Domácí cvičení č. 2

4. Určete lineární závislost či nezávislost prvků lineárního vektorového prostoru $\mathcal{L}$.

   (a) $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$,
   $v_1 = [1, 2, -3, 4, 5]^T$, $v_2 = [-2, 1, 5, -2, -1]^T$, $v_3 = [0, -4, 2, 1, -1]^T$,
   $v_4 = [-1, -1, 4, 3, 3]^T$.
   [v_1, v_2, v_3, v_4 jsou lineárně závislé, protože $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$, prvky v_1, v_2, v_3 jsou lineárně nezávislé],

   (b) $\mathcal{L} = \mathcal{P}_5$,
   $p_1 = x^3 - x^2 + 2x + 1$, $p_2 = -x^3 + 2x^2 - x + 4$, $p_3 = 2x^3 - 3x^2 + x - 3$,
   $p_4 = x^3 + 4x^2 - x + 2$.
   [p_1, p_2, p_3, p_4 jsou lineárně nezávislé],

   (c) $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{2,3}$,
   $\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,
   $\mathbf{A_5} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   [$\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}, \mathbf{A_4}, \mathbf{A_5}$ jsou lineárně nezávislé],

   (d) $\mathcal{L} = \mathcal{C}(0, 1)$,
   $f_1 = \mathrm{e}^x$, $f_2 = \mathrm{e}^{-x}$, $f_3 = \sinh x$.
   [f_1, f_2, f_3 jsou lineárně závislé, protože $f_3 = \frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{2} f_2$, prvky f_1, f_2 jsou lineárně nezávislé].

5. Určete bázi a dimenzi prostoru $\mathcal{V}$.

   (a) $\mathcal{V}$ je generován prvky $v_1 = [1, 2, -3, 4, 5]^T$, $v_2 = [-2, 1, 5, -2, -1]^T$,
   $v_3 = [0, -4, 2, 1, -1]^T$, $v_4 = [-1, -1, 4, 3, 3]^T$.
   [v_1, v_2, v_3 je báze $\mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} = 3$],

   (b) $\mathcal{V}$ je generován prvky $p_1 = x^3 - x^2 + 2x + 1$, $p_2 = -x^3 + 2x^2 - x + 4$,
   $p_3 = 2x^3 - 3x^2 + x - 3$, $p_4 = x^3 + 4x^2 - x + 2$.
   [p_1, p_2, p_3, p_4 je báze $\mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} = 4$],

   (c) $\mathcal{V}$ je generován prvky $\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,
   $\mathbf{A_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A_5} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   [$\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}, \mathbf{A_4}, \mathbf{A_5}$ je báze $\mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} = 5$],

   (d) $\mathcal{V}$ je generován prvky $f_1 = \mathrm{e}^x$, $f_2 = \mathrm{e}^{-x}$, $f_3 = \sinh x$.
   [f_1, f_2 je báze $\mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} = 2$].

6. Ukažte, že prvek $y \in \mathcal{V}$ a určete $\widehat{y}$ souřadnice prvku y v bázi prostoru $\mathcal{V}$.

(a) $\mathcal{V}$ je generován prvky $v_1 = [1, 2, -3, 4, 5]^T$, $v_2 = [-2, 1, 5, -2, -1]^T$, $v_3 = [0, -4, 2, 1, -1]^T$, $v_4 = [-1, -1, 4, 3, 3]^T$; $y = [-1, 28, -9, 3, 18]^T$.

[V bázi v_1, v_2, v_3 je $\widehat{y} = [3, 2, -5]^T$],

(b) $\mathcal{V}$ je generován prvky $p_1 = x^3 - x^2 + 2x + 1$, $p_2 = -x^3 + 2x^2 - x + 4$, $p_3 = 2x^3 - 3x^2 + x - 3$, $p_4 = x^3 + 4x^2 - x + 2$; $y = 17x^2 - 3x + 13$,

[V bázi p_1, p_2, p_3, p_4 je $\widehat{y} = [1, 0, -2, 3]^T$],

(c) $\mathcal{V}$ je generován prvky $\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A_5} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$,

[V bázi $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}, \mathbf{A_4}, \mathbf{A_5}$ je $\widehat{\mathbf{Y}} = [4, -1, 2, 3, 1]^T$],

(d) $\mathcal{V}$ je generován prvky $f_1 = \mathrm{e}^x$, $f_2 = \mathrm{e}^{-x}$, $f_3 = \sinh x$; $y = \cosh x$,

[V bázi f_1, f_2 je $\widehat{y} = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^T$],

(e) $\mathcal{V}$ je generován prvky $u_1 = [1, 2, -4, 5]^T$, $u_2 = [0, 1, 2, 1]^T$, $u_3 = [0, 0, 1, -3]^T$; $y = [3, 5, -12, 7]^T$,

[$y \notin \mathcal{V}$].