Domácí cvičení č.9

28. Napište kvadratickou formu $\kappa(x)$, je-li ve standardní bázi určena maticí $\mathbf{A}$.

    (a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

    $[\kappa(x) = x^T\mathbf{A}x = -2x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2]$,

    (b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$,

    $[\kappa(x) = x^T\mathbf{A}x = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3]$,

    (c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & -5 \\ -1 & 7 & -5 & -1 \\ -1 & -5 & 7 & -1 \\ -5 & -1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$,

    $[\kappa(x) = x^T\mathbf{A}x =$
    $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 7x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 10x_1x_4 - 10x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4]$.

29. Je dána kvadratická forma $\kappa(x)$. Určete matici $\mathbf{A}$ kvadratické formy $\kappa(x)$ ve standardní bázi.

    (a) $\kappa(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 8x_3^2 - 10x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$,

    $[\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 4 \\ -5 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix}]$,

    (b) $\kappa(x) = -3x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3$,

    $[\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}]$,

    (c) $\kappa(x) = -85x_1^2 - 61x_2^2 - 64x_3^2 + 10x_1x_2 + 20x_1x_3 - 4x_2x_3$,

    $[\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -85 & 5 & 10 \\ 5 & -61 & -2 \\ 10 & -2 & -64 \end{bmatrix}]$.

30. Je dána kvadratická forma $\kappa(x)$. Určete inercii $\mathrm{in}(\kappa)$ a definitnost kvadratické formy $\kappa(x)$.

    (a) $\kappa(x) = -2x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$,

    [$\mathrm{in}(\kappa) = (1, 1, 0)$, $\kappa(x)$ je indefinitní],

    (b) $\kappa(x) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$,

    [$\mathrm{in}(\kappa) = (3, 0, 0)$, $\kappa(x)$ je pozitivně definitní],

    (c) $\kappa(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 8x_3^2 - 10x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$,

    [$\mathrm{in}(\kappa) = (1, 1, 1)$, $\kappa(x)$ je indefinitní],

(d) $\kappa(x) = -3x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3$,
[in(κ) $= (0,2,1)$, $\kappa(x)$ je negativně semidefinitní],

(e) $\kappa(x) = -85x_1^2 - 61x_2^2 - 64x_3^2 + 10x_1x_2 + 20x_1x_3 - 4x_2x_3$,
[in(κ) $= (0,3,0)$, $\kappa(x)$ je negativně definitní],

(f) $\kappa(x) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 7x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 10x_1x_4 - 10x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4$,
[in(κ) $= (3,0,1)$, $\kappa(x)$ je pozitivně semidefinitní].

31. Je dána kvadratická forma $\kappa(x)$. Napište kvadratickou formu $\kappa(x)$ ve tvaru lineární kombinace čtverců souřadnic.

(a) $\kappa(x) = -2x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$,
$[\kappa(x) = 2(\frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 + 2x_2))^2 - 3(\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x_1 + x_2))^2]$,

(b) $\kappa(x) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$,
$[\kappa(x) = 3(\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + 2x_3))^2 + 6(\frac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + x_3))^2 + 9(\frac{1}{3}(-2x_1 - x_2 + 2x_3))^2]$,

(c) $\kappa(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 8x_3^2 - 10x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$,
$[\kappa(x) = 12(\frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 - x_2 + 2x_3))^2 - 6(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2))^2]$,

(d) $\kappa(x) = -3x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3$,
$[\kappa(x) = -3(\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + 2x_3))^2 - 6(\frac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + x_3))^2]$,

(e) $\kappa(x) = -85x_1^2 - 61x_2^2 - 64x_3^2 + 10x_1x_2 + 20x_1x_3 - 4x_2x_3$,
$[\kappa(x) = -60(\frac{1}{\sqrt{26}}(x_1 + 5x_2))^2 - 60(\frac{1}{\sqrt{195}}(5x_1 - x_2 + 13x_3))^2$
$-90(\frac{1}{\sqrt{30}}(-5x_1 + x_2 + 2x_3))^2$
nebo $\kappa(x) = -60(\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x_2 + x_3))^2 - 60(\frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + x_2 + 2x_3))^2$
$-90(\frac{1}{\sqrt{30}}(-5x_1 + x_2 + 2x_3))^2]$,

(f) $\kappa(x) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 7x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 10x_1x_4 - 10x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4$,
$[\kappa(x) = 4(\frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4))^2 + 12(\frac{1}{\sqrt{2}}(-x_2 + x_3))^2$
$+12(\frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_4))^2]$.