Věta (Bolzanovo-Cauchyovo kritérium konvergence):

Reálná posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská v $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ je konvergentní v $\mathbb{R}$.

Důkaz: (přímý, stručná verze)

1) $\boxed{\Leftarrow}$ $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n =: a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : |a_p - a| < \varepsilon$ pro s.v. p

$$\boxed{?\ \forall \bar{\varepsilon} > 0 : |a_n - a_m| < \bar{\varepsilon} \text{ pro s.v. } n \text{ a s.v. } m\ ?}$$

$$\forall \bar{\varepsilon} > 0 : |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \le \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \text{ pro s.v. } n} + \underbrace{|a - a_m|}_{< \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \text{ pro s.v. } m} < \bar{\varepsilon} \text{ pro s.v. } n \text{ a s.v. } m$$

2) $\boxed{\Rightarrow}$

$\{a_n\}$ je cauchyovská $\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ je omezená $\overset{(B.-W.)}{\Longrightarrow}$ $\exists \{a_{n_k}\} : \exists \lim_{k\to+\infty} a_{n_k} =: a$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$\forall \varepsilon_1 > 0 : |a_n - a_m| < \varepsilon_1$ pro s.v. n a s.v. m $\qquad$ $\forall \varepsilon_2 > 0 : |a_{n_k} - a| < \varepsilon_2$ pro s.v. k

$$\boxed{?\ \forall \bar{\varepsilon} > 0 : |a_p - a| < \bar{\varepsilon} \text{ pro s.v. } p\ ?}$$

$$\forall \bar{\varepsilon} > 0 : |a_p - a| = |a_p - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \le \underbrace{|a_p - a_{n_k}|}_{< \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \text{ pro s.v. } p \text{ a s.v. } k} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{< \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \text{ pro s.v. } k} < \bar{\varepsilon} \text{ pro s.v. } p \text{ a s.v. } k$$

Důkaz: (přímý, podrobná verze)

1) $\boxed{\Leftarrow}$ $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n =: a \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}: n>n_0 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon.$

Tedy $\forall \bar{\varepsilon}>0\ \exists \bar{n}\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}: n>\bar{n} \Rightarrow |a_n-a|<\frac{\bar{\varepsilon}}{2}$,

navíc $\forall m\in\mathbb{N}: m>\bar{n} \Rightarrow |a_m-a|<\frac{\bar{\varepsilon}}{2}$ (záměna n za m).

Protože
$$|a_n-a_m| = |a_n-a+a-a_m| \le |a_n-a|+|a-a_m|,$$
dostáváme celkem
$$\forall \bar{\varepsilon}>0\ \exists \bar{n}\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ \forall m\in\mathbb{N}: (n>\bar{n})\wedge(m>\bar{n}) \Rightarrow |a_n-a_m|<\bar{\varepsilon}.$$
$\Rightarrow \{a_n\}$ je cauchyovská v $\mathbb{R}$.

2) $\boxed{\Rightarrow}$

$\{a_n\}$ je cauchyovská v $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ je omezená $\xRightarrow{(B.-W.)}$ $\exists \{a_{n_k}\}: \exists \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} =: a.$

$\boxed{\varepsilon>0 \text{ lib. pevné}}$

$\exists n_0\in\mathbb{N}: |a_p-a_{n_k}|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall p,k\in\mathbb{N}: p>n_0 \wedge n_k>n_0$

$\exists k_0\in\mathbb{N}: |a_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall k\in\mathbb{N}: k>k_0$

$\Downarrow$

$$|a_p-a| = |a_p-a_{n_k}+a_{n_k}-a| \le |a_p-a_{n_k}|+|a_{n_k}-a| < \varepsilon \quad \forall p,k\in\mathbb{N}: (p>n_0)\wedge(k>k_0)\wedge(n_k>n_0)$$

$\Downarrow$

$$\forall p\in\mathbb{N}: p>n_0 \Rightarrow |a_p-a|<\varepsilon$$

$\Downarrow$

$$\lim_{p\to+\infty} a_p = a$$