Bolzanova – Weierstrassova věta: Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Důkaz: (přímý), $\{a_n\}$ je omezená $\Rightarrow \exists K>0\ \forall n\in\mathbb{N}: |a_n|\leq K$

$J_1 := \langle -K, K\rangle \Rightarrow \exists n_1\in\mathbb{N}: a_{n_1}\in J_1$

$J_2 := \begin{cases}\langle -K, 0\rangle \\ \quad \text{tak, aby } a_n\in J_2 \text{ pro s.v.m} \\ \langle 0, K\rangle\end{cases} \Rightarrow \exists n_2\in\mathbb{N}: a_{n_2}\in J_2 \wedge n_2>n_1$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$J_k = \langle \alpha_k, \beta_k\rangle$

$J_{k+1} := \begin{cases}\langle \alpha_k, \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}\rangle \\ \quad \text{tak, aby } a_n\in J_{k+1} \text{ pro s.v.n} \Rightarrow \exists n_{k+1}\in\mathbb{N}: a_{n_{k+1}}\in J_{k+1}\wedge n_{k+1}>n_k \\ \langle \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}, \beta_k\rangle\end{cases}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

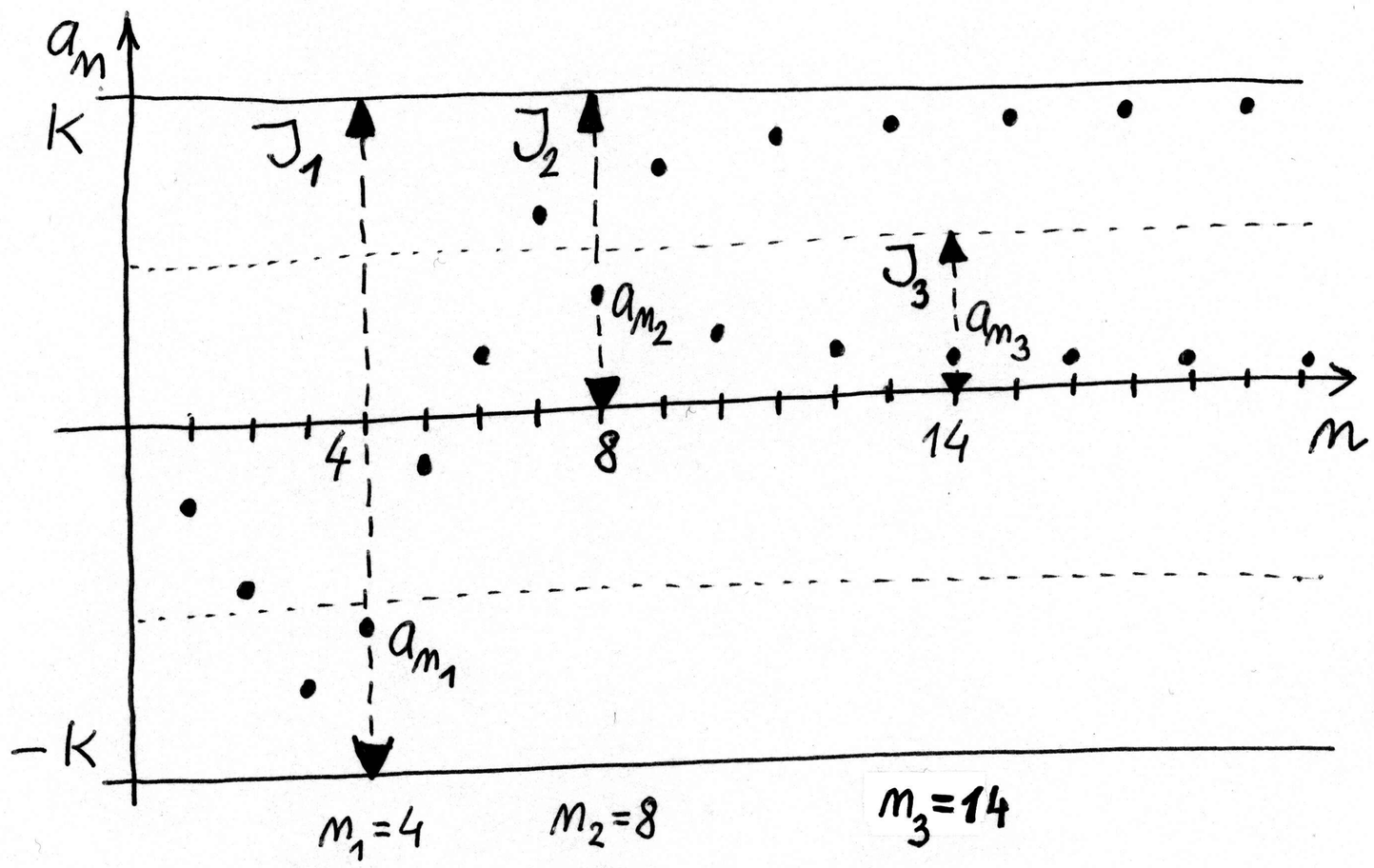
$J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset J_k \supset \dots$

$\Psi \quad \Psi \quad\quad \Psi$

$a_{n_1} \quad a_{n_2} \quad\quad a_{n_k}$

$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$

princip vložených intervalů $\Rightarrow \exists!\ x_0\in\mathbb{R}: \bigcap_{i=1}^{+\infty} J_i = \{x_0\}$



předpoklad $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: \underbrace{\beta_{n_0}-\alpha_{n_0}}_{=\frac{2K}{2^{n_0-1}}} < \varepsilon$ je splněn, stačí volit $n_0 = \left[\frac{\ln\frac{2K}{\varepsilon}}{\ln 2}+1\right]+1$.

? $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = x_0$?

$|a_{n_k}-x_0| \leq |\beta_k-\alpha_k| = \frac{2K}{2^{k-1}} < \varepsilon$

($a_{n_k}, x_0\in J_k$; z konstr. J_k; chceme)

$\forall\varepsilon>0\ \exists k_0\in\mathbb{N}\ \forall k\in\mathbb{N}: k>k_0 \Rightarrow |a_{n_k}-x_0|<\varepsilon$

- pravdivý výrok
- stačí volit $k_0 = \left[\frac{\ln\frac{2K}{\varepsilon}}{\ln 2}+1\right]+1$