Domácí cvičení č.8

23. Určete ortogonální bázi $v_1, v_2, \ldots$ prostoru $\mathcal{V}$ při skalárním násobení (u, v).

   (a) $\mathcal{V} = \mathbb{R}_3$, $(u, v) = u^T v$,
   $[v_1 = [1, 0, 0,]^T,\ v_2 = [0, 1, 0,]^T,\ v_3 = [0, 0, 1,]^T]$,

   (b) $\mathcal{V} = \mathbb{R}_3$, $(u, v) = u^T v$, ortogonální báze bude obsahovat prvek $v_1 = [1, 2, 2]^T$,
   $[v_1 = [1, 2, 2]^T,\ v_2 = [-2, 5, -4]^T,\ v_3 = [-2, 0, 1]^T]$,

   (c) $\mathcal{V}$ je generován prvky $u_1 = [2, -1, 4, 1, 3]^T$, $u_2 = [-1, 3, -1, 2, -2]^T$, $u_3 = [2, 1, 3, -3, 1]^T$, $u_4 = [3, 3, 6, 0, 2]^T$, $(u, v) = u^T v$,
   $[v_1 = [2, -1, 4, 1, 3]^T,\ v_2 = [-5, 80, 21, 75, -23]^T,$
   $v_3 = [83, 184, 105, -237, -55]^T]$,

   (d) $\mathcal{V}$ je generován prvky $u_1 = 1$, $u_2 = x + 3$, $u_3 = x^2 - 4x$, $(u, v) = \int_{-2}^{1} u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
   $[v_1 = 1,\ v_2 = x + \frac{1}{2},\ v_3 = x^2 + x - \frac{1}{2}]$,

   (e) $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2$, $(u, v) = \int_{-3}^{3} u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
   $[v_1 = 1,\ v_2 = x,\ v_3 = x^2 - 3]$.

24. Určete ortonormální bázi $e_1, e_2, \ldots$ prostoru $\mathcal{V}$ při skalárním násobení (u, v).

   (a) $\mathcal{V} = \mathbb{R}_3$, $(u, v) = u^T v$,
   $[e_1 = [1, 0, 0,]^T,\ e_2 = [0, 1, 0,]^T,\ e_3 = [0, 0, 1,]^T]$,

   (b) $\mathcal{V} = \mathbb{R}_3$, $(u, v) = u^T v$, ortonormální báze bude obsahovat číselný násobek prvku $v_1 = [1, 2, 2]^T$,
   $[e_1 = \frac{1}{3}[1, 2, 2]^T,\ e_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}[-2, 5, -4]^T,\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}[-2, 0, 1]^T]$,

   (c) $\mathcal{V}$ je generován prvky $u_1 = [2, -1, 4, 1, 3]^T$, $u_2 = [-1, 3, -1, 2, -2]^T$, $u_3 = [2, 1, 3, -3, 1]^T$, $u_4 = [3, 3, 6, 0, 2]^T$, $(u, v) = u^T v$,
   $[e_1 = \frac{1}{\sqrt{31}}[2, -1, 4, 1, 3]^T,\ e_2 = \frac{1}{2\sqrt{3255}}[-5, 80, 21, 75, -23]^T,$
   $e_3 = \frac{1}{2\sqrt{27741}}[83, 184, 105, -237, -55]^T]$,

   (d) $\mathcal{V}$ je generován prvky $u_1 = 1$, $u_2 = x + 3$, $u_3 = x^2 - 4x$, $(u, v) = \int_{-2}^{1} u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
   $[e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ e_2 = \frac{1}{3}(2x + 1),\ e_3 = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}(2x^2 + 2x - 1)]$,

   (e) $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2$, $(u, v) = \int_{-3}^{3} u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
   $[e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}},\ e_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}x,\ e_3 = \frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{6}}(x^2 - 3)]$.

25. Určete ortogonální průmět v_0 prvku v do podprostoru $\mathcal{L}_1$ prostoru $\mathcal{L}$ při skalárním násobení (u, v).

(a) $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$,
$\mathcal{L}_1$ je generován prvky $u_1 = [1, 2, -3]^T$, $u_2 = [0, 1, 3]^T$,
$v = [4, 5, 7]^T$, $(u, v) = u^T v$,

$[v_0 = \frac{1}{13}[16, 77, 87]^T]$,

(b) $\mathcal{L} = \mathbb{R}_6$,
$\mathcal{L}_1$ je generován prvky $u_1 = [1, 2, -1, 1, 3, 0]^T$, $u_2 = [-1, 1, 3, 0, -1, 2]^T$,
$u_3 = [3, -1, 0, 2, 1, -1]^T$, $u_4 = [3, 2, 2, 3, 3, 1]^T$,
$v = [-14, 11, 3, 10, -7, 0]^T$, $(u, v) = u^T v$,

$[v_0 = [-7, 6, 5, -3, -1, 6]^T]$,

(c) $\mathcal{L} = \mathcal{C}(0, 1)$,
$\mathcal{L}_1 = \mathcal{P}_1$,
$v = \operatorname{arctg} x$, $(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x$,

$[v_0 = (\frac{3}{2}\pi - 6 + 3\ln 2)x + (3 - \frac{\pi}{2} - 2\ln 2)]$,

(d) $\mathcal{L} = \mathcal{C}(-\pi, \pi)$,
$\mathcal{L}_1$ je generován prvky $u_1 = 1$, $u_2 = \sin x$, $u_3 = \cos x$, $u_4 = \sin 2x$, $u_5 = \cos 2x$,
$v = |x|$, $(u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)\mathrm{d}x$,

$[v_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x]$.

26. Metodou nejmenších čtverců určete funkci $f(x)$, která nejlépe aproximuje naměřené hodnoty.

(a) Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 2,

x	-2	-1	0	1	2	3
y(x)	-10,7	-6,7	-2,6	-2	-2,9	-6,1

$[f(x) = -x^2 + 2x - 3]$,

(b) Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 2,

x	-2	-1	0	0	1	1	1	2	3
y(x)	-10,7	-6,7	-2,6	-2,6	-2	-2	-2	-2,9	-6,1

$[f(x) = -1,014x^2 + 2,001x - 2,923]$,

(c) Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 1,

x	-5	-4	-2	-2	-1	-1	0	1	2
y(x)	0,5	0,9	2,2	2,1	2,4	2,5	2,9	3,4	4,1

$[f(x) = 0,5x + 3]$,

(d) Funkce $f(x)$ bude z prostoru $\mathcal{V}$, který je generován funkcemi $g_1 = 1$, $g_2 = \dfrac{1}{x-1}$, $g_3 = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

x	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2
$y(x)$	20,05	12,9	8	5,1	3,95

$[f(x) = 5 - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}]$.

27. Je dán podprostor $\mathcal{U}$ prostoru $\mathcal{L}$. Určete dimenzi a bázi ortogonálního doplňku $\mathcal{U}^\perp$ při skalárním násobení (u, v).

(a) $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$,
$\mathcal{U}$ je generován prvky $u_1 = [1, 2, -1, 3, 2]^T$, $u_2 = [-1, 2, 3, -1, 2]^T$, $u_3 = [1, 6, 1, 6, 3]^T$, $u_4 = [1, 10, 3, 8, 7]^T$,
$(u, v) = u^T v$,
$[\dim(\mathcal{U}^\perp) = 2$, báze je např. $v_1 = [-16, 0, -5, 3, 1]^T$, $v_2 = [-4, 1, -2, 0, 0]^T]$,

(b) $\mathcal{L} = \mathbb{R}_4$,
$\mathcal{U}$ je generován prvky $u_1 = [2, -1, 1, 3]^T$, $u_2 = [-1, 2, -1, 1]^T$, $u_3 = [3, 1, 2, -1]^T$,
$(u, v) = u^T v$,
$[\dim(\mathcal{U}^\perp) = 1$, báze je např. $v_1 = [-19, 3, 29, 4]^T]$,

(c) $\mathcal{L} = \mathcal{P}_4$,
$\mathcal{U}$ je generován prvky $u_1 = x^3 + x$, $u_2 = x - 2$, $u_3 = 2x^3 + 3x - 2$,
$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
$[\dim(\mathcal{U}^\perp) = 3$, báze je např. $v_1 = 900x^4 - 1225x^3 + 378x^2$,
$v_2 = 3456x^4 - 3528x^3 + 378x$, $v_3 = 14580x^4 - 13230x^3 + 378]$.