

ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

Laboratorní cvičení z TŘ- R4

Experimentální zjišťování kritického zesílení

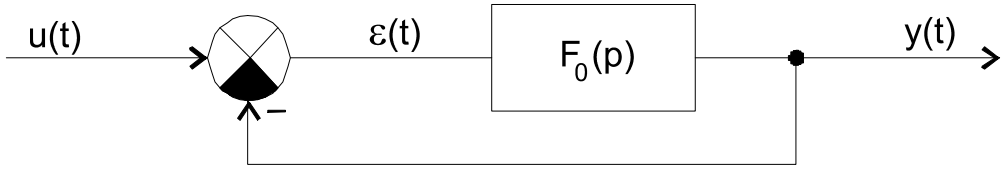
Jméno apříjmení:	*Jan Krčmář*
Osobní číslo:	*A05023*
Datum měření:	*4.4. 2007*
Pracovní skupina	*č.3*

ZADÁNÍ REFERÁTU:

1. a) Aplikací Hurwitzova kritéria stability ověřte, zda otevřený systém s přenosem $F_0(p) = \dfrac{k}{p^3 + p^2 + 2p + 1}$ je stabilní.

   b) Nakreslete úplné analogové schéma otevřeného systému.

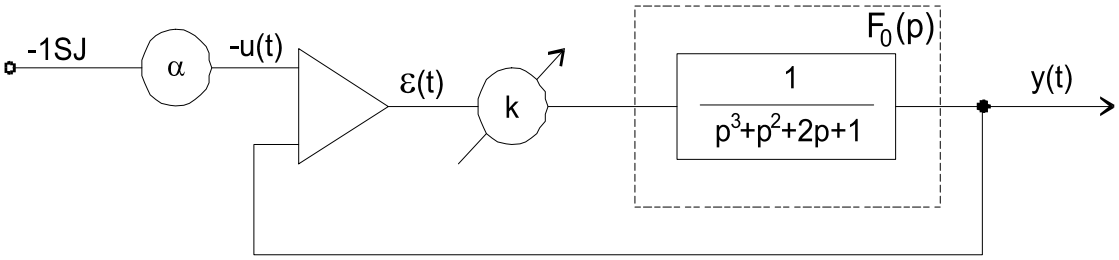
2. Systém ad 1a) opatřete jednotkovou zpětnou vazbou a určete přenos uzavřeného obvodu systému $F_u(p)$.



3. Spočítejte statické zesílení uzavřeného obvodu tak, aby uzavřený systém byl stabilní.

4. Určete výpočtem hodnotu statického zesílení, pro kterou bude uzavřený systém na mezi stability, tj. určete k_{kr}. (pozn.: $D_3 = D_2 a_0$)

5. Získané teoretické výsledky ověřte experimentální na modelu uzavřeného systému s využitím AP MEDA-T.



6. Aplikací Michajlovova kritéria stability rozhodněte, zda uzavřený $F_u(p)$ se statickým zesílením $k = -0{,}8$ a $k = 1{,}2$ je stabilní. Vypočtěte a nakreslete Michajlovův hodograf uzavřeného systému pro tyto případy.

7. Prověřte zhodnocení získaných výsledků.

ŘEŠENÍ:

TEORETICKÝ ÚVOD:

Jednou z nejdůležitějších vlastností lineárních dynamických systémů a požadavků na ně kladených je jejich **stabilita**, což je vlastně schopnost systému vrátit se do rovnovážného stavu po ukončení působení signálu, který jej z tohoto stavu vyvedl.

Ke zjišťování stability je vypracována řada metod (kritérií), jednou z nich je Hurwitzovo kritérium stability.

Hurwitzovo kritérium stability (HKS):

Patří mezi algebraická kritéria, která vycházejí z analýzy charakteristické rovnice systému $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 = 0$.

Systém je podle HKS stabilní právě tehdy, když:

1) Všechny koeficienty a_i charakteristické rovnice jsou nenulové a mají stejné znaménko (nutná podmínka)

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 = 0$$
$$\forall a_i \neq 0; i = 0,1,...n$$

2) Determinant Hurwitzovy matice, sestavené z koeficientů char.rovnice, a všechny jeho diagonální subdeterminanty jsou kladné

$$D_j = \det H_j > 0;\ j = 1,2,...n$$

Michajlovovo - Leonhardovo kritérium stability (MLKS):

Patří mezi frekvenční kritéria, která pracují s frekvenčními charakteristikami. Jedná se o geometrickou interpretaci principu argumentu.

Kritérium vychází z charakteristické rovnice uzavřeného obvod SAŘ n-tého řádu.

H(p)!!

kde $F_0(p)$ je přenos otevřeného obvodu. Dosazením p=j získame výraz:

Aby byl uzavřený SAŘ stabilní, musí kořeny char. rovnice ležet v levé polorovině komplexní roviny. Z matematické formulace principu argumentu plyne podmínka stability:

Uzavřený systém F_u bude stabilní právě tehdy, když pro $\omega \in <0,\infty)$ se vektor H(jω) otočí o úhel $n \cdot \frac{\pi}{2}$, kde *n* je stupeň char. rovnice. Geometrické místo, které opisuje konec vektoru H(jω) v komplexní rovině při změně frekvence $\omega \in <0,\infty)$, se nazývá (Michajlovův) hodograf. Lineární SAŘ bude stabilní, jestliže hodograf začína na kladné reálné poloose komplexní roviny a při změně frekvence od 0 do ∞ postupně projde v kladném smyslu n kvadrantů.

$$H(j\omega) = \mathrm{Re}\{H(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{H(j\omega)\} = U(\omega) + jV(\omega), kde$$
$$U(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - ...$$
$$V(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 ...$$

(1a) Aplikace Hurwitzova kritéria stability na otevřený systém

Je dán otevřený systém s přenosem:

$$F_0(p) = \frac{k}{p^3 + p^2 + 2p + 1}.$$

Ověříme podmínky stability HKS:

ad 1) Nejprve musíme určit charakteristickou rovnici:

$$p^3 + p^2 + 2p + 1 = 0$$

Je zřejmé, že první podmínka je splněna, neboť všechny koeficienty charakteristické rovnice jsou nenulové a kladné

2) Pro ověření druhé podmínky musíme sestavit Hurwitzovu matici, která je dána následujícím způsobem:

$$H_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix},$$

kde a_i jsou koeficienty char. rce

Pro náš případ dostáváme Hurwitzovu matici ve tvaru:

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zbývá jen vypočítat všechny diagonální subdeterminanty t:

$D_1 = \det H_1 = |1| = 1$

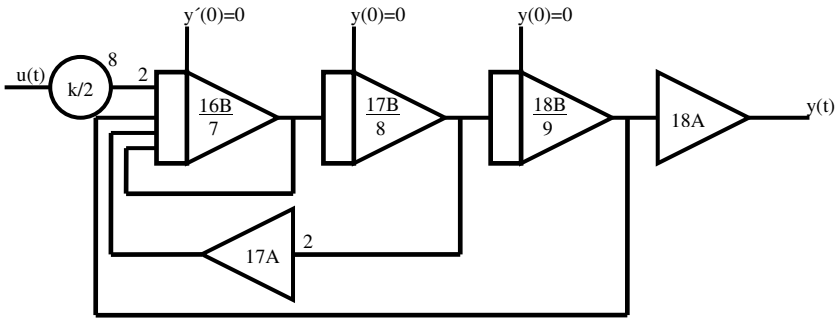
$D_2 = \det H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 2 - 1 = 1$

$D_3 = \det H_3 = a_0 \cdot D_2 = 1 \cdot 1 = 1$

U výpočtu determinantu D_3 jsme použili rozvoj matice podle posledního sloupce (tento postup lze provést pokaždé při výpočtu subdeterminantu Hurwitzovy matice nejvyššího řádu).

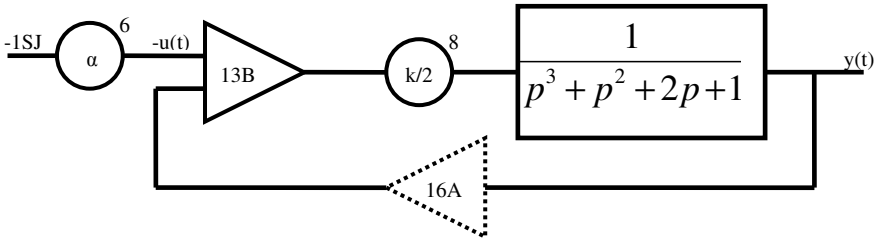
Jelikož platí: $\boxed{D_1 > 0 \wedge D_2 > 0 \wedge D_3 > 0}$, můžeme o našem otevřeném systému říci, že je stabilní.

(1b) Úplné analogové schéma otevřeného systému



(2) Přenos uzavřeného obvodu systému

Nejprve jsme náš systém opatřili jednotkovou zpětnou vazbou:



Invertor 16A je vyznačen čárkovaně z důvodu změny znaménka statického zesílení *k*. Nyní spočítáme přenos tohoto uzavřeného systému:

$$F_u(p) = \frac{F_o}{1+F_o} = \frac{\frac{k}{p^3+p^2+2p+1}}{1+\frac{k}{p^3+p^2+2p+1}} = \frac{\frac{k}{p^3+p^2+2p+1}}{\frac{p^3+p^2+2p+1+k}{p^3+p^2+2p+1}}$$

$$\boxed{F_u(p) = \frac{k}{p^3+p^2+2p+1+k}}$$

(3) Výpočet statického zesílení stabilního systému

Opět využijeme Hurwitzova kritéria stability. Vyjdeme z charakteristické rovnice, tj. jmenovatele přenosu: $p^3+p^2+2p+1+k=0$. Nejprve ověříme první podmínku (koeficienty > 0). Ta je splněna pro $k > -1$. Dále sestavíme Hurwitzovu matici:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1+k & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1+k \end{bmatrix}$$

Vypočítáme všechny diagonální subdeterminanty:

$$D_1 = 1$$
$$D_2 = 1\cdot 2 - 1\cdot(1+k) = 2-1-k = 1-k$$
$$D_3 = (1+k)\cdot(1-k)$$

Aby byl systém stabilní, musí být všechny determinanty > 0. A tedy:

$D_1=1>0$
$D_2=2-(k+1)>0$
$1-k>0$
$k<1$
$D_3=2(1+k)-(1+k)^2>0$
$-k^2+1>0$
$|k|<1$

Průnikem dílčích řešení dostáváme řešení celkové: $\boxed{k \in (-1;1)}$

(4) Výpočet kritického zesílení systému

Pro určení kritického zesílení se využívá vztahu: $D_n = D_{n-1}\cdot a_0 = 0$, kde *n* je řád systému. Pro náš systém tedy:

$$D_3 = (1+k_{krit.})\cdot(1-k_{krit.}) = 0$$
$$k_{krit.1} = -1$$
$$k_{krit.2} = 1$$

Má-li být systém na mezi stability: $k = 1, k = -1..$

(5) Experimentální ověření teoretických výsledků

Společně se nám povedlo teoretické výsledky z předchozích bodů experimentálně ověřit s využitím AP MEDA-T a souřadnicového zapisovače BAK - 4T,viz příloha.

(6) Aplikace Michajlovova kritéria

Nejprve určíme charakteristickou rovnici. Máme-li uzavřený obvod popsaný přenosem

$$F_u(p)=\frac{k}{p^3+p^2+2p+1+k},$$

je *H(p)* rovno jmenovateli tohoto přenosu: $H(p)=p^3+p^2+2p+1+k$, substitucí $p=j\omega$ dostáváme:

$$H(j\omega)=(j\omega)^3+(j\omega)^2+2(j\omega)+1+k=-j\omega^3-\omega^2+2j\omega+1+k$$

$$\boxed{\begin{aligned}&H(j\omega)=1+k-\omega^2+j(2\omega-\omega^3)\\&\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}=1+k-\omega^2\\&\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}=2\omega-\omega^3\end{aligned}}$$

(i) *k = -0,8*

$$\begin{aligned}&k=-0{,}8\\&H(j\omega)=1-0{,}8-\omega^2+j(2\omega-\omega^3)\\&\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}=1-0{,}8-\omega^2\\&\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}=2\omega-\omega^3\end{aligned}$$

Pro ověření podmínky pro stabilitu stačí spočítat průsečíky s osami:

$\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}=0$

$0{,}2-\omega^2=0$

$\omega_{1,2}=\pm\sqrt{0{,}2}$

$\rightarrow$ $\omega_1=\sqrt{0{,}2}$; $\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}=0$; $\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}=2\sqrt{0{,}2}-\sqrt{0{,}2}^3=0{,}805$

$\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}=0$

$\omega(2-\omega^2)=0$

$\omega_3=0$

$\omega_{4,5}=\pm\sqrt{2}$

$\rightarrow$ $\omega_3=0$: $\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}=0{,}2-0=0{,}2$; $\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}=0$

$\omega_4=\sqrt{2}$: $\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}=0{,}2-2=-1{,}8$; $\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}=0$

Záporné hodnoty ω jsme nebrali v úvahu, neboť nás zajímají pouze ty hodnoty, pro které platí $\omega\in(0;\infty)$.

Nyní uspořádáme průsečíky podle velikosti příslušných ω:

1) $\omega=0 \rightarrow P_1=[0{,}2 \quad 0]$
2) $\omega=\sqrt{0{,}2} \rightarrow P_2=[0 \quad 0{,}805]$
3) $\omega=\sqrt{2} \rightarrow P_3=[-1{,}8 \quad 0]$

Vypočítáme-li navíc $\lim_{\omega\to\infty}\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}=-\infty$, $\lim_{\omega\to\infty}\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}=-\infty$.

Je tedy zřejmé, že $F_u(p)=\frac{-0{,}8}{p^3+p^2+2p+0{,}2}$ je stabilní.

(ii) ***k = 1,2***

$$k = 1{,}2$$
$$H(j\omega) = 1 + 1{,}2 - \omega^2 + j\left(2\omega - \omega^3\right)$$
$$\mathrm{Re}\{H(j\omega)\} = 1 + 1{,}2 - \omega^2$$
$$\mathrm{Im}\{H(j\omega)\} = 2\omega - \omega^3$$

Pro ověření podmínky pro stabilitu stačí spočítat průsečíky s osami:

$\mathrm{Re}\{H(j\omega)\} = 0$

$2{,}2 - \omega^2 = 0$

$\omega_{1,2} = \pm\sqrt{2{,}2}$

$\rightarrow$ $\omega_1 = \sqrt{2{,}2}$, $\mathrm{Re}\{H(j\omega)\} = 0$, $\mathrm{Im}\{H(j\omega)\} = 2\sqrt{2{,}2} - \sqrt{2{,}2}^{\,3} = -0{,}297$

$\mathrm{Im}\{H(j\omega)\} = 0$

$\omega(2 - \omega^2) = 0$

$\omega_3 = 0$

$\omega_{4,5} = \pm\sqrt{2}$

$\rightarrow$ $\omega_3 = 0$: $\mathrm{Re}\{H(j\omega)\} = 2{,}2 - 0 = 2{,}2$; $\mathrm{Im}\{H(j\omega)\} = 0$

$\omega_4 = \sqrt{2}$: $\mathrm{Re}\{H(j\omega)\} = 2{,}2 - 2 = 0{,}2$; $\mathrm{Im}\{H(j\omega)\} = 0$

Záporné hodnoty ω jsme nebrali v úvahu, neboť nás zajímají pouze ty hodnoty, pro které platí $\omega \in (0;\infty)$.

Nyní uspořádáme průsečíky podle velikosti příslušných ω:

1) $\omega = 0 \rightarrow P_1 = [2{,}2 \quad 0]$
2) $\omega = \sqrt{2} \rightarrow P_2 = [0{,}2 \quad 0]$
3) $\omega = \sqrt{2{,}2} \rightarrow P_3 = [0 \quad -0{,}297]$

Vypočítáme-li navíc $\lim_{\omega\to\infty} \mathrm{Re}\{H(j\omega)\} = -\infty$, $\lim_{\omega\to\infty} \mathrm{Im}\{H(j\omega)\} = -\infty$.

Je tedy zřejmé, že $F_u(p) = \dfrac{1{,}2}{p^3 + p^2 + 2p + 2{,}2}$ je nestabilní.

Zbývá již jen vypočítat a nakreslit Michajlovův hodograf:

ω(rad/s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,447	0,5	0,6	0,7	0,8
$\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}$ $k = -0{,}8$	0,2	0,19	0,16	0,11	0,04	0	-0,05	-0,16	-0,29	-0,44
$\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}$ $k = 1{,}2$	2,2	2,19	2,16	2,11	2,04	2	1,95	1,84	1,71	1,56
$\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}$	0	0,199	0,392	0,573	0,736	0,8047	0,875	0,984	1,057	1,088

ω(rad/s)	1	1,2	1,3	1,4142	1,48324	1,5	2	2,5	∞
$\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}$ $k = -0{,}8$	-0,8	-1,24	-1,49	-1,8	-1,8	-2,05	-3,8	-6,05	$-\infty$
$\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}$ $k = 1{,}2$	1,2	0,76	0,51	0,2	0,2	-0,05	-1,8	-4,05	$-\infty$
$\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}$	1	0,672	0,403	0	0	-0,375	-4	-10,625	$-\infty$

(7) Závěr a zhodnocení výsledků

Výpočtem jsme zjistili, že pro statická zesílení, která leží i intervalu $k \in (-1;1)$, je uzavřený systém stabilní, pro statická zesílení k_1=-1 a k_2=1 leží na mezi stability a pro k=(-∞;-1)∪(1;∞) je systém nestabilní.

Aplikací Michajlovova kritéria jsme ověřili platnost výpočtu pro dvě hodnoty statického zesílení.

Pro *k = -0,8* je systém stabilní jak podle Hurwitzova kritéria $(-0{,}8 \in (-1;1)$, tak i podle Michajlovova kritéria - hodograf začíná na kladné reálné poloose komplexní roviny a při změně frekvence od 0 do ∞ postupně projde v kladném smyslu 3 kvadranty.

Pro *k = 1,2* je systém nestabilní, neboť $1{,}2 \notin (-1;1)$ (Hurwitz) a není splněna podmínka Michajlovova kritéria - frekvenční charakteristika se neotočí o $3 \cdot \frac{\pi}{2}$, jak je vidět z Michajlovova hodografu.

