

3

Lineární systémy

Miloš Schlegel

schlegel@kky.zcu.cz

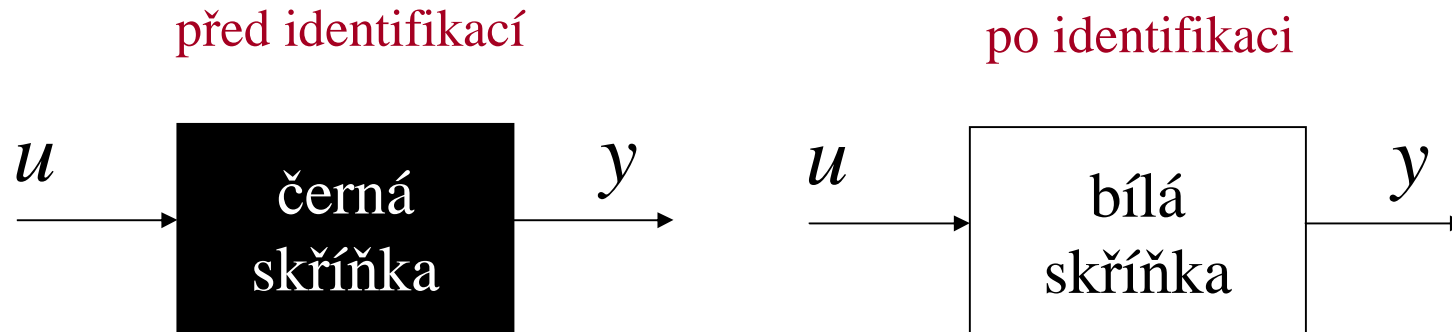
Pojem černé skříňky



Předpoklady:

1. Vstup u a výstup y jsou reálná funkce reálné proměnné t .
2. Výstup $y(t)$ je jednoznačně určen průběhem funkce $u(t)$ na intervalu $(-\infty, t]$, neboli $y = Lu$ (jde o kauzální systém).
3. Pozorovatel nemá žádnou apriorní informaci o vnitřku černé skříňky může však experimentovat se vstupem a sledovat výstup.
4. Na počátku experimentu ($t = 0$) je černá skříňka v klidu, jinými slovy $u(t) = konst$ na intervalu $(-\infty, 0]$.

Problém identifikace systému



Problém identifikace systému spočívá v odhalení mechanismu (operátoru L), který transformuje vstup

$$u(t), \quad t \in (-\infty, t]$$

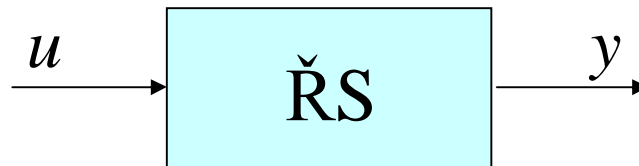
na výstup

$$y(t), \quad t \in (-\infty, t].$$

Cíl identifikace je tedy nalézt matematický popis chování systému obvykle za účelem jeho řízení.

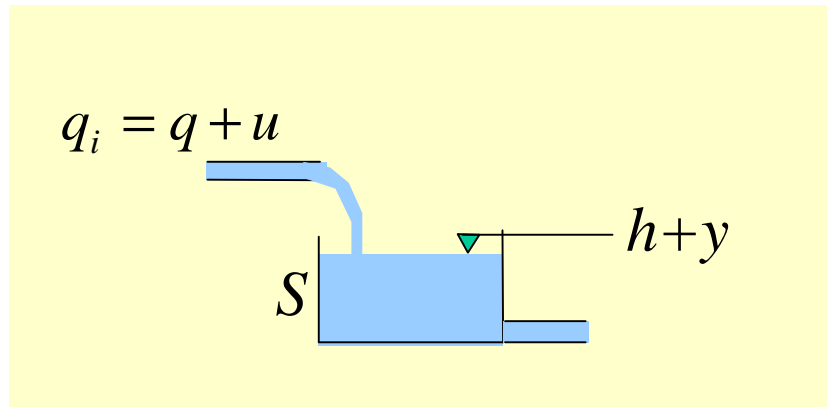
Vlastnosti řízených soustav

Pro potřeby teorie dělíme řízené systémy na ...



- Deterministické / stochastické systémy
- Lineární / nelineární systémy
- Stacionární (t-invariantní) / nestacionární systémy

Příklad: regulace hladiny v nádrži



Rovnovážný stav: $u = 0, y = 0$

$S [m^2]$	průřez nádrže
$q [m^3 / s]$	konstantní přítok
$u [m^3 / s]$	regulovatelný přítok
$h [m]$	hladina při $u = 0$
$y [m]$	odchylka hladiny od h způsobená regulovatelnou složkou přítoku u
c	výtokový koeficient

Nelineární popis:

$$dy = \frac{(q_i - q_o)dt}{S}$$

$$\mathbf{x} = \frac{(q_i - q_o)}{S}$$

$$q_o = c\sqrt{2(h+y)g}$$

Linearizovaný model:

$$T\dot{\mathbf{x}} + y = K_0 u$$

$$c = c \frac{g}{\sqrt{2hg}}$$

$$T = \frac{S}{c}, \quad K_0 = \frac{1}{c}$$

$$\mathbf{x} = ax + bu$$

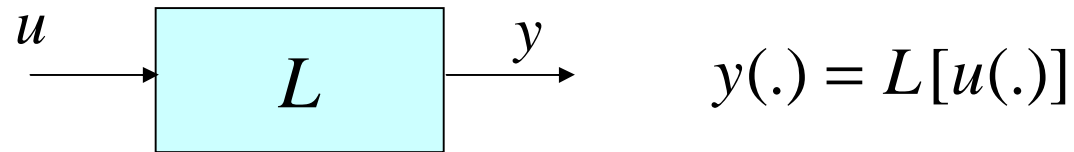
$$y = x$$

$$a = -\frac{1}{T}, \quad b = \frac{K_0}{T}$$

Výsledný model představuje
lineární systém 1.řádu!

Lineární stacionární systémy

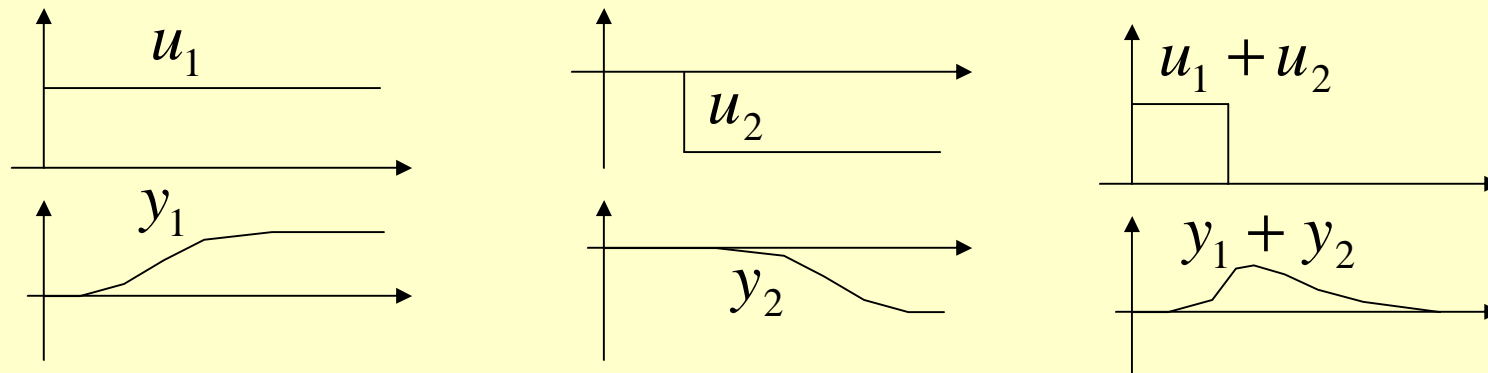
V praxi použitelná teorie existuje pouze pro lineární stacionární systémy ...



linearita (princip superpozice)

$$\forall u_1, u_2; \forall a_1, a_2 :$$

$$L[a_1 u_1(.) + a_2 u_2(.)] = a_1 L[u_1(.)] + a_2 L[u_2(.)]$$



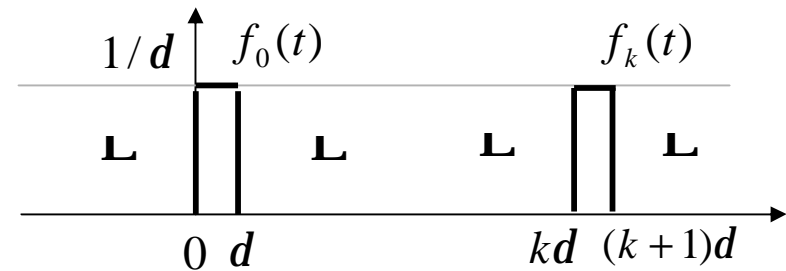
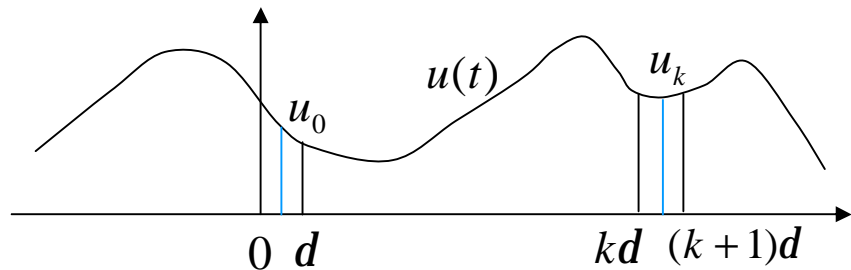
Důsledky principu superpozice

Věta: Relace vstup-výstup libovolného spojitého lineárního stacionárního systému lze vyjádřit ve tvaru

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t)u(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)u(t-t)dt$$

kde $h(t)$ je tzv. váhová (neboli impulsní) funkce systému.

Důkaz:



$$f(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i(t)d = 1, \quad u(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i f_i(t)d$$

$$y(t) = L \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i f_i(t)d = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i L(f_i(t))d = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i \bar{h}(t-id)d$$

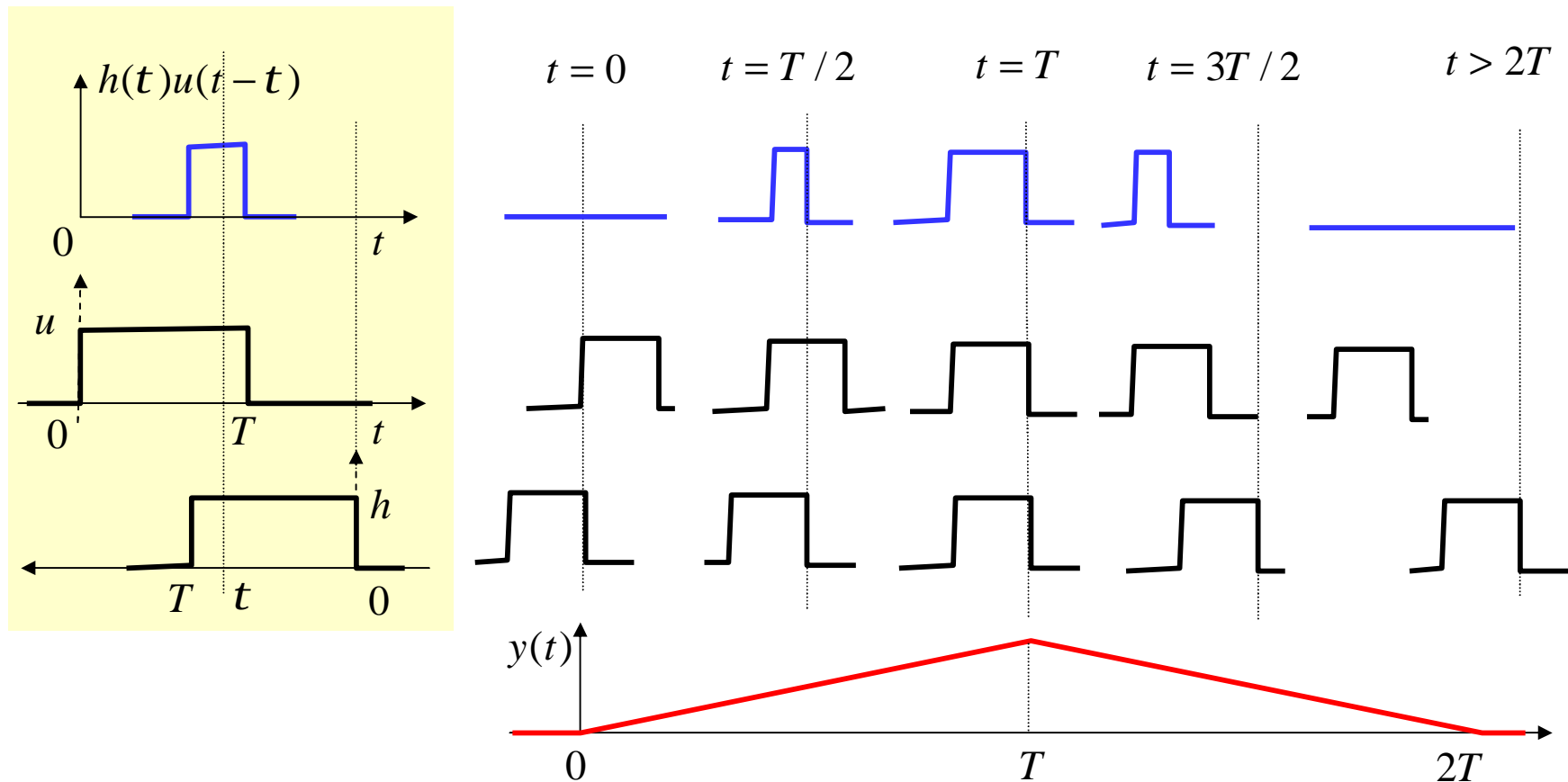
Limitním přechodem $d \rightarrow 0$:

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)h(t-t)dt$$

Konvoluce funkcí

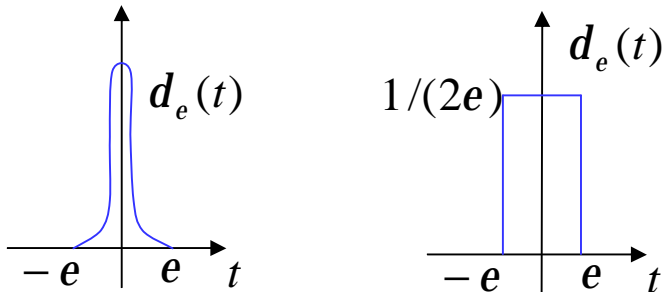
Výstup lineárního stacionárního systému je dán konvolucí vstupní funkce a váhové funkce systému ...

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t)u(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)u(t-t)dt \equiv h * u$$



Diracův puls

Diracův puls je zobecněná funkce (distribuce) ...



$$d(t) = \lim_{e \rightarrow 0} d_e(t)$$

$$d(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(t-t) f(t) dt = f(t)$$

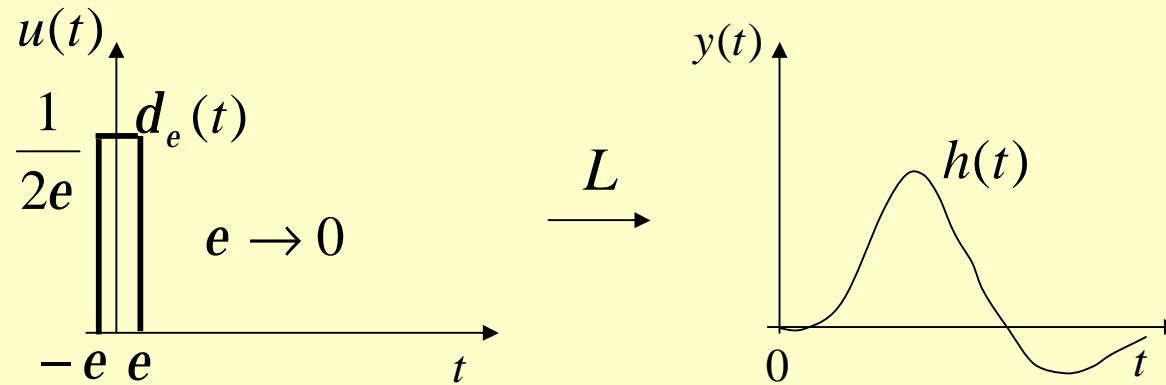
$$\int_{-\infty}^{\infty} d^{(n)}(t-t) f(t) dt = f^{(n)}(t) \quad (*)$$

Důkaz vztahu (*):

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [f(t+h) - f(t)] &= \frac{1}{h} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d(t+h-t) f(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} d(t-t) f(t) dt \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} [d(t+h-t) - d(t-t)] f(t) dt \quad \rightarrow_{h \rightarrow 0} \quad f'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d'(t-t) f(t) dt \end{aligned}$$

Impulsní charakteristika

Impulsní charakteristika je odezva systému na Diracův puls ...



Diracův puls

$$d(t) = \lim_{e \rightarrow 0} d_e(t)$$

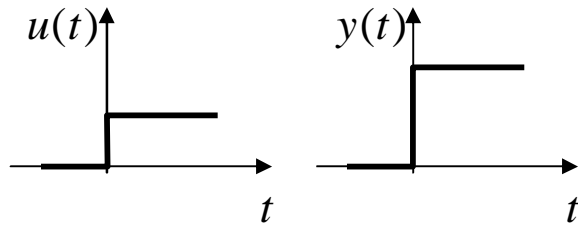
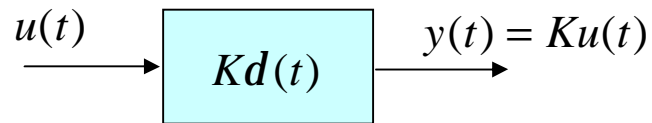
Impulsní charakteristika

$$h(t) = L[d(t)]$$

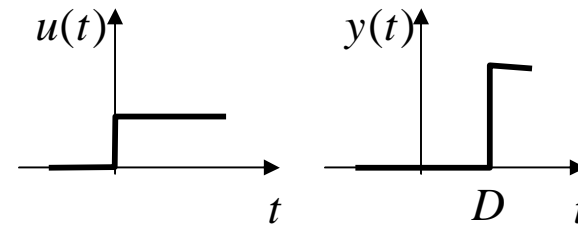
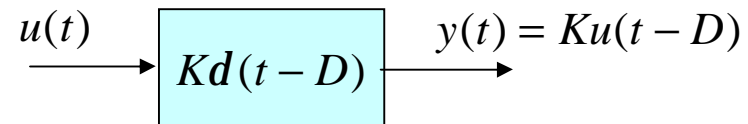
Problémy: impulsní charakteristika nelze přímo přesně odměřit neboť Diracův puls má nekonečnou amplitudu.

Systemy s jednoduchými impulsními charakteristikami

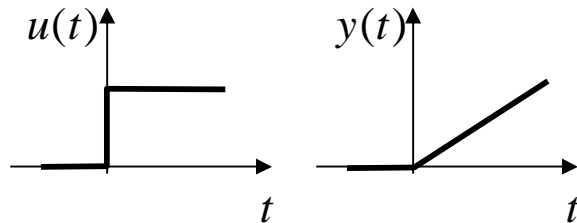
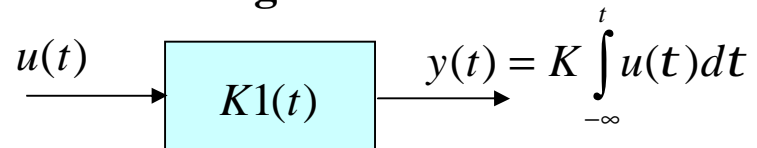
zesilovač



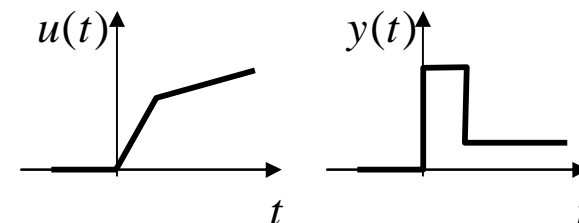
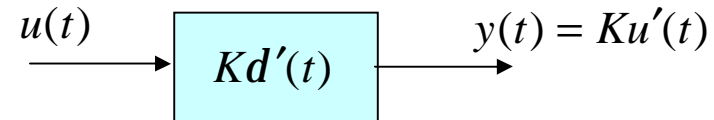
dopravní zpoždění



integrátor



derivátor



Uvnitř bloku je vždy uvedena příslušná váhová funkce.

Impulsní charakteristika systému 1.řádu

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

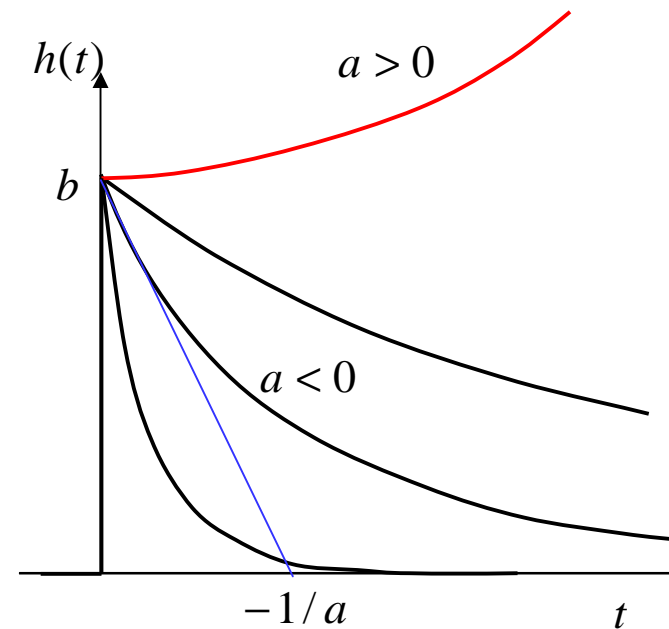
$$y = x$$

$$u(t) = d(t), \quad x_0 = 0$$

$$x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-t')} bu(t') dt' \quad (2)$$

$$x(t) = e^{at} b$$

$$h(t) = y(t) = e^{at} b$$

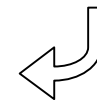


Skutečnost, že (2) je řešení diferenciální rovnice (1) plyne z následujícího vztahu :

$$\dot{x}(t) - ax(t) = bu(t)$$

$$e^{-at} (\dot{x}(t) - ax(t)) = d / dt (e^{-at} x(t)) = e^{-at} bu(t) \Rightarrow e^{-at} x(t) = \int e^{-at} bu(t) dt + C$$

$$x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-t')} bu(t') dt'$$



*Vlastnosti lineárního systému a impulsní charakteristika

D1: Systém je kauzální, jestliže $h(t) = 0$ pro $t < 0$.

V1: Je-li systém kauzální, potom jeho relace vstup-výstup je dána vztahem

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t)u(t-t)dt = \int_0^{\infty} h(t-t)u(t)dt.$$

D2: Systém je stabilní ve smyslu „omezený vstup-omezený výstup“, jestliže odezva systému na libovolný omezený vstup je omezená. Jinými slovy, jestliže

$$\forall t, \exists M_u < \infty : |u(t)| < M_u \Rightarrow \forall t, \exists M_y < \infty : |y(t)| < M_y.$$

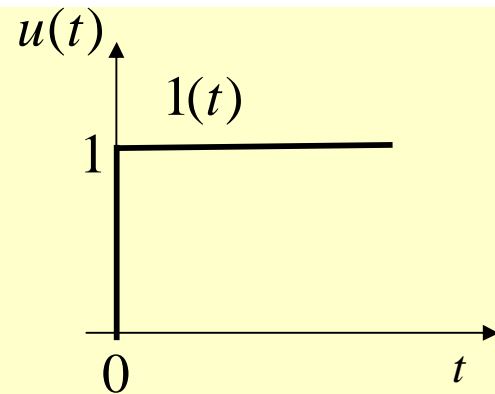
V2: Systém je stabilní ve smyslu „omezený vstup-omezený výstup“ právě tehdy, jestliže

$$\int_0^{\infty} |h(t)|dt < \infty.$$

(Dokažte!)

Přechodová charakteristika

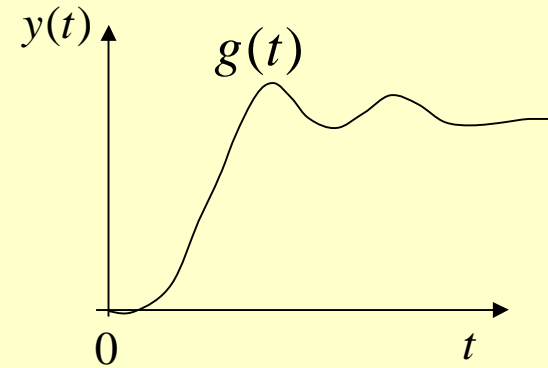
Přechodová charakteristika je odezva systému na jednotkový skok. Stejně jako impulsní charakteristika plně popisuje lineární systém ...



Jednotkový skok

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

L



Přechodová charakteristika

$$g(t) = L1(t) = \int_0^t h(t) dt$$

Problémy: Přechodovou charakteristiku lze na systému přímo odměřit. Problémy však spočívají v zajištění ustáleného stavu, nelinearitě systému, poruchách, a často velké časové náročnosti.

Přechodová charakteristika systému 1.řádu

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x(0) = x_0$$

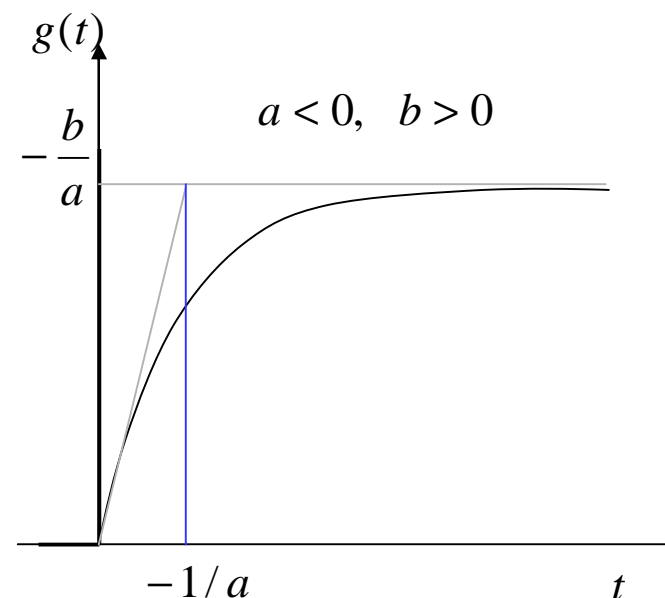
$$y = x$$

$$u(t) = 1(t), \quad x_0 = 0$$

$$x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-t)} b 1(t) dt$$

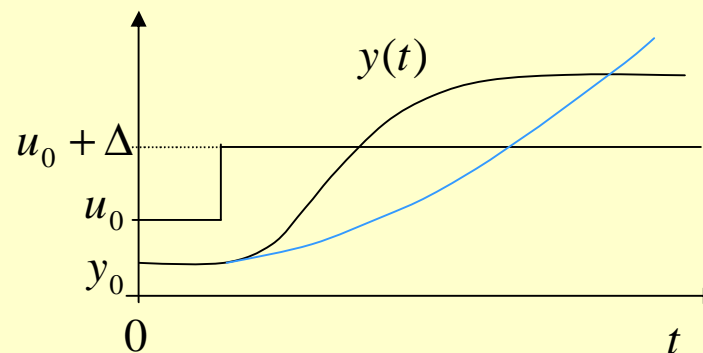
$$x(t) = -\frac{1}{a} e^{a(t-t)} b \Big|_0^t = -a^{-1} (1 - e^{at}) b$$

$$g(t) = y(t) = -a^{-1} (1 - e^{at}) b$$



Postup měření přechodové charakteristiky

1. Vyčkáme ustáleného stavu.
2. Skokově změním vstup systému.
3. Zaznamenáme odezvu systému.
4. Přechodovou charakteristiku vypočteme podle vztahu (*).
5. Měření případně opakujeme v dalších pracovních bodech. Při působení poruch je nutné výsledky průměrovat.



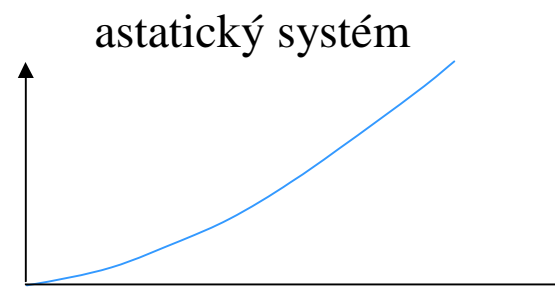
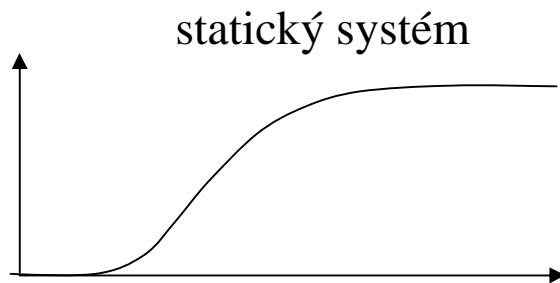
$$g(t) = (y(t) - y_0) / \Delta \quad (*)$$

*Vlastnosti lineárního systému a přechodová charakteristika

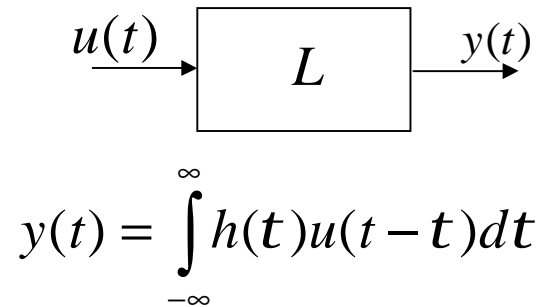
D1: Systém je statický (typu 0), jestliže $\lim_{t \rightarrow \infty} |g(t)| < \infty$.

D2: Systém je astatický řádu k (typu k), jestliže $0 < \lim_{t \rightarrow \infty} |g(t)| / t^k < \infty$.

D2: Systém je ryze dynamický, jestliže $g(0) = 0$.



Frekvenční přenos



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)u(t-t)dt$$

$$u(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{j\omega_0(t-t)} dt$$

$$y(t) = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega_0 t} dt$$

$$y(t) = e^{j\omega_0 t} H(j\omega_0)$$

$$L(e^{j\omega_0 t}) = e^{j\omega_0 t} H(j\omega_0)$$

$$H(j\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega_0 t} dt$$

$$\begin{aligned} L(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) &= L(2 \cos(\omega t)) = \\ &= H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t} = \\ &= 2|H(j\omega)| \cos(\omega t + j) \end{aligned}$$

$$j = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} H(j\omega)}{\operatorname{Re} H(j\omega)}$$

⇓

$$L(\cos(\omega t)) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + j)$$

Odezva lineárního systému na harmonický signál v ustáleném stavu je opět harmonický signál.

Definice: Komplexní funkci $H(j\omega)$ nazýváme frekvenčním přenosem systému. Frekvenční přenos $H(j\omega)$ je **Fourierovou transformací** (*) váhové funkce $h(t)$ systému.

* Důkaz vztahu $L(\cos(\omega t)) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + j)$

Vyjdeme ze vztahu (viz předchozí stránka)

$$L(2 \cos(\omega t)) = H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t}.$$

Označme

$$H(j\omega) = a + jb,$$

potom

$$\begin{aligned} L(2 \cos(\omega t)) &= (a + jb)(\cos \omega t + j \sin \omega t) + (a - jb)(\cos \omega t - j \sin \omega t) = \\ &= (a \cos \omega t - b \sin \omega t) + j(a \sin \omega t + b \cos \omega t) + \\ &+ (a \cos \omega t - b \sin \omega t) - j(a \sin \omega t + b \cos \omega t) = \\ &= 2(a \cos \omega t - b \sin \omega t). \end{aligned}$$

Dále platí

$$a \cos \omega t - b \sin \omega t = c \cos(\omega t + j) = c \cos \omega t \cos j - c \sin \omega t \sin j.$$

Odtud

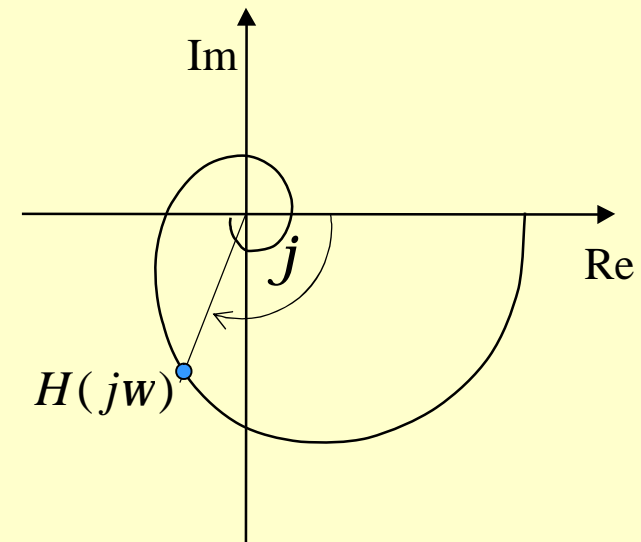
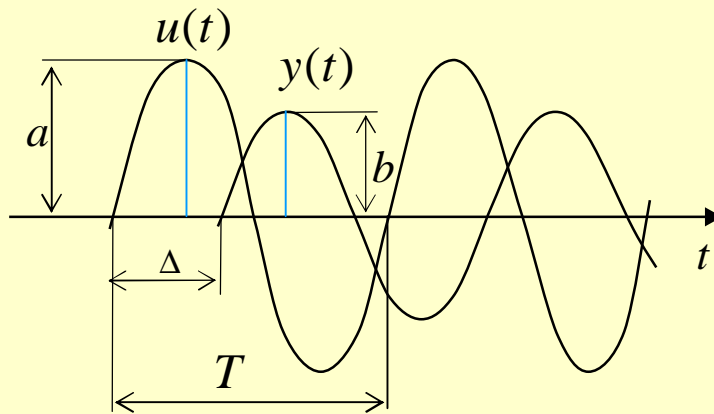
$$\begin{aligned} a = c \cos j & \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = |H(j\omega)| \\ b = c \sin j & \quad \Rightarrow \quad \tan j = \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{Im} H(j\omega)}{\operatorname{Re} H(j\omega)} \quad \Rightarrow \quad j = \arctan \frac{\operatorname{Im} H(j\omega)}{\operatorname{Re} H(j\omega)} \end{aligned}$$

Dokončení důkazu je nyní jednoduché.

Frekvenční charakteristika

Odezva lineárního systému na sinusový vstup je v ustáleném stavu opět sinusový signál ...

$$u(t) = a \sin \omega t \quad y(t) = b \sin(\omega t + j)$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad j = 2\pi \frac{\Delta}{T} \quad H(j\omega) = \frac{b}{a} e^{-j}$$

Problémy: Odměření frekvenční charakteristiky je časově náročné.

Laplaceova transformace

Fourierova transformace (komplexní funkce reálné proměnné)

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

existuje (definiční integrál konverguje) pouze pro stabilní systémy ($\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$).

Například pro $h(t) = 1(t)$ (integrátor) platí

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 1(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} \cos \omega t dt - j \int_0^{\infty} \sin \omega t dt$$

a oba integrály na pravé straně zřejmě divergují. Problém odstraníme tak, že „nepatrně“ zmodifikujeme váhovou funkci $1(t)$. Nahradíme ji funkcí

$$h_s(t) = \begin{cases} e^{-st} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} h_s(t) = 1(t),$$

Nyní obdržíme

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

za předpokladu $s > 0$.

Laplaceova transformace (pokr.1)

Ze stejného důvodu definujeme jednostrannou **Laplaceovu transformaci** (komplexní funkci komplexní proměnné) vztahem

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}\{h(t)\}.$$

kde $\sigma = \operatorname{Re} s > 0$ je dostatečně velké, aby definiční integrál existoval.

D: Laplaceova transformace váhové funkce se nazývá přenos systému.

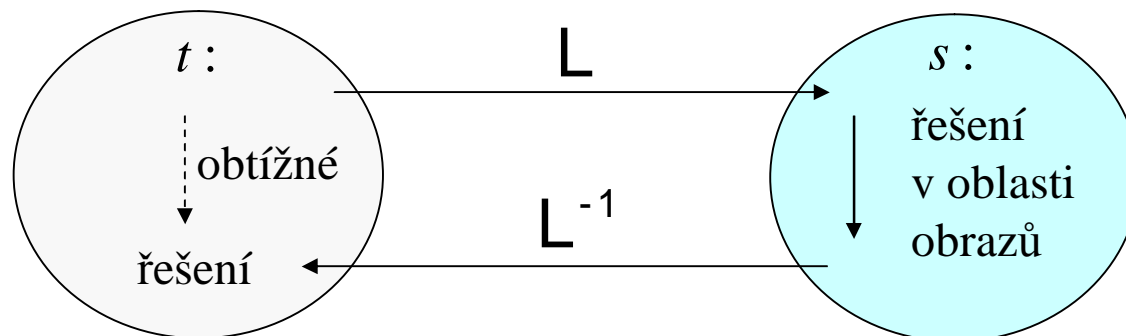
system	popis	váhová funkce	přenos
zesilovač	$y(t) = Ku(t)$	$h(t) = Kd(t)$	K
integrátor	$y(t) = \int_0^t u(t) dt$	$h(t) = 1(t)$	$\frac{1}{s}$
derivátor	$y(t) = u'(t)$	$h(t) = d'(t)$	s
dopr. zpož.	$y(t) = u(t - D)$	$h(t) = d(t - D)$	e^{-Ds}
1.řád	$T\dot{y} + y = u$	$h(t) = 1(t) \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{Ts + 1}$

Laplaceova transformace (pokr.2)

Laplaceova transformace je vhodná pro řešení mnoha různých úloh. Její použití spočívá v tom, že časové funkce transformujeme na jejich obrazy – funkce v proměnné s , manipulací s nimi vyřešíme daný problém v oblasti obrazů a poté se vrátíme inverzní Laplaceovou transformací do časové oblasti.

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt, \quad \text{Laplaceova transformace}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} H(s)e^{st} ds. \quad \text{Inverzní Laplaceova transformace}$$



Inverzní transformaci obvykle nepočítáme podle výše uvedeného vztahu, ale užíváme slovník Laplaceovy transformace (viz dále).

Laplaceova transformace (pokr.3)

Určení přenosu systému 1.řádu ze skalární diferenciální rovnice:

$$Ty'(t) + y(t) = u(t), \quad y(0) = 0$$

$$L\{Ty'(t) + y(t)\} = L\{u(t)\}$$

$$TL\{y'(t)\} + L\{y(t)\} = L\{u(t)\}$$

$$TsY(s) + Y(s) = U(s)$$

$$Y(s)(Ts + 1) = U(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

Laplaceování rovnice.

Užíváme linearitu Laplaceova transformace.

Obrazy označujeme velkými písmeny;
obraz derivace viz pozn. dole.

Přenos systému je podíl obrazu výstupu
ku obrazu vstupu při nulových počátečních
podmínkách.

Obraz derivace funkce:

$$L\{y'(t)\} = \int_0^{\infty} y'(t)e^{-st} dt = y(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt = -y(0^+) + sY(s) = sY(s)$$

Laplaceova transformace (pokr.4)

Řešení diferenciální rovnice 1.řádu pomocí Laplaceovy transformace:

$$Ty'(t) + y(t) = 1(t), \quad y(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{Ty'(t) + y(t)\} = \mathcal{L}\{1(t)\}$$

$$T\mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{1(t)\}$$

$$TsY(s) + Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{T}{Ts + 1}\right\}$$

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{T}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Laplaceování rovnice.

Užíváme linearitu Laplaceovy transformace.

Obraz fce 1(s) je 1/s.

Výsledný obraz rozložíme na parciální zlomky.

Návrat do časové oblasti.

Inverzní Lapl. transf. je též lineární.

Viz slovník Laplaceovy transformace.

Výsledek - řešení dif. rovnice.

Slovník (pokr.5)

Tabulka Laplaceových obrazů
pro nejjednodušší funkce:

$d(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$