Domácí cvičení č.4

9. Rozhodněte, zda dané zobrazení je lineární.

   (a) $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
   $\mathcal{L}([a,b,c]^T) = [2a-b+c, 0, a+3b-c, 0, 3a+2b]^T$, [$\mathcal{L}$ je lineární],

   (b) $\mathcal{L}: \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}([a,b,c,d]^T) = [a-b+2c+1, b-d-a]^T$, [$\mathcal{L}$ není lineární],

   (c) $\mathcal{L}: \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(ax^3+bx^2+cx+d) = [a-b+2c, b-d-a]^T$, [$\mathcal{L}$ je lineární],

   (d) $\mathcal{L}: \mathcal{M}_{2,3} \longrightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}) = (a+b)x^2+(c+d)x+(e+f)$, [$\mathcal{L}$ je lineární]

10. Určete dimenzi a najděte alespoň jednu bázi jádra Ker$\mathcal{L}$ a obrazu Im$\mathcal{L}$.

    (a) $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
    $\mathcal{L}([a,b,c]^T) = [2a-b+c, 0, a+3b-c, 0, 3a+2b]^T$,
    [dim(Ker$\mathcal{L}$) = 1, báze je např. $[-2,3,7]^T$
    dim(Im$\mathcal{L}$) = 2, báze je např. $[-1,0,3,0,2]^T, [1,0,-1,0,0]^T$],

    (b) $\mathcal{L}: \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
    $\mathcal{L}(ax^3+bx^2+cx+d) = [a-b+2c, b-d-a]^T$,
    [dim(Ker$\mathcal{L}$) = 2, báze je např. $-2x^3+x+2, x^3+x^2$,
    dim(Im$\mathcal{L}$) = 2, báze je např. $[1,0]^T, [0,1]^T$, Im$\mathcal{L} = \mathbb{R}_2$],

    (c) $\mathcal{L}: \mathcal{M}_{2,3} \longrightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem
    $\mathcal{L}(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}) = (a+b)x^2+(c+d)x+(e+f)$,
    [dim(Ker$\mathcal{L}$) = 3, báze je např. $\mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
    $\mathbf{B_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, dim(Im$\mathcal{L}$) = 3, báze je např. $x^2, x, 1$, Im$\mathcal{L} = \mathcal{P}_2$].

11. Určete matici $\mathbf{A}$ lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ ve standardních bázích $e_1, e_2, \ldots$ a $p_1, p_2, \ldots$.

    (a) $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
    $\mathcal{L}([a,b,c]^T) = [2a-b+c, 0, a+3b-c, 0, 3a+2b]^T$,
    $\mathbb{R}_3$: $e_1 = [1,0,0]^T$, $e_2 = [0,1,0]^T$, $e_3 = [0,0,1]^T$,
    $\mathbb{R}_5$: $p_1 = [1,0,0,0,0]^T$, $p_2 = [0,1,0,0,0]^T$, $p_3 = [0,0,1,0,0]^T$, $p_4 = [0,0,0,1,0]^T$,

$p_5 = [0,0,0,0,1]^T$,

$$[\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}],$$

(b) $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
$\mathcal{L}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = [a - b + 2c, b - d - a]^T$,
$\mathcal{P}_3$: $e_1 = x^3$, $e_2 = x^2$, $e_3 = x$, $e_4 = 1$,
$\mathbb{R}_2$: $p_1 = [1,0]^T$, $p_2 = [0,1]^T$,

$$[\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}],$$

(c) $\mathcal{L}\colon \mathcal{M}_{2,3} \longrightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem
$\mathcal{L}(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}) = (a+b)x^2 + (c+d)x + (e+f)$,
$\mathcal{M}_{2,3}$: $\mathbf{E_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{E_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E_6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
$\mathcal{P}_2$: $p_1 = x^2$, $p_2 = x$, $p_3 = 1$,

$$[\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}].$$

12. Určete matici $\mathbf{B}$ lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v bázích $v_1, v_2, \ldots$ a $u_1, u_2, \ldots$.

(a) $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
$\mathcal{L}([a,b,c]^T) = [2a - b + c, 0, a + 3b - c, 0, 3a + 2b]^T$,
$\mathbb{R}_3$: $v_1 = [1,2,3]^T$, $v_2 = [2,1,3]^T$, $v_3 = [3,1,2]^T$,
$\mathbb{R}_5$: $u_1 = [1,2,-1,1,1]^T$, $u_2 = [2,1,1,1,0]^T$, $u_3 = [-1,3,1,0,0]^T$, $u_4 = [2,1,0,0,0]^T$,
$u_5 = [1,0,0,0,0]^T$,

$$[\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 11 \\ -7 & -8 & -11 \\ 18 & 18 & 26 \\ -61 & -62 & -89 \\ 150 & 156 & 222 \end{bmatrix}],$$

(b) $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
$\mathcal{L}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = [a - b + 2c, b - d - a]^T$,
$\mathcal{P}_3$: $v_1 = x^3 + 2x^2 + x + 2$, $v_2 = x^3 + 2x^2 + x - 2$, $v_3 = x^3 + 2x^2 - x - 2$,
$v_4 = x^3 - 2x^2 - x - 2$,
$\mathbb{R}_2$: $u_1 = [1,2]^T$, $u_2 = [2,1]^T$,

$$[\mathbf{B} = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 5 & 9 & -3 \\ 3 & -1 & -9 & 3 \end{bmatrix}],$$

(c) $\mathcal{L}\colon \mathcal{M}_{2,3} \longrightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem
$\mathcal{L}(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}) = (a+b)x^2 + (c+d)x + (e+f)$,
$\mathcal{M}_{2,3}$: $\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{V_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,
$\mathcal{P}_2$: $u_1 = x^2 + 2x$, $u_2 = x + 2$, $u_3 = 2x^2 + 1$,

$$[\mathbf{B} = \tfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 2 & -4 & 3 \\ -4 & -1 & 2 & 5 & 8 & -6 \\ 8 & 2 & -4 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}].$$

13. Jsou dána lineární zobrazení $\mathcal{L}_1\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_4$ dané předpisem
$\mathcal{L}_1([a,b,c]^T) = (a+b)x^4 + (2a-c)x^3 + (b+3c)x^2 + (2a+b)x + (b+4c)$,
$\mathcal{L}_2\colon \mathcal{P}_4 \longrightarrow \mathcal{M}_{2,2}$ dané předpisem
$\mathcal{L}_2(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = \begin{bmatrix} a+d-e & b+2c+e \\ 2a-c+2d & b+d+3e \end{bmatrix}$.

(a) Určete složené zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2,2}$,

$$[\mathcal{L}([a,b,c]^T) = \begin{bmatrix} 3a+b-4c & 2a+3b+9c \\ 6a+3b-3c & 4a+4b+11c \end{bmatrix}],$$

(b) Určete matice $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}$ lineárních zobrazení $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ a matici $\mathbf{A}$ složeného zobrazení $\mathcal{L}$ ve standardních bázích
$\mathbb{R}_3$: $e_1 = [1,0,0]^T$, $e_2 = [0,1,0]^T$, $e_3 = [0,0,1]^T$,
$\mathcal{P}_4$: $p_1 = x^4$, $p_2 = x^3$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x$, $p_5 = 1$,
$\mathcal{M}_{2,2}$: $\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$[\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 9 \\ 6 & 3 & -3 \\ 4 & 4 & 11 \end{bmatrix}],$$

(c) Určete $\mathbf{A_2}\mathbf{A_1}$,

$$[\mathbf{A_2}\mathbf{A_1} = \mathbf{A}].$$

14. Určete, zda k danému lineárnímu zobrazení $\mathcal{L}$ existuje inverzní zobrazení $\mathcal{L}^{-1}$ a toto inverzní zobrazení určete.
Návod: Určením jádra a obrazu $\mathcal{L}$ ukážete, že zobrazení je izomorfismus. K určení inverzního zobrazení $\mathcal{L}^{-1}$ využijte matici zobrazení ve standardních bázích.

(a) $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_1$ dané předpisem
$\mathcal{L}([a,b]^T) = (2a-b)x + (a+3b)$,

[dim(Ker$\mathcal{L}$) = 0, dim(Im$\mathcal{L}$) = 2, $\mathcal{L}$ je izomorfismus,
$\mathcal{L}^{-1}(ax+b) = \frac{1}{7}[3a+b, -a+2b]^T$],

(b) $\mathcal{L}\colon \mathcal{M}_{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}_4$ dané předpisem
$\mathcal{L}(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = [a+b+c+d, b+c+d, c+d, d]^T$,

[dim(Ker$\mathcal{L}$) = 0, dim(Im$\mathcal{L}$) = 4, $\mathcal{L}$ je izomorfismus,
$\mathcal{L}^{-1}([a,b,c,d]^T) = \begin{bmatrix} a-b & b-c \\ c-d & d \end{bmatrix}$].