Příklad: Ukažte, že Eulerovo číslo je iracionální číslo.

$\boxed{\mathrm{I}}$ Ukažme, že $e := \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$. $\left(s_n := \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$

$\boxed{\mathrm{II}}$ Odhadněme zbytek $e - s_n$: $\forall n\in\mathbb{N}: 0 < e - s_n < \frac{1}{n\cdot n!}$.

$\boxed{\mathrm{III}}$ Ukažme, že e není racionálním číslem.

add $\boxed{\mathrm{I}}$ $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ je konvergentní řada (viz d'Alemb. kr.)

Označme $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ a $e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Pokud dokážeme, že $\forall n\in\mathbb{N}: e_n \le s_n \le e$, potom

$$\xrightarrow[\text{krit.}]{\text{srovn.}} \exists \lim_{n\to+\infty} s_n = e \ \left(\text{neboť } e_n \xrightarrow{n\to+\infty} e\right).$$

• a)

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{\overbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k \text{ členů}}}{n^k} =$$

$$= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\overbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{<1}\overbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}^{<1}\cdot\ldots\cdot\overbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}^{<1} \quad \text{pro } n\ge 2.$$

s_n

$$s_n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$\Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: \boxed{e_n \le s_n}$$

• b)

$$e_n = 1 + 1 + \overbrace{\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{k=2} + \overbrace{\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}^{k=3} + \overbrace{\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}^{k=4} + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{\frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{p-1}{n}\right)}_{k=p<n} \Big| + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}_{k=n}$$

"odřízneme" kladný výraz

- Zvolme p pevně, $p < n$, potom

$$\underbrace{1+1+\frac{1}{2!}\overbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\to 1}+\frac{1}{3!}\overbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\to 1}\overbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}^{\to 1}+\dots+\frac{1}{p!}\overbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\to 1}\overbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}^{\to 1}\cdots\overbrace{\left(1-\frac{p-1}{n}\right)}^{\to 1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} s_p} < \underbrace{e_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} e}.$$

$$\xRightarrow[\text{o nerovnosti}]{\text{Věta}} \boxed{s_p \le e}$$

add $\boxed{\text{II}}$

$$0 < e - s_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+3)(n+2)} + \dots\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots\right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^i = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}$$

$$= \underbrace{\frac{n+2}{(n+1)^2}}_{<\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n!} < \frac{1}{n\cdot n!}$$

add $\boxed{\text{III}}$ předp., že e je racionálním číslem, tedy $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$

odhad $0 < e - s_n < \frac{1}{n\cdot n!}$ lze ekvivalentně vyjádřit:

$$e - s_n = \frac{\Theta_n}{n\cdot n!}, \quad \Theta_n \in (0,1)$$

$$\underbrace{(q-1)!\cdot p}_{\in\mathbb{N}} = q!\cdot\frac{p}{q} = \boxed{q!\,e} = q!\left(s_q + \frac{\Theta_q}{q\cdot q!}\right) = q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!} + \frac{\Theta_q}{q}$$

$$= \underbrace{q!}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\frac{q!}{1}}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\frac{q!}{2!}}_{\in\mathbb{N}} + \dots + \underbrace{\frac{q!}{q!}}_{\in\mathbb{N}} + \frac{\Theta_q}{q} \Rightarrow \frac{\Theta_q}{q} \in \mathbb{N},$$

což je $\lightning$ s $\Theta_q \in (0,1)$