KONVERGENTNÍ vs CAUCHYOVSKÉ posloupnosti v X

$\{a_n\}$ je posloupnost v X (tj. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in X$)

$$\left[\begin{array}{l} X = \mathbb{R} \\ X = \mathbb{Q} \\ X = C(0,1) \end{array}\right]$$

$\boxed{\{a_n\} \text{ je konvergentní v } X}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\{a_n\} \text{ je cauchyovská v } X}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n \in X}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\exists a \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\exists a \in X\ \forall \varepsilon > 0 : \ d(a_n, a) < \varepsilon \text{ pro s.v. } n}$

$\boxed{\{a_n\} \text{ je cauchyovská v } X}$

$\Updownarrow$

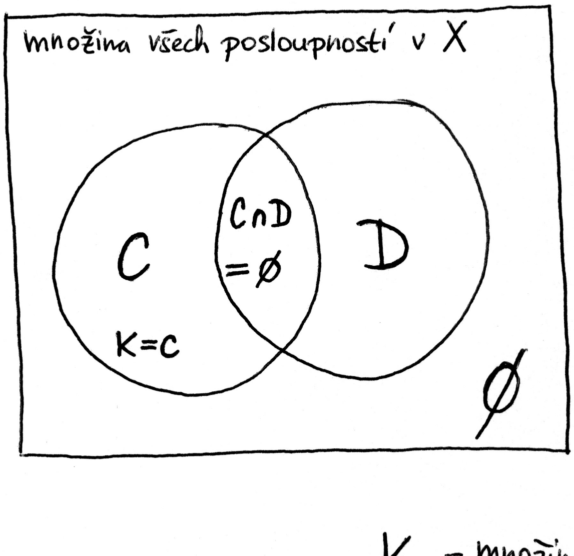
$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N} : \\ n > n_0 \wedge m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon \end{array}}$

$\Updownarrow$

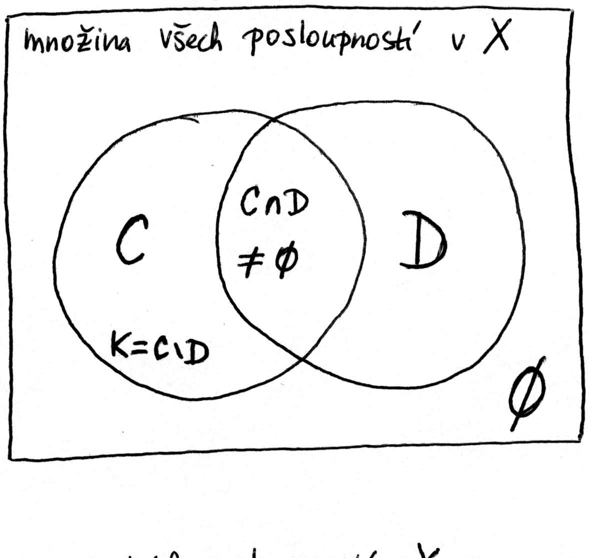
$\boxed{\forall \varepsilon > 0 : d(a_n, a_m) < \varepsilon \text{ pro s.v. } n \text{ a s.v. } m}$

vzdálenost prvků $a, b \in X$: $d(a,b) := \begin{cases} |a-b| & \text{pro } X = \mathbb{R} \text{ a } X = \mathbb{Q}, \\ \max\limits_{t \in \langle 0,1 \rangle} |a(t) - b(t)| & \text{pro } X = C(0,1). \end{cases}$

$X = \mathbb{R}$



$X = \mathbb{Q}$ nebo $X = C(0,1)$



K – množina všech <u>konvergentních</u> posloupností v X

C – množina všech <u>cauchyovských</u> posloupností v X

D – množina všech <u>divergentních</u> posloupností v X