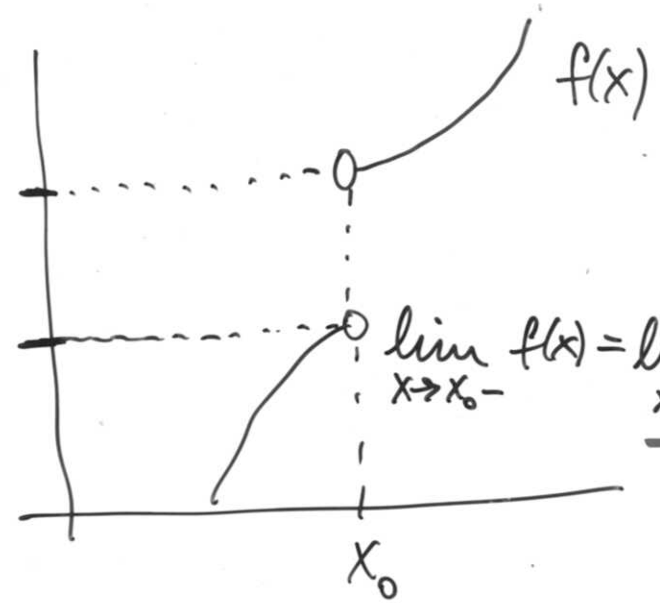
S	×	×	×	×	×
SzL	×	✓	×	×	×
SzP	×	×	×	✓	×
PSzD	✓	✓	×	×	×
PSsH	×	×	×	✓	✓

$f(x_0) \geq \limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$



$\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \liminf\limits_{x \to x_0} (x) \geq f(x_0)$

$$f(x_0) \geq \underline{\limsup_{x\to x_0} f(x)} = \lim_{x\to x_0+} f(x)$$



$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \underline{\liminf_{x\to x_0} f(x)} \geq f(x_0)$$

Poznámky: 1) Podmínka spojitosti $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)]=0$$

$$\uparrow \; \boxed{h = x - x_0}$$

2) f je spojitá zleva i zprava v x_0 $\Rightarrow$ f je spojitá v x_0

3) f je polospoj. zdola i shora v x_0 $\overset{?}{\Rightarrow}$ f je spojitá v x_0

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0) \qquad \limsup_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0) \leq \liminf_{x\to x_0} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \limsup_{x\to x_0} f(x) \leq \liminf_{x\to x_0} f(x) \\ \liminf_{x\to x_0} f(x) \leq \limsup_{x\to x_0} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \limsup_{x\to x_0} f(x) = \liminf_{x\to x_0} f(x) \overset{?}{\Rightarrow} \underline{\underline{\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}}$$

Věta (kritéria spojitosti): $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f je spojitá v $x_0 \in D \Leftrightarrow V_1 \Leftrightarrow V_2 \Leftrightarrow V_3 \Leftrightarrow V_4$

V_1: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in D(f): \cancel{0<} |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ "Cauchy"

V_2: $\forall \{x_n\} \subset D(f)$: $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$ "Heine"

V_3: $\forall \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)\ \exists \mathcal{U}(x_0, \delta)$: $x \in D(f) \cap \mathcal{U}(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$ "topol."

Věta (kritéria spojitosti): $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f \text{ je spojitá v } x_0 \in D \iff V_1 \iff V_2 \iff V_3 \iff V_4$$

$V_1: \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f): \cancel{0<} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ "Cauchy"

$V_2: \forall \{x_n\} \subset D(f): \quad x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$ "Heine"

$V_3: \forall \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)\ \exists \mathcal{U}(x_0, \delta): \quad x \in D(f) \cap \mathcal{U}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$ "topol."

$V_4: \exists f(x_0+) \wedge \exists f(x_0-) \wedge \ f(x_0+) = f(x_0-) = f(x_0)$

Příklad: Ukažme, že fce $\ln x$ je spojitá v $x_0 \in (0,1)$. (užijeme V_1)

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x > 0: \underbrace{|x - x_0| < \delta} \Rightarrow \underbrace{|\ln x - \ln x_0| < \varepsilon}$$

hledáme $\delta = \delta(\varepsilon)$

$$\left|\ln \frac{x}{x_0}\right| < \varepsilon, \quad -\varepsilon < \ln \frac{x}{x_0} < \varepsilon$$

$$e^{-\varepsilon} < \frac{x}{x_0} < e^{\varepsilon} \quad / \cdot x_0$$

$$x_0 \cdot \frac{1}{e^{\varepsilon}} < \underbrace{x} < x_0 e^{\varepsilon} \quad / - x_0$$

$|x - x_0| < \delta$

$$x_0\left(\frac{1}{e^{\varepsilon}} - 1\right) < x - x_0 < x_0(e^{\varepsilon} - 1)$$

$\underbrace{-\delta < x - x_0 < \delta}$

$$\underbrace{-x_0\left(1 - \frac{1}{e^{\varepsilon}}\right)}_{=:\delta_1} < x - x_0 < \underbrace{x_0(e^{\varepsilon} - 1)}_{=:\delta_2}$$

$$\underbrace{-\delta_1 < x - x_0 < \delta_2}, \quad \delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0$$

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$\boxed{\delta = \min\left\{1 - \frac{1}{e^{\varepsilon}}, e^{\varepsilon} - 1\right\}}$$

Příklad: Ukažme, že fce $f(x) = x \cdot \sin x$ je spojitá $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}$$

$$|x \sin x - x_0 \cdot \sin x_0| = |x \cdot \sin x \overbrace{- x_0 \cdot \sin x + x_0 \sin x}^{=0} - x_0 \cdot \sin x_0|$$

$$= |(x - x_0) \ldots$$ $\leq$ Δ ner.

Příklad: Ukažme, že fce $f(x) = x\cdot\sin x$ je spojitá $x_0\in\mathbb{R}$.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in\mathbb{R}:\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow \underline{|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon}$$

$$|x\sin x - x_0\cdot\sin x_0| = |x\cdot\sin x \overbrace{-x_0\cdot\sin x + x_0\sin x}^{=0} - x_0\cdot\sin x_0|$$

$$= |(x-x_0)\sin x + x_0(\sin x - \sin x_0)| \le \quad \triangle\text{ nen.}$$

$$\le |(x-x_0)|\underbrace{|\sin x|}_{\le 1} + |x_0\underbrace{(\sin x - \sin x_0)}_{2\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x-x_0}{2}}| \le$$

$$\le |x-x_0|\cdot 1 + 2\cdot|x_0|\cdot\underbrace{\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|}_{\le 1}\cdot\underbrace{\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|}_{\le\left|\frac{x-x_0}{2}\right|} \le$$

$$\le |x-x_0| + \cancel{2}|x_0|\cdot\frac{|x-x_0|}{\cancel{2}} = |x-x_0|(1+|x_0|)$$

$$\forall x, x_0\in\mathbb{R}:\ |x\sin x - x_0\sin x_0| \le |x-x_0|\overbrace{\underbrace{(1+|x_0|)}_{\text{konst. vzhledem }x}}^{=:L}$$

x_0 je konst. (spojitost stud. v x_0)

$$\boxed{|x\cdot\sin x - x_0\cdot\sin x_0| \le L|x-x_0| < \underbrace{\delta\cdot L}_{=\varepsilon}}$$

$$\boxed{\delta := \frac{\varepsilon}{L}}$$

Pozorování: 1) Pokud platí

$$\forall x,y\in(a,b):\ |f(x)-f(y)| \le L|x-y|, \qquad (*)$$

kde $L>0$ je konst., potom f je spojitá v lib. bodě (a,b).

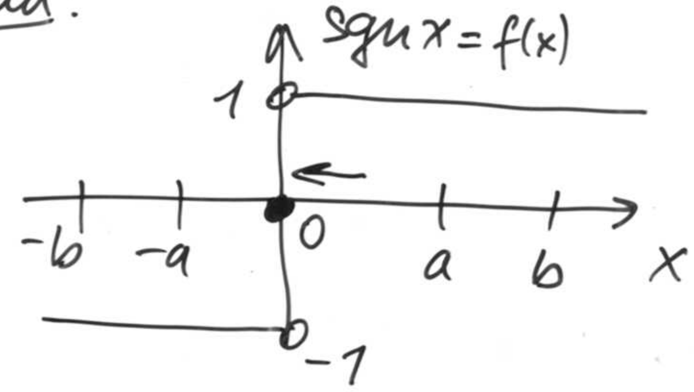
(stačí volit $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$)

2) Pokud fce f splňuje $(*)$, potom se nazývá lipschitzovská fce na (a,b).

3) Každá lipsch. fce je spojitou fcí.

Příklad:

Příklad:



$f(x)$ je lipsch. na (a,b), $0<a<b$
$(-b,-a)$

není lipsch. na (c,d), $c<0<d$

sporem
$\exists L>0\ \forall x,y\in(c,d)$:

$(*)\quad |f(x)-f(y)| \leq L\cdot(x-y)$

$x_n = \frac{1}{n} \to 0+$

$y_n = -\frac{1}{n} \to 0-$

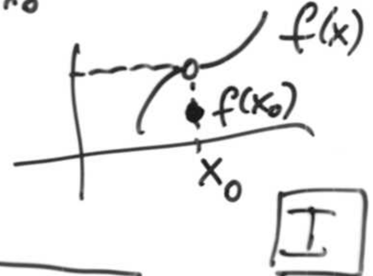
$$(*)\qquad |\underbrace{f(\tfrac{1}{n})}_{1} - \underbrace{f(-\tfrac{1}{n})}_{=-1}| \leq L\,|\tfrac{1}{n}-(-\tfrac{1}{n})|$$

$$2 \qquad \leq L\cdot \frac{2}{n} \longrightarrow 0$$

↯

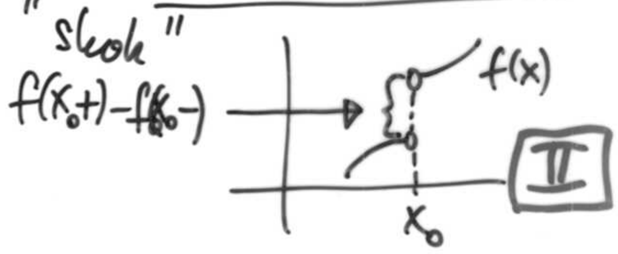
$\Rightarrow$ f není lipsch.

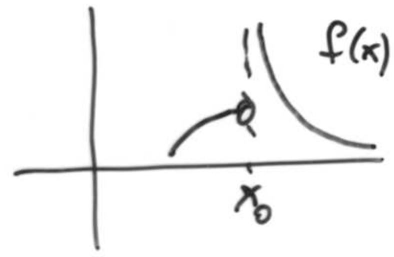
- f je spojitá v $x_0\in D(f) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f není spojitá v $x_0 \in D(f) \Leftrightarrow \left(\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)\right) \vee \left(\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)\right)$



$\boxed{\exists f(x_0+), \exists f(x_0-),\ f(x_0+)\neq f(x_0-)}$ $\qquad$ $\boxed{\nexists f(x_0+) \vee \nexists f(x_0-)}$

"skok"
$f(x_0+)-f(x_0-)$





Definice (body nespojitosti): $f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, bod $x_0\in\mathbb{R}$ nazveme **bodem nespojitosti** fce $f(x)$, pokud

$(x_0 \notin D(f)) \vee ($

Definice (body nespojitosti): $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bod $x_0 \in \mathbb{R}$ nazveme **bodem nespojitosti** fce $f(x)$, pokud

$$\left(x_0 \notin D(f) \right) \vee \left(\text{fce } f \text{ není spojitá v } x_0 \in D(f) \right)$$

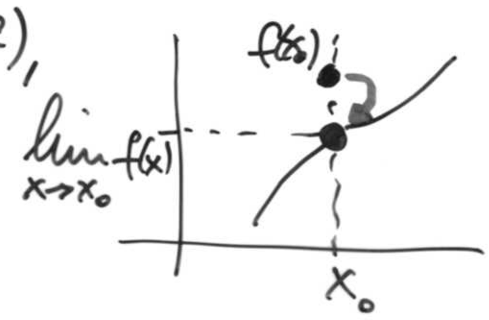
$\boxed{\text{I}}$ Pokud $\exists f(x_0-) \wedge \exists f(x_0+) \wedge f(x_0-) = f(x_0+) \neq f(x_0)$ (včetně $x_0 \notin D(f)$),
potom bod x_0 nazveme **bodem odstranitelné nespoj.**

$\boxed{\text{II}}$ Pokud $\exists f(x_0-) \wedge \exists f(x_0+) \wedge f(x_0-) \neq f(x_0+)$, ($f(x_0+) - f(x_0-)$ je "skokem")
potom bod x_0 nazveme **bodem nespoj. I. druhu.**

$\boxed{\text{III}}$ Pokud $\nexists f(x_0-) \vee \nexists f(x_0+)$,
potom bod x_0 nazveme **bodem nespoj. II druhu.**

Poznámka: Pokud f je nespojitá v x_0, má nesp. odstranitelnou.
Potom

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0,\ x \in D(f), \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & x = x_0. \end{cases}$$



Příklad: $\dfrac{1}{x} \longrightarrow 0$ je bod nesp. II. druhu $\quad \lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

$\operatorname{sgn} x \longrightarrow 0$ je bod nesp. I. druhu $\quad \lim\limits_{x \to x_0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

$\operatorname{sgn} 0+ = 1$, $\operatorname{sgn} 0- = -1$ (skok 2)

Věta (algebraické vlastnosti spojitých fcí): $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ je spojitá v } x_0 \\ g \text{ je spojitá v } x_0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \text{fce } f \pm g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}\ (\forall x \in D: g(x) \neq 0)$$

jsou spojité v x_0.

Důkaz: plyne př

x_0

<u>Příklad</u>: $\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ je bod nesp. II. druhu $\lim\limits_{x\to x_0+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\operatorname{sgn} x \longrightarrow 0$ je bod nesp. I. druhu $\lim\limits_{x\to x_0-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\operatorname{sgn} 0+ = 1$, $\operatorname{sgn} 0- = -1$ (skok 2)

<u>Věta (algebraické vlastnosti spojitých fcí)</u>: $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je spojitá v } x_0 \\ g \text{ je spojitá v } x_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{fce } f \pm g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}\ (\forall x \in D: g(x) \neq 0)$$
jsou spojité v x_0.

<u>Důkaz</u>: plyne přímo z ALF a definice spojitosti v x_0.

<u>Věta (spojitost složené fce)</u>: $f: D \to H$, $g: \mathcal{H} \to \mathcal{M}$, $H \subset \mathcal{H}$

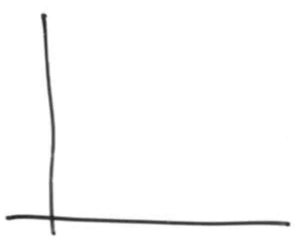
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je spojitá v } x_0 \\ g \text{ je spojitá v } f(x_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow g(f(x)) \text{ je spojitá v bodě } x_0.$$

<u>Důkaz</u>:
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je sp. v } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \\ g \text{ je sp. v } f(x_0) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{y \to f(x_0)} g(y) = \underbrace{g(f(x_0))} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{je splněn předp. č. 2}]{LSF} \exists \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$$
$b = g(y_0)$

<u>Věta (lokální omezenost spojité fce)</u>: $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ~~je sp~~

$$f \text{ je spojitá v } x_0 \Longrightarrow \exists\, \mathcal{U}(x_0,\delta)\ \exists K>0\ \forall x \in \mathcal{U}(x_0,\delta) \cap D(f): |f(x)| \leq K$$

<u>Důkaz</u>: f je spojitá v $x_0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$



$$\Rightarrow \underbrace{\forall \varepsilon > 0}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f): |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

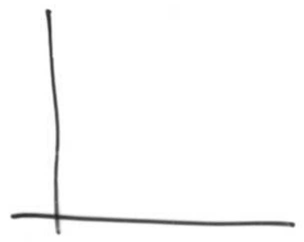
ε zvol pevně $\Rightarrow$ pevné $\delta > 0$

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \leq \overbrace{|f(x) - f(x_0)|}^{<\varepsilon} + |f(x_0)| <$$

Věta (lokální omezenost spojité fce): $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ~~je sp~~

$$f \text{ je spojitá v } x_0 \Longrightarrow \exists\, U(x_0,\delta)\ \exists K>0\ \forall x \in U(x_0,\delta)\cap D(f): |f(x)| \le K$$

Důkaz: f je spojitá v $x_0 \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$



$$\Rightarrow \underbrace{\forall \varepsilon>0}\ \exists\delta>0\ \forall x\in D(f): |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

ε zvol pevně $\Rightarrow$ pevné $\delta>0$

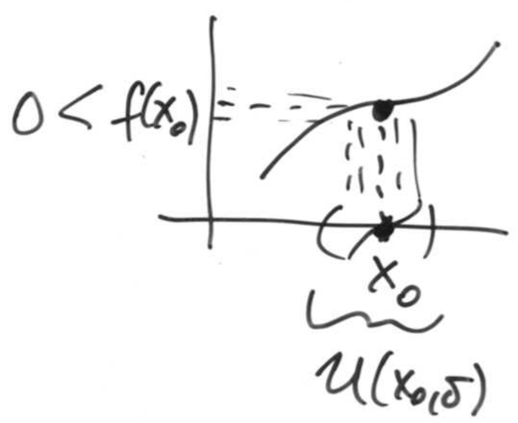
$$|f(x)| = |f(x)-f(x_0)+f(x_0)| \le \overbrace{|f(x)-f(x_0)|}^{<\varepsilon} + |f(x_0)| \le$$

$$\le \underbrace{\varepsilon + |f(x_0)|}_{=:K}$$

Věta (o zachování znaménka): $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ je spojitá v } x_0,\ f(x_0)\neq 0 \Longrightarrow \exists\, U(x_0,\delta)\ \forall x\in U(x_0,\delta)\cap D(f):$$

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0)$$



$f(x)>0$

Důkaz: f je spojitá v x_0, $f(x_0)>0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D(f): |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$\xRightarrow{\varepsilon := f(x_0)} \exists\delta>0\ \forall x\in D(f): |x-x_0|<\delta \Rightarrow \underbrace{|f(x)-f(x_0)|<f(x_0)}$$

$$0 = f(x_0)-f(x_0) < f(x) < \underbrace{f(x_0)+f(x_0)}_{2f(x_0)}$$

$$\boxed{0<f(x)}<2f(x_0)$$