4

Lineární systémy (pokr.)

Miloš Schlegel

schlegel@kky.zcu.cz

Opakování: základní pojmy

1. Relace vstup-výstup libovolného spojitého lineárního stacionárního kauzálního systému lze vyjádřit ve tvaru

$$y(t) = \int_0^\infty h(t-t)u(t)dt = \int_0^\infty h(t)u(t-t)dt$$

kde $h(t)$ je tzv. váhová (neboli impulsní) funkce systému.

2. Laplaceova transformace: $$\mathrm{L}\{h(t)\} = H(s) = \int_0^\infty h(t)e^{-st}dt,$$

3. Inverzní Laplaceova Transformace: $$\mathrm{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = \frac{1}{2p\,j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} H(s)e^{st}ds.$$

4. Systém 1.řádu:

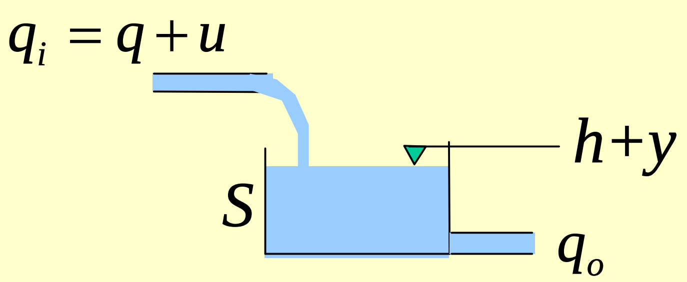
$$\dot{x} = ax + bu \qquad sX(s) = aX(s) + bU(s)$$

$$y = x \qquad Y(s) = X(s)$$

Systém 1.řádu je stabilní právě tehdy je-li $a < 0.$

$$a = -\frac{1}{T}, \quad b = \frac{K_0}{T} \qquad H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s-a} = \frac{K_0}{Ts+1}$$

Opakování: lineární systém 1.řádu



Linearizovaný model:

$$T\dot{y} + y = K_0 u$$

$$c = c\,\frac{g}{\sqrt{2hg}}$$

$$T = \frac{S}{c}, \quad K_0 = \frac{1}{c}$$

Rovnovážný stav: $u = 0, \quad y = 0$

Nelineární popis:

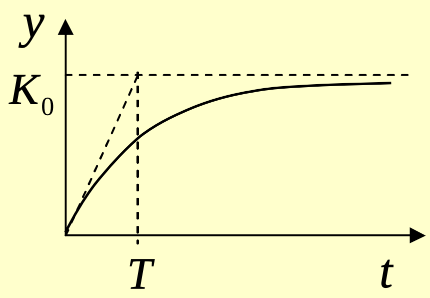
$$dy = \frac{(q_i - q_o)dt}{S}$$

$$\dot{y} = \frac{(q_i - q_o)}{S}$$

$$q_o = c\sqrt{2(h+y)g}$$

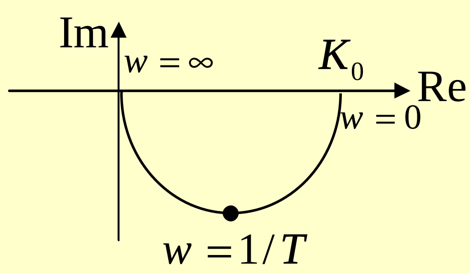
Přechodová char.

$$y(t) = K_0(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$



Frekvenční char.

$$F(jw) = \frac{K_0}{Tjw + 1}$$



Přenos systému

Přenos systému je podíl obrazu výstupu ku obrazu vstupu za nulových počátečních podmínek:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^\infty h(\tau)u(t-\tau)d\tau\right\}$$

$$\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty h(\tau)u(t-\tau)d\tau\right\}e^{-st}dt$$

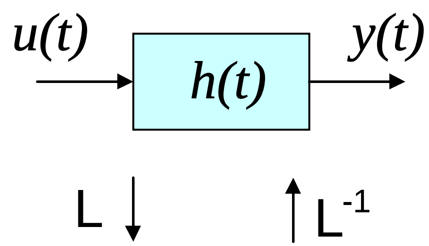
$$x = t-\tau \quad \Rightarrow \quad t = \tau + x \quad \Rightarrow \quad dt = dx$$

$$Y(s) = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty h(\tau)u(x)d\tau\right\}e^{-s\tau}e^{-sx}dx =$$

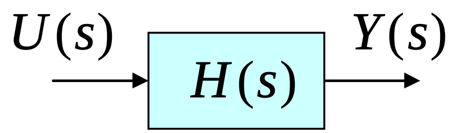
$$= \int_0^\infty h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \int_0^\infty u(x)e^{-sx}dx = H(s)U(s)$$

$$\Rightarrow$$

časová oblast:



oblast obrazů:

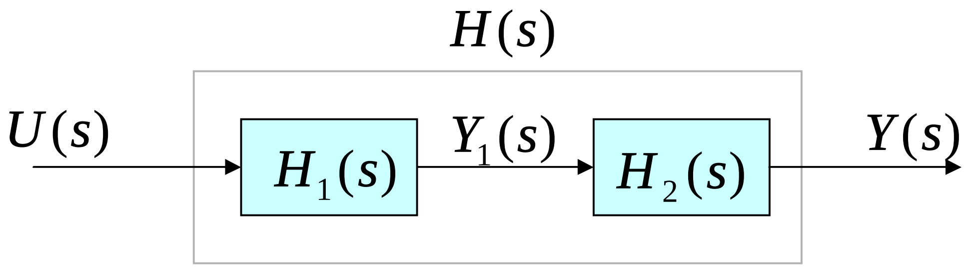


$$H(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{NPP}$$

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

Seriové spojení

Přenos sériově spojených dvou bloků s přenosy $H_1(s), H_2(s)$ je přenos $H(s) = H_1(s)H_2(s)$.

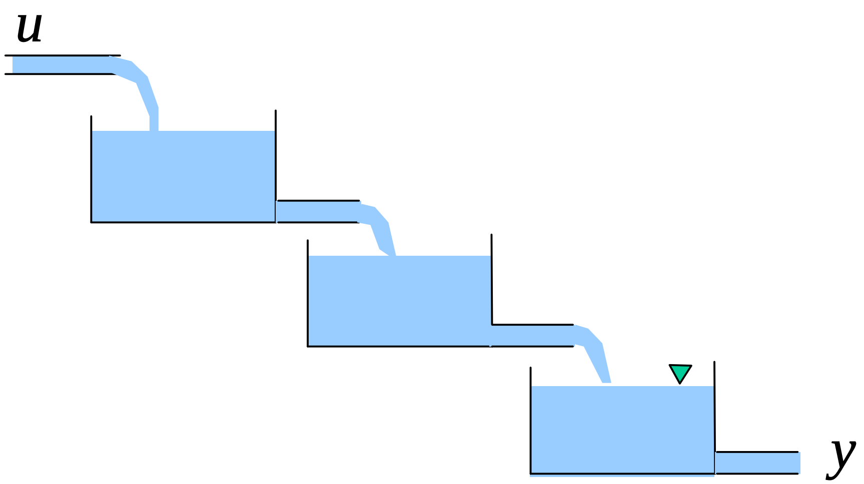


$$Y_1(s) = H_1(s)U(s)$$

$$Y(s) = H_2(s)Y_1(s) = H_1(s)H_2(s)U(s)$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$

Sériové spojení (pokr.)

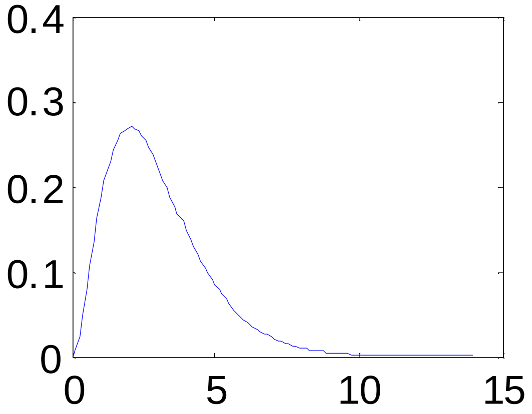


$$H_i(s) = \frac{K_0}{Ts+1}, \quad i = 1,2,3$$

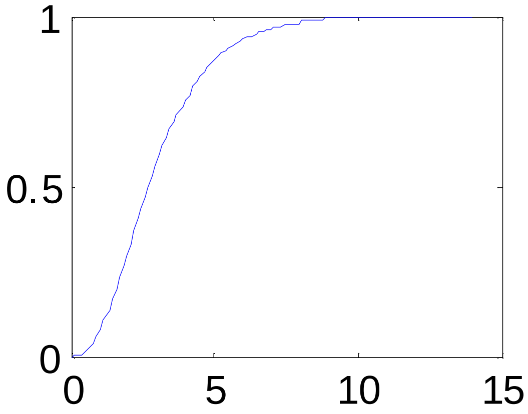
$$H(s) = \frac{K_0^3}{(Ts+1)^3}$$

$$K_0 = 1; \quad T = 1;$$

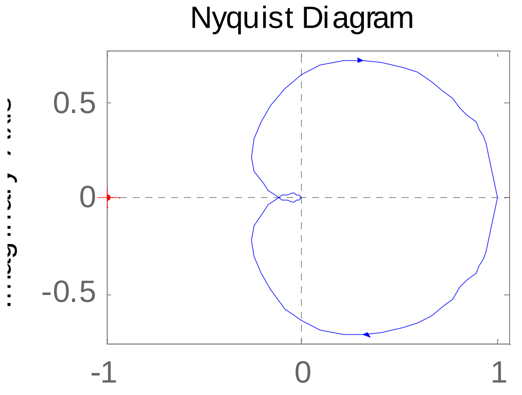
impulsní char.



přechodová char.



frekvenční char.



* Výpočet charakteristik sériového spojení v programu MATLAB – Control Toolbox

Ukázka programování v jazyku MATLAM (m-soubor):

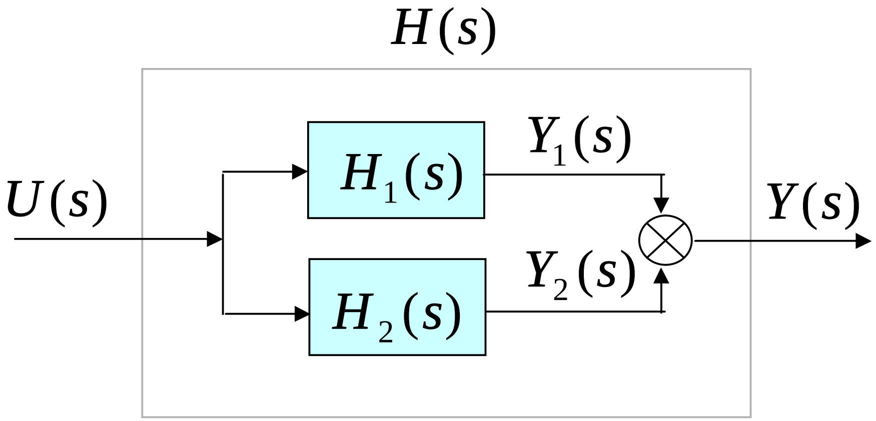
```
% imulsni charakteristika systemu utvoreneho seriovym spojenim
% tri stejnych systemu 1.radu s prenosem K0/(T*s+1)

K0=1;                              % staticke zesileni systemu 1.r.
T=1;                               % casova konstanta systemu 1.r.
citatel=[K0^3];                    % citatel prenosu serioveho spojeni
jmenovatel=[T^3 3*T^2 3*T 1];      % jmenovatel prenosu serioveho spojeni
H=tf(citatel,jmenovatel);          % prenos serioveho spojeni

[h t]=impulse(H);                  % vypocet impulsni char.
plot(t,h);                         % vykresleni impulsni char.
[g t]=step(H);                     % vypocet prechodove char.
plot(t,g);                         % vykresleni prech. char.
nyquist(H);                        % vypocet + vykresleni frkvencni char.
```

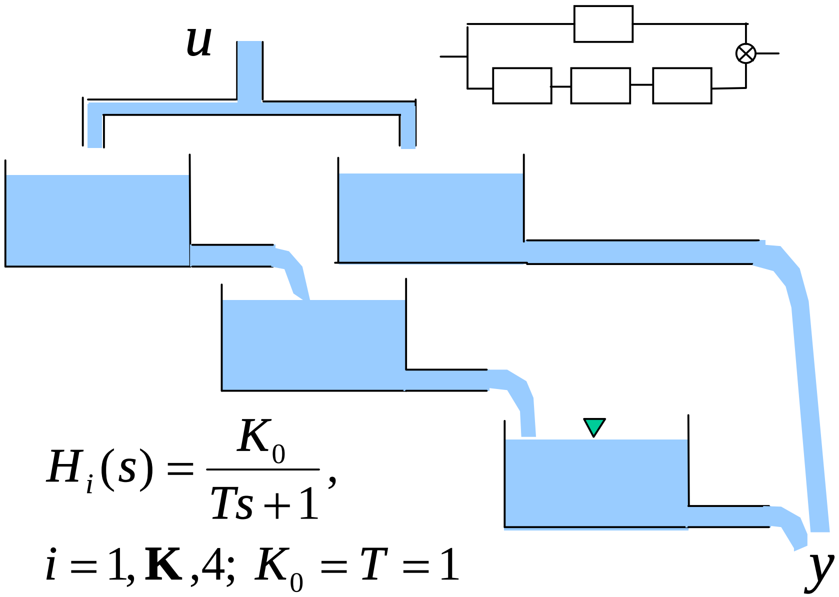
Paralelní spojení

Přenos paralelního spojených dvou bloků s přenosy $H_1(s), H_2(s)$
je přenos $H(s) = H_1(s) + H_2(s)$.



$$Y_1(s) = H_1(s)U(s)$$
$$Y_2(s) = H_2(s)U(s)$$
$$Y(s) = \{H_1(s) + H_2(s)\}U(s)$$

Sério-paralelní spojení (pokr.)



$$H_i(s) = \frac{K_0}{Ts+1},$$

$$i = 1, \ldots, 4;\ K_0 = T = 1$$

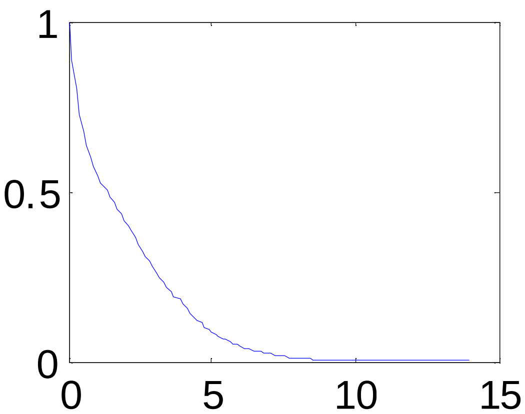
$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)H_3(s)H_4(s) =$$

$$= \frac{K_0}{Ts+1} + \frac{K_0^3}{(Ts+1)^3} =$$

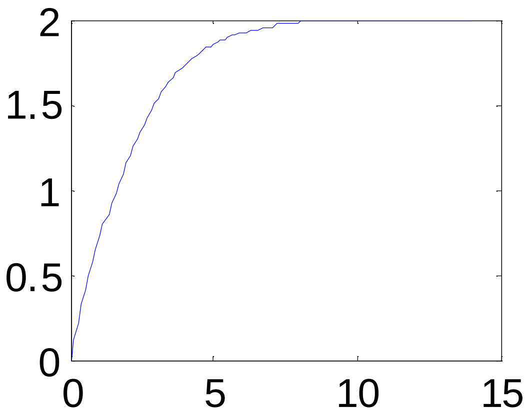
$$= \frac{K_0(Ts+1)^2 + K_0^3}{(Ts+1)^3}$$

$$H(s) = \frac{K_0(T^2s^2 + 2Ts + K_0^2 + 1)}{T^3s^3 + 3T^2s^2 + 3Ts + 1}$$

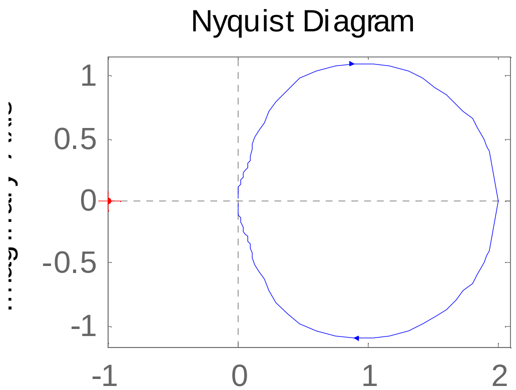
impulsní char.



přechodová char.



frekvenční char.



* Výpočet charakteristik sério-paralelního spojení v programu MATLAB – Control Toolbox

Ukázka programování v jazyku MATLAM (m-soubor):

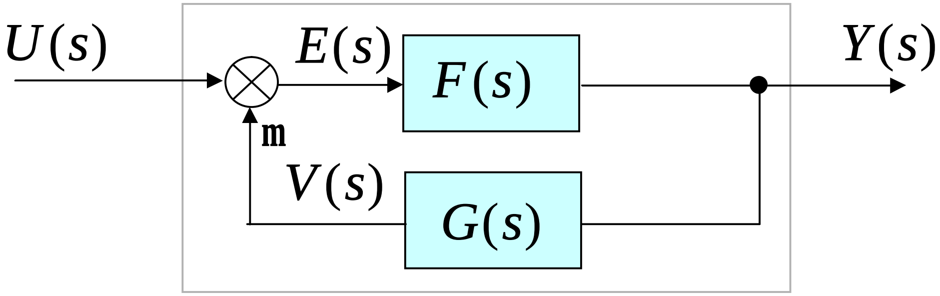
```
% charakteristiky serio-paralelniho spojeni ctyr stejnych systemu
% 1.radu s prenosem K0/(T*s+1)
K0=1;                          % staticke zesileni systemu 1.r.
T=1;                           % casova konstanta systemu 1.r.
citatel=[K0];                  % citatel prenosu jedne nadoby
jmenovatel=[T 1];              % jmenovatel prenosu jedne nadoby
H1=tf(citatel,jmenovatel);     % prenos jedne nadoby
H=H1+H1^3;                     % prenos serio-paralelniho spojeni
[h t]=impulse(H);              % vypocet imp. char.
plot(t,h);                     % vykresleni imp. char.
[g t]=step(H);                 % vypocet prechodove char.
plot(t,g);                     % vykresleni prech. char.
nyquist(H);                    % vypocet a vykresleni frekv. char.
```

Zpětnovazební spojení

Přenos zpětnovazebního spojených dvou bloků s přenosy $F(s), G(s)$, kde $F(s)$ je přenos přímé větve a $G(s)$ je přenos zpětnovazební větve, je přenos

$$H(s) = \frac{F(s)}{1 \pm F(s)G(s)}.$$

pro zápornou zpětnou vazbu platí znaménko plus



$$E(s) = U(s) \mp V(s)$$

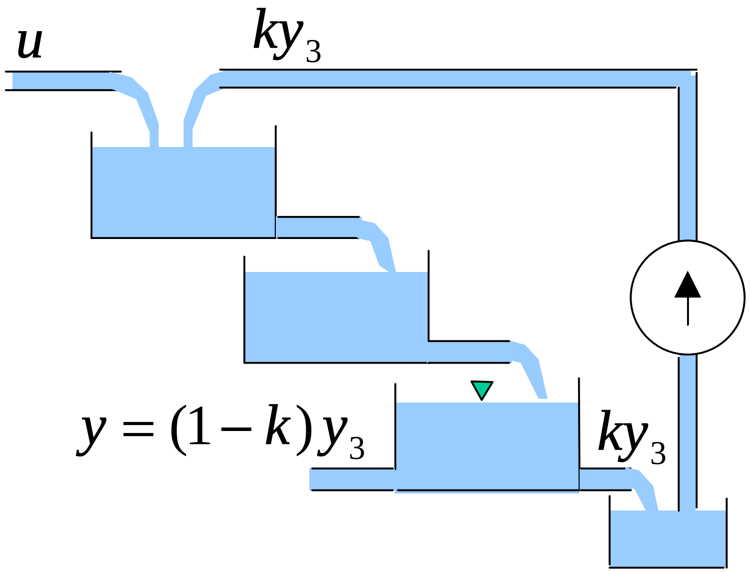
$$V(s) = G(s)Y(s)$$

$$Y(s) = F(s)E(s) = F(s)U(s) \mp F(s)G(s)Y(s)$$

$$\left(1 \pm F(s)G(s)\right)Y(s) = F(s)U(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{F(s)}{1 \pm F(s)G(s)}$$

Zpětnovazební spojení (pokr.)



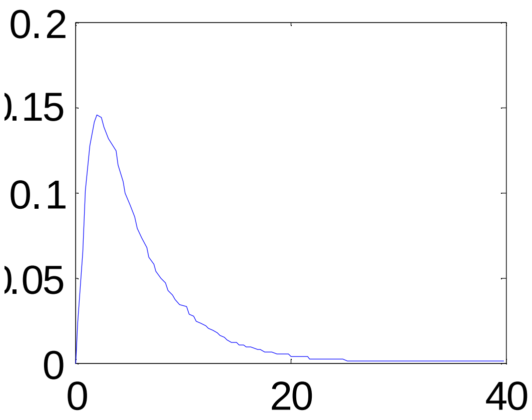
$$H_i(s)=\frac{K_0}{Ts+1},\quad i=1,2,3$$

$$K_0=T=1;\quad k=0.5;$$

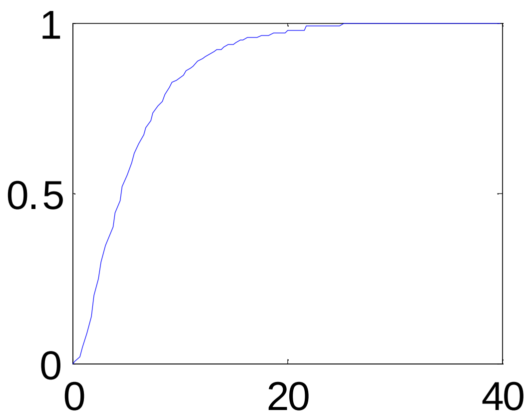
$$H(s)=\frac{(1-k)H_1^3(s)}{1-kH_1^3(s)}=$$

$$=\frac{(1-k)K_0^3}{T^3s^3+3T^2s^2+3Ts+1-kK_0^3}$$

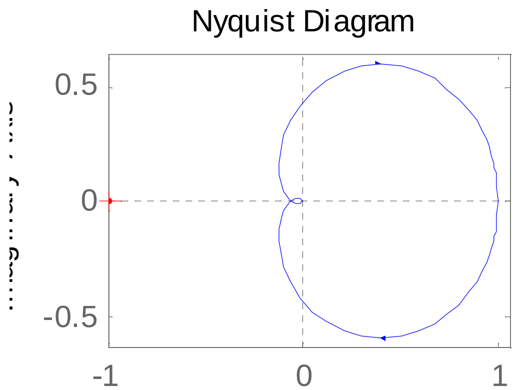
impulsní char.



přechodová char.



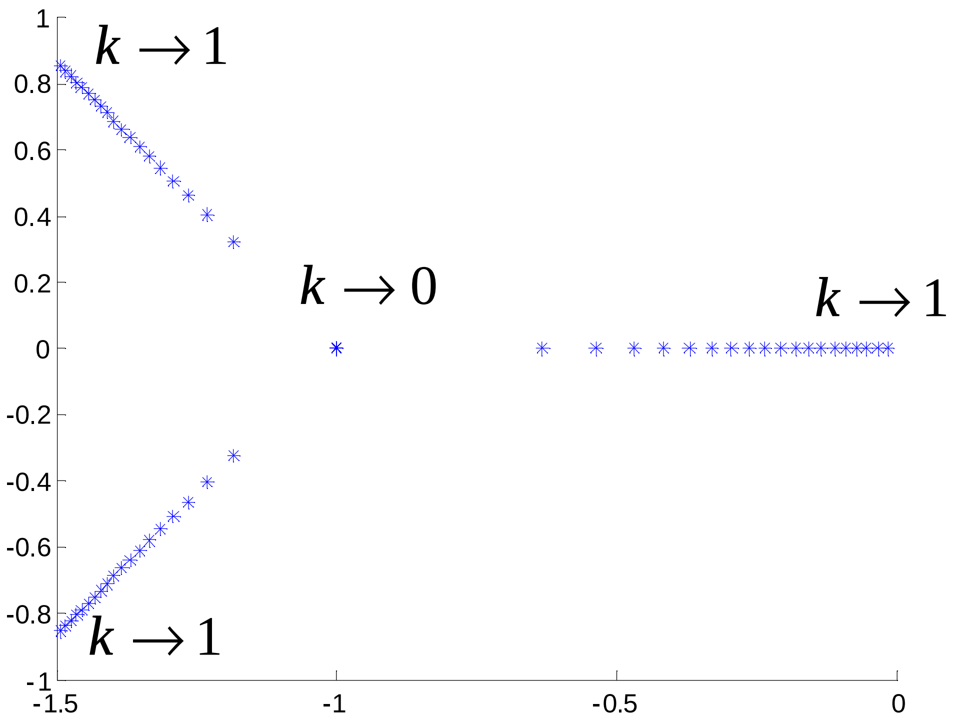
frekvenční char.



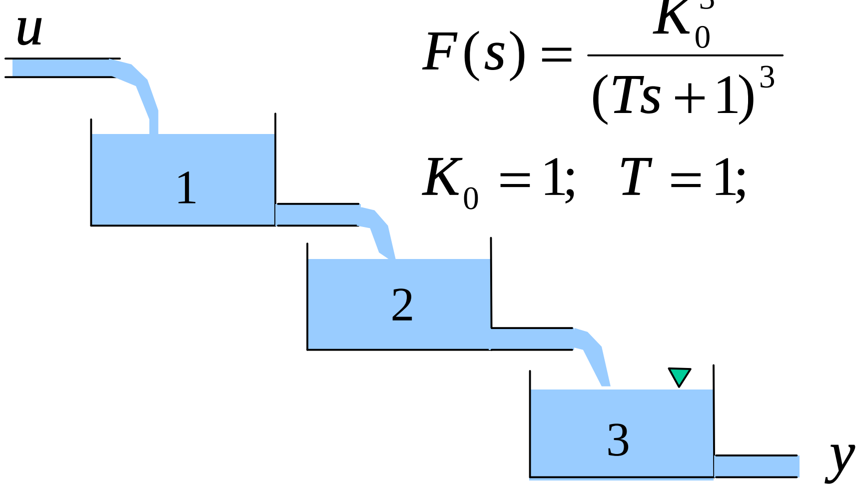
*Zpětnovazební spojení (pokr.)

Závislost pólů na parametru k …

$$H(s) = \frac{(1-k)H_1^3(s)}{1-kH_1^3(s)} = \frac{(1-k)K_0^3}{T^3s^3 + 3T^2s^2 + 3Ts + 1 - kK_0^3}$$



Návrh regulátoru hladiny

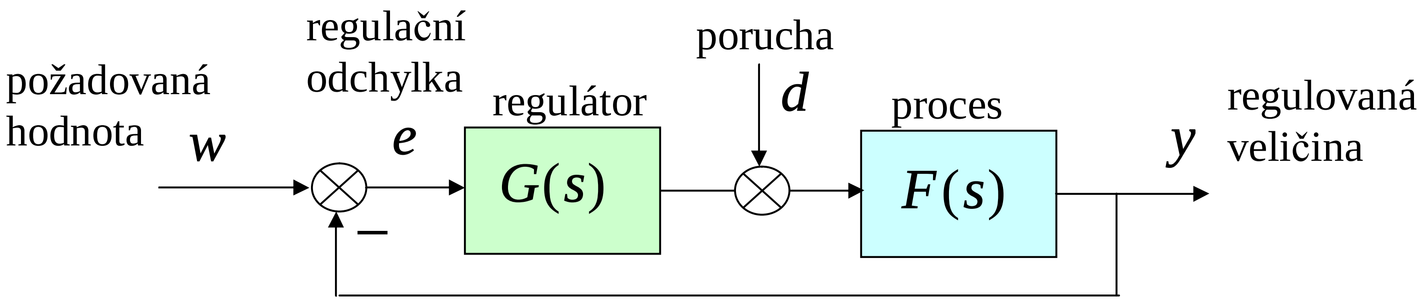


$$F(s) = \frac{K_0^3}{(Ts+1)^3}$$

$$K_0 = 1; \quad T = 1;$$

Požadavky:

1. Hladina v třetí nádrži má být regulována přítokem do prvé nádrže na požadovanou hodnotu s vysokou přesností.
2. Požadavek (1) je splněn v ustáleném stavu i při skokových poruchách působících na řízený systém.



Problém návrhu regulátoru spočívá v nalezení vhodného přenosu $G(s)$.

Návrh regulátoru hladiny (pokr.1)

Nejprve proporcionální regulátor …

$$G(s) = K$$

$$F(s) = \frac{K_0^3}{(Ts+1)^3}, \quad K_0 = 1,\ T = 1$$

$$Q(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{\dfrac{KK_0^3}{(Ts+1)^3}}{1+\dfrac{KK_0^3}{(Ts+1)^3}} = \frac{KK_0^3}{T^3s^3+3T^2s^2+3Ts+1+KK_0^3}$$

Základní požadavek na regulační smyčku je stabilita. Odtud plyne, že všechny póly přenosu $Q(s)$ musí ležet v levé polorovině komplexní roviny. Póly přenosu $Q(s)$ obdržíme řešením rovnice

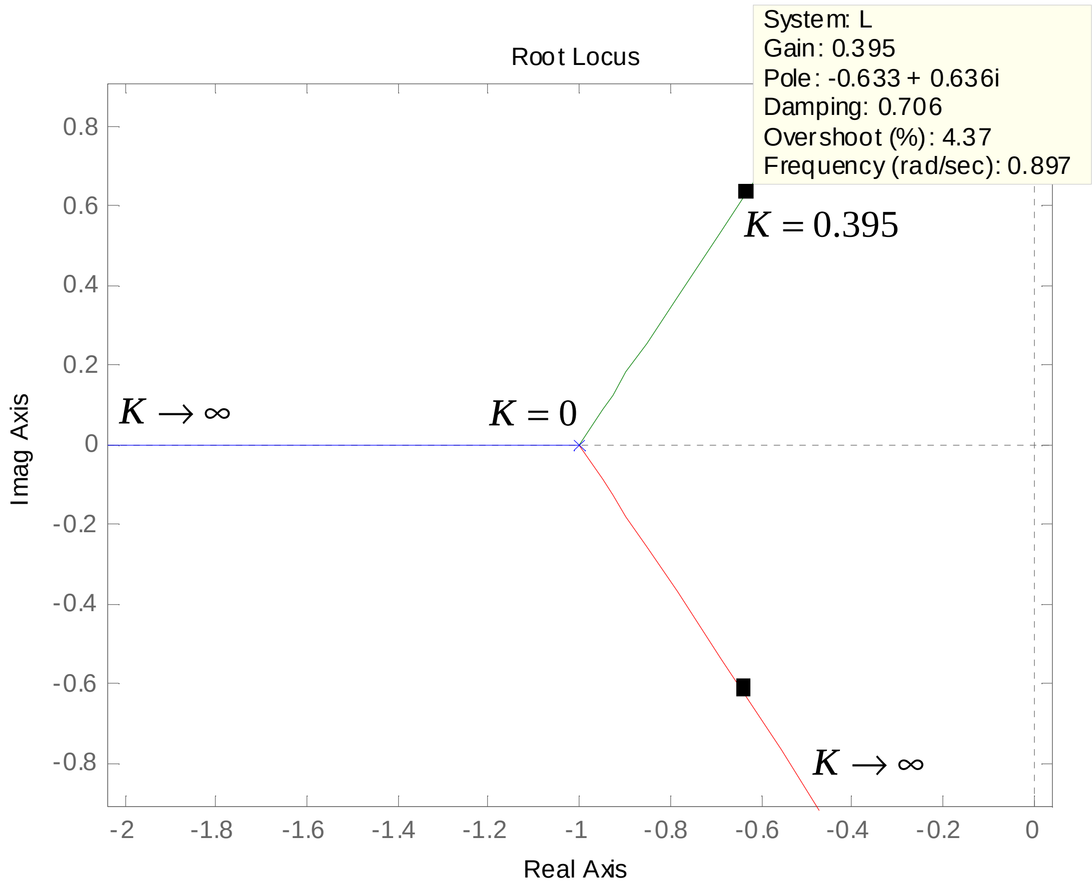
$$T^3s^3+3T^2s^2+3Ts+1+KK_0^3 = 0$$

$$s^3+3s^2+3s+1+K = 0$$

Návrh regulátoru hladiny (pokr.2)

Jak závisí poloha pólů na zesílení regulátoru *K* ?

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K = 0$$



% MATLAB-vypocet

% geometrickeho mista

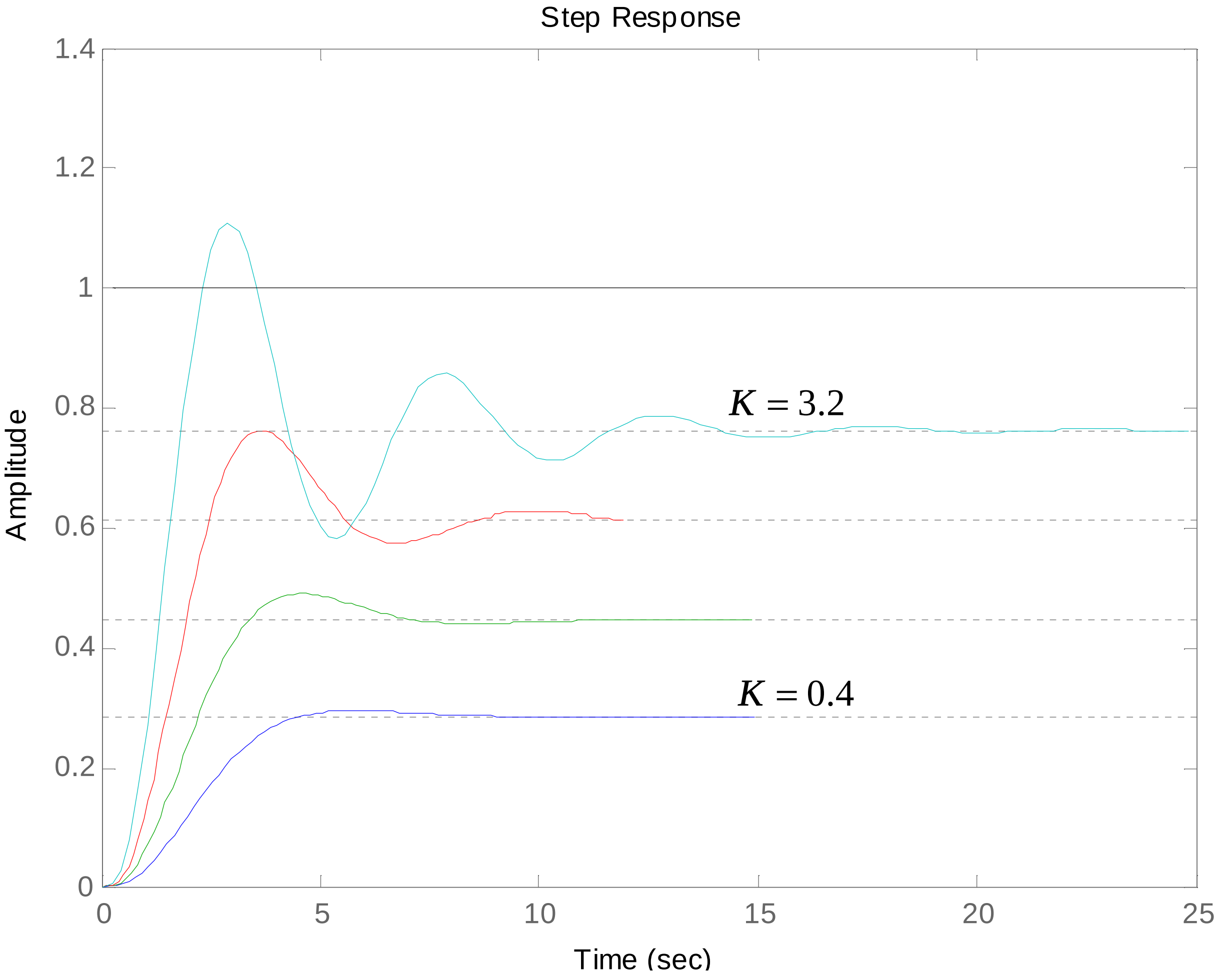
% korenu

L=H^3;

rlocus(L);

Návrh regulátoru hladiny (pokr.3)

Jak závisí přechodová charakteristika uzavřené smyčky na zesílení regulátoru K ?



Rozpor mezi přesností a stabilitou regulační smyčky u proporcionálního regulátoru nelze úspěšně vyřešit.

Návrh regulátoru hladiny (pokr.4)

Nyní zkusme PI (proporcionálně-integrační) regulátor …

$$G(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$F(s) = \frac{K_0^3}{(Ts+1)^3}, \quad K_0 = 1, T = 1$$

$$Q(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{K\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)\frac{K_0^3}{(Ts+1)^3}}{1+K\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)\frac{K_0^3}{(Ts+1)^3}} = \frac{K(T_i s+1)K_0^3}{T_i s(Ts+1)^3 + K(T_i s+1)K_0^3}$$

Póly přenosu $Q(s)$ obdržíme řešením rovnice

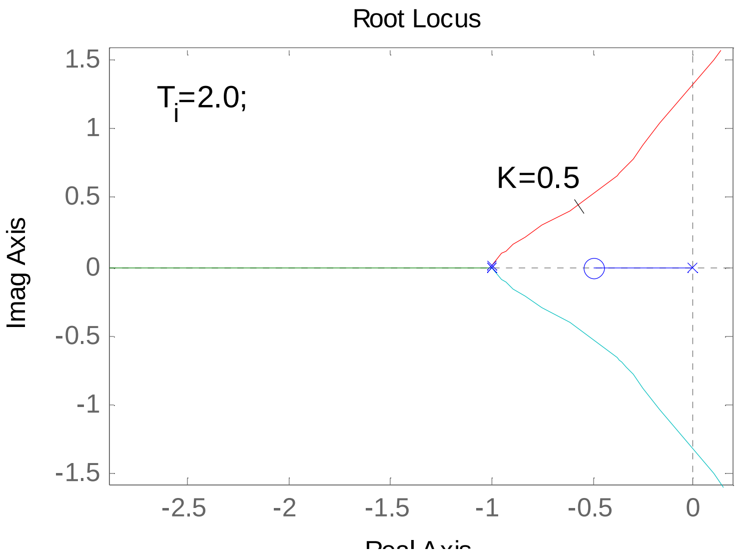
$$T_i s(Ts+1)^3 + K(T_i s+1)K_0^3 = 0$$

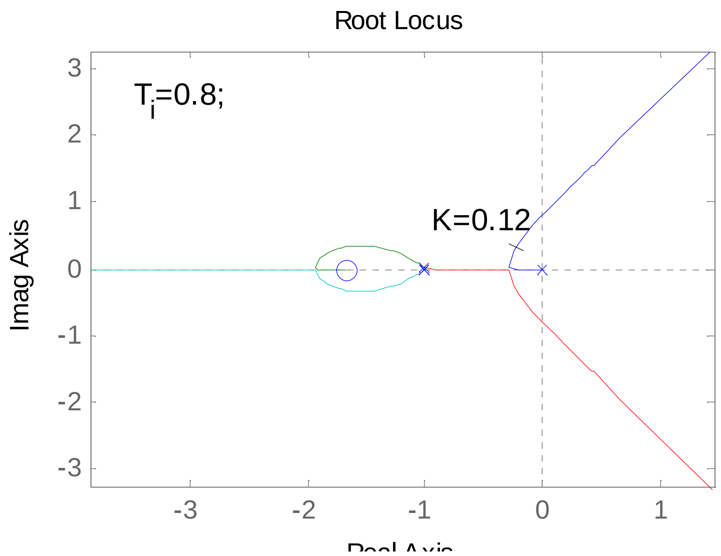
$$T_i\left(s^4 + 3s^3 + 3s^2\right) + T_i(1+K)s + K = 0$$

Návrh regulátoru hladiny (pokr.5)

Jak závisí poloha pólů na zesílení regulátoru K a integrační časové konstantě T_i ?

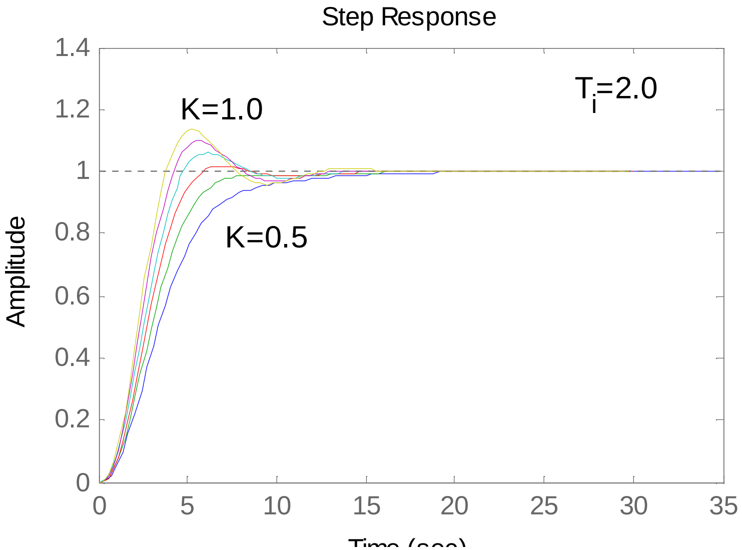
$$T_i\left(s^4+3s^3+3s^2\right)+T_i\left(1+K\right)s+K=0$$

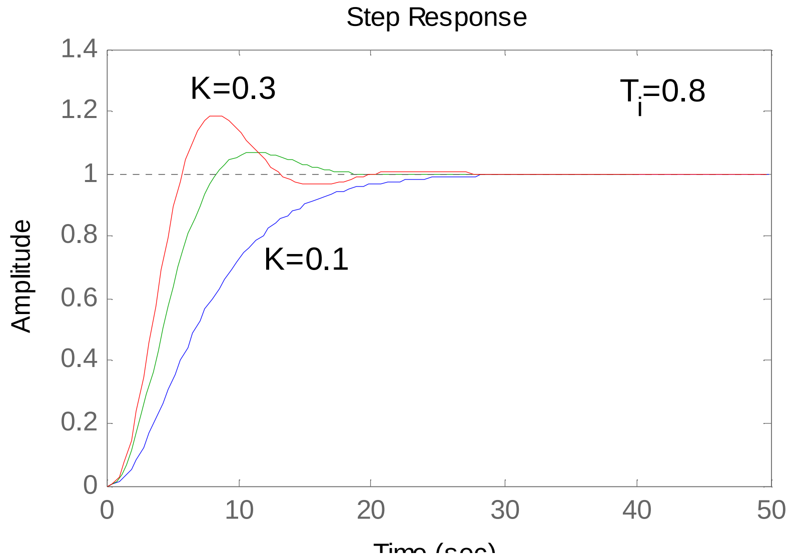




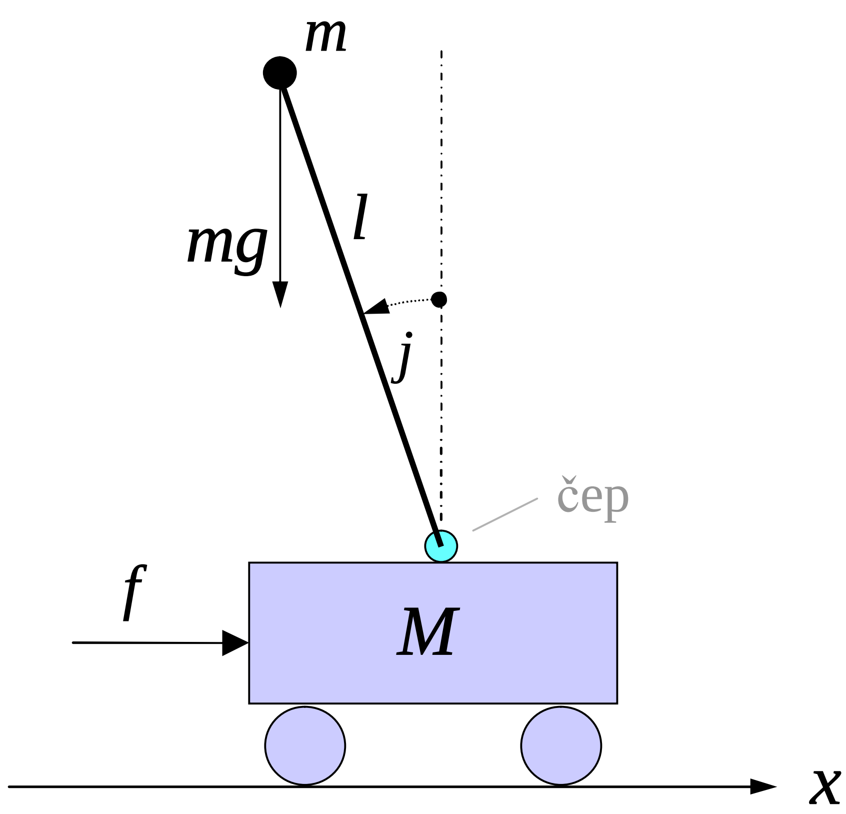
Návrh regulátoru hladiny (pokr.6)

Jak závisí přechodová charakteristika uzavřené smyčky na zesílení regulátoru *K* a integrační časové konstantě T_i ?





Inverzní kyvadlo na vozíku



m	hmota kyvadla
l	délka kyvadla
g	gravitační zrychlení
M	hmota vozíku
f	urychlovací síla
j	úhel kyvadla
x	poloha vozíku
J	moment setrvačnosti kyvadla

Inverzní kyvadlo na vozíku (pokr.1)

Pohybové rovnice:

kyvadlo:

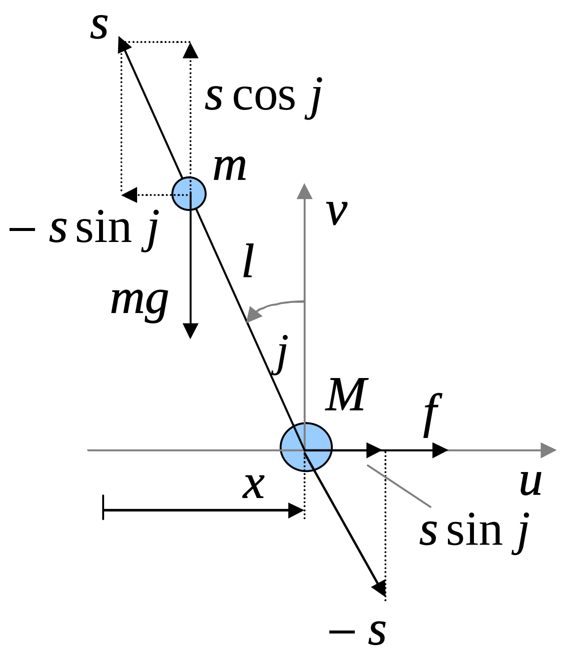
$$f_u = -\sigma \sin\varphi = m\ddot{u}$$
$$f_v = \sigma \cos\varphi - mg = m\ddot{v}$$
$$m\ddot{u} + \sigma \sin\varphi = 0$$
$$m\ddot{v} - \sigma\cos\varphi + mg = 0$$
$$m\ddot{u}\cos\varphi + \sigma\sin\varphi\cos\varphi = 0$$
$$m\ddot{v}\sin\varphi - \sigma\sin\varphi\cos\varphi + mg\sin\varphi = 0$$
$$m\ddot{u}\cos\varphi + m\ddot{v}\sin\varphi + mg\sin\varphi = 0$$

$$m\ddot{x}\cos\varphi - ml\ddot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0$$

vozík:

$$M\ddot{x} = f + \sigma\sin\varphi$$
$$M\ddot{x} = f - m\ddot{u}$$

$$(M+m)\ddot{x} + ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi - ml\ddot{\varphi}\cos\varphi = f$$



vtahy mezi souřadnicemi:

$$u = x - l\sin\varphi$$
$$v = l\cos\varphi$$
$$\ddot{u} = \ddot{x} + l\dot{\varphi}^2\sin\varphi - l\ddot{\varphi}\cos\varphi$$
$$\ddot{v} = -l\dot{\varphi}^2\cos\varphi - l\ddot{\varphi}\sin\varphi$$

Inverzní kyvadlo na vozíku (pokr.2)

Odvození lineárního stavového modelu:

Vyjdeme z pohybových rovnic

$$m\ddot{x}\cos\varphi - ml\ddot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0$$

$$(M+m)\ddot{x} + ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi - ml\ddot{\varphi}\cos\varphi = f.$$

Linearizací v nestabilním rovn. bodě obdržíme:

$$m\ddot{x} - ml\ddot{\varphi} = -mg\varphi$$

$$(M+m)\ddot{x} - ml\ddot{\varphi} = f$$

po úpravě:

$$\ddot{x} = \frac{mg}{M}\varphi + \frac{f}{M}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{(M+m)g}{Ml}\varphi + \frac{f}{Ml}$$

Zaveďme stavové proměnné:

$x_1 = x$	poloha vozíku
$x_2 = \dot{x}$	rychlost vozíku
$x_3 = \varphi$	úhel kyvadla
$x_4 = \dot{\varphi}$	úhlová rychlost kyvadla

Nyní již snadno obdržíme stav. model:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{mg}{M}x_3 + \frac{1}{M}f$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{(M+m)g}{Ml}x_3 + \frac{1}{Ml}f$$

Inverzní kyvadlo na vozíku (pokr.3)

Maticová forma stavového modelu:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mg/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (M+m)g/Ml & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ 1/Ml \end{bmatrix} f$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bf} \quad \equiv \quad (\mathbf{A}, \mathbf{b})$$

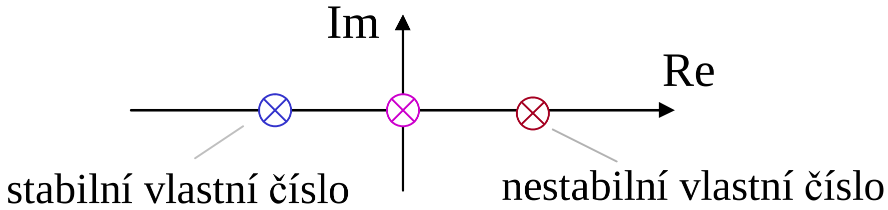
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mg/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (M+m)g/Ml & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ 1/Ml \end{bmatrix}$$

Inverzní kyvadlo na vozíku (pokr.4)

Vlastnosti stavového modelu:

Systém (A,b) je nestabilní

$$s\,(\mathbf{A}) = \left\{0,0,\pm\sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}\right\}$$



Systém (A,b) je řiditelný.

Matice řiditelnosti má plnou hodnost, tj.

$$rank\begin{bmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} & \mathbf{A}^3\mathbf{b}\end{bmatrix} = 4$$

Inverzní kyvadlo na vozíku (pokr.5)

Stavová zpětná vazba:

Problém přiřazení pólů: nalezni stavovou zpětnou vazbu **k** ve tvaru

$$\mathbf{f} = \mathbf{kx} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4$$

tak, že

$$s(\mathbf{A} + \mathbf{bk}) = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$$

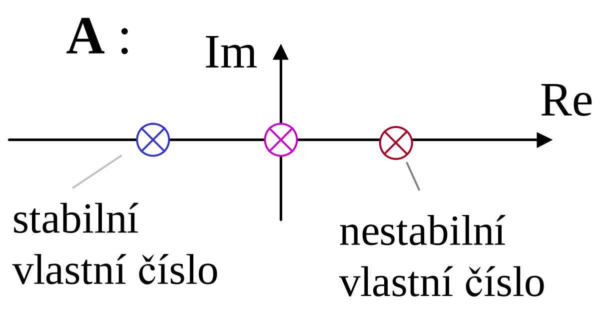
kde $l_1, \ldots, l_4$ jsou vhodná komplexní čísla (návrhové parametry)

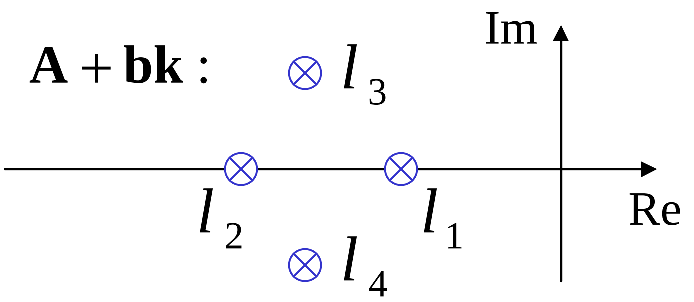
tak, že

$$\operatorname{Re} l_i < 0 \quad i = 1, \ldots, 4$$

Věta: Jestliže je system (**A**,**b**) řiditelný, potom pro libovolnou symetrickou množinu $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ existuje stavová zpětná vazba **k** taková, že

$$s(\mathbf{A} + \mathbf{bk}) = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$$





Inverzní kyvadlo na vozíku (pokr.6)

Výpočet stavové zpětné vazby:

$$s\,(\mathbf{A}+\mathbf{bk}) = \{l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4\} \qquad (*)$$

c

$\mathbf{A}+\mathbf{bk}$ je podobná matici $\mathbf{L} = diag\{l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4\}$

c

$\exists\mathbf{T}$ regulární $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{bk})\mathbf{T} = \mathbf{L}$

$$\mathbf{AT}+\mathbf{bkT}-\mathbf{TL} = 0$$

$$\mathbf{AT}-\mathbf{TL}+\mathbf{bh} = 0, \quad \mathbf{h} = \mathbf{kT}$$

Jestliže $\mathbf{T}$ je regulární řešení maticové rovnice

$$\mathbf{AT}-\mathbf{TL}+\mathbf{bh} = 0, \quad \mathbf{h} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1],$$

potom vektor zesílení $\mathbf{k} = \mathbf{hT}^{-1}$ splňuje podmínku (*), neboť

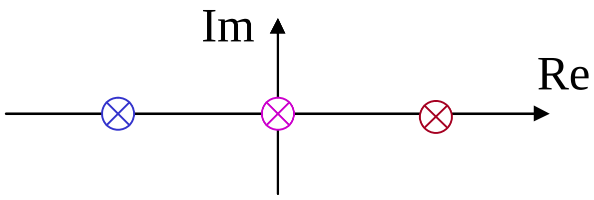
$$(\mathbf{A}+\mathbf{bk})\mathbf{T} = \left(\mathbf{A}+\mathbf{bhT}^{-1}\right)\mathbf{T} = \mathbf{AT}+\mathbf{bh} = \mathbf{TL}$$

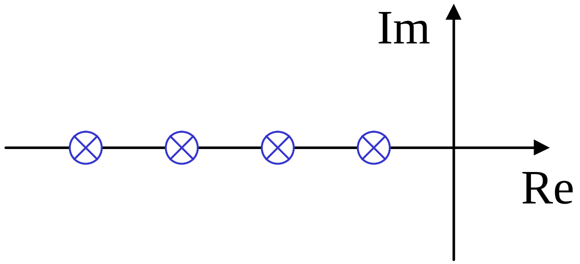
Inverzní kyvadlo na vozíku (pokr.6)

Příklad:

$$m = 0.1kg, \quad M = 2kg, \quad l = 0.5m, \quad g = 9.81 m/s^2$$

$$s(\mathbf{A}) = \{0, 0, -4.53, 4.53\} \qquad s(\mathbf{A} + \mathbf{bk}) = \{-4, -3, -2, -1\}$$





$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 2.44 & 5.10 & -56.8 & -12.5 \end{bmatrix}$$

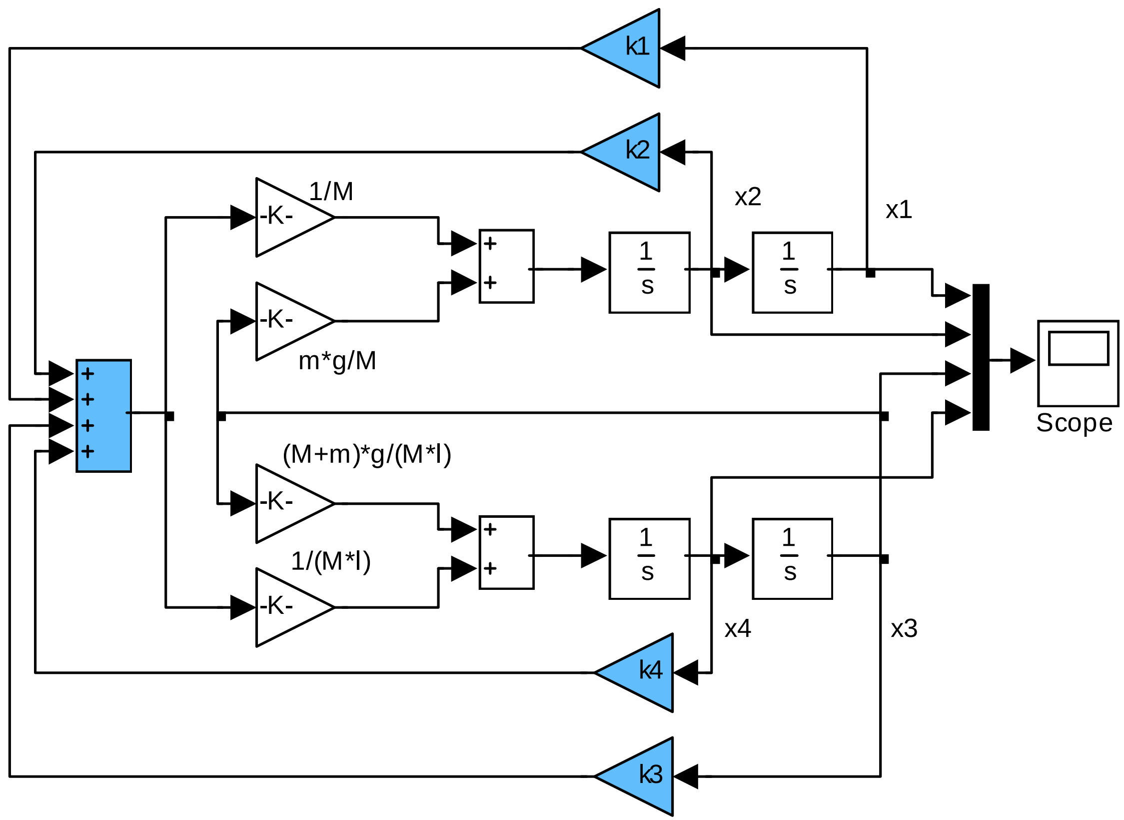
Inverzní kyvadlo na vozíku (pokr.6)

Výpočet stavové zpětné vazby v MATLABu:

```
% inverzni kyvadlo na voziku - vypocet stabilizujici stavove zpetne vazby
m=0.1;                          % parametry
M=2.0;
l=0.5;
g=9.81;
A=[ 0 1 0               0;      % stavovy model
    0 0 m*g/M           0;
    0 0 0               1;
    0 0 (M+m)*g/(M*l) 0];
b=[0; 1/M; 0; 1/(M*l)];
L=diag([-1,-2,-3,-4]);          % pozadovane rozmisteni polu
h=[1 1 1 1];
% reseni maticove rovnice
T=lyap(A,-L,b*h)
k=h*inv(T)                      % stabilizujici stavova zpetna vazba
eig(A), eig(A+b*k)              % kontrola
```

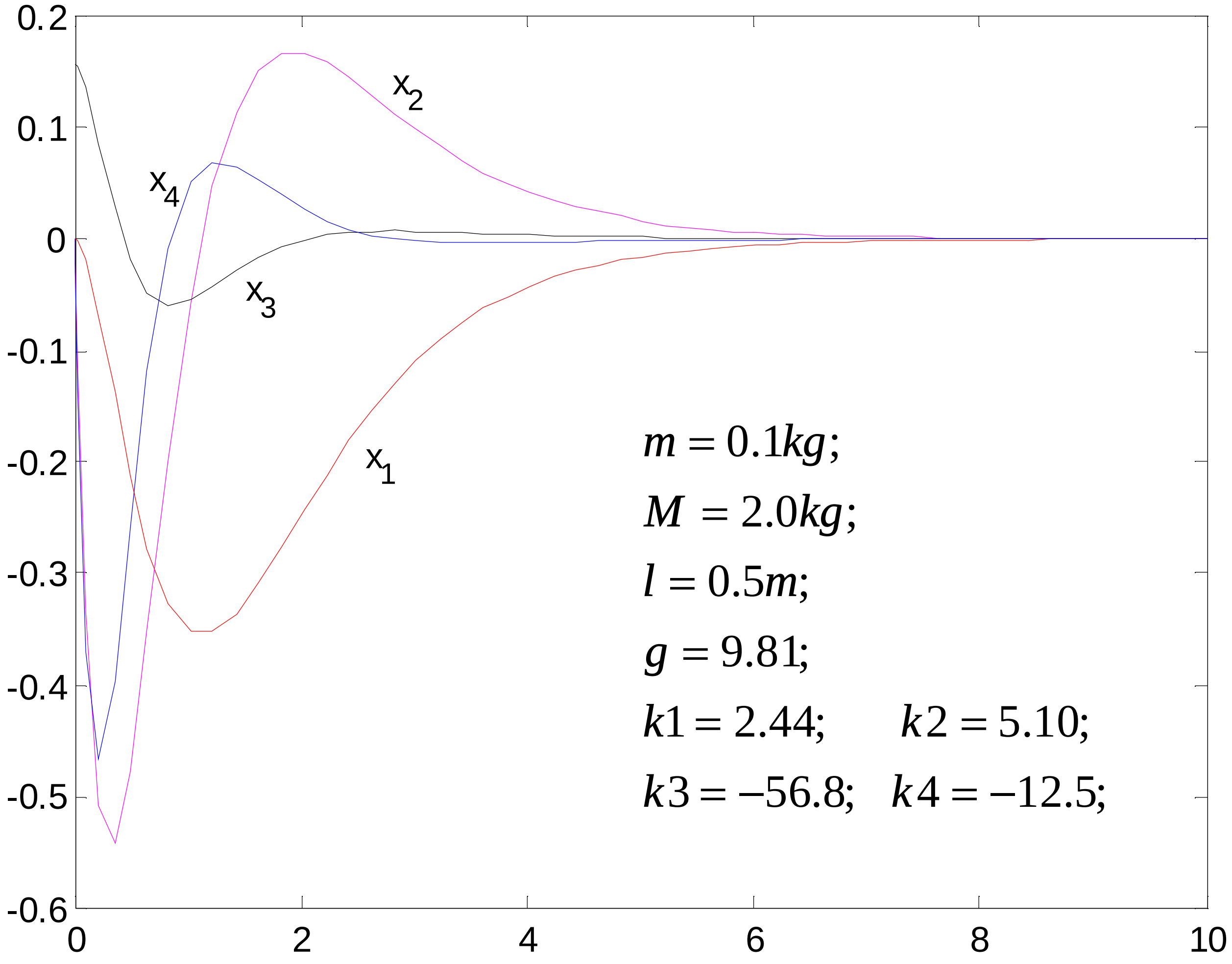
Inverzní kyvadlo na vozíku (pokr.7)

Simulace inverzního kyvadla na vozíku v programu Simulink:



Inverzní kyvadlo na vozíku (pokr.8)

Simulace inverzního kyvadla na vozíku v programu Simulink:



Interaktivní procvičení základních pojmů

http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html

http://www.jhu.edu/~virtlab/virtlab.html