

ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

Laboratorní cvičení z TŘ- R3

Výpočet frekvenční charakteristiky s využitím PC a její konstrukce

Měření frekvenčních charakteristik

Jméno apříjmení:	*Jan Krčmář*
Osobní číslo:	*A05023*
Datum měření:	*3.4. 2007*
Pracovní skupina	*č.3*

ZADÁNÍ REFERÁTU část A:

1. Pro daný přenos soustavy 2. řádu, analyzované v prvním laboratorním cvičení, sestavte tabulku vypočítaných hodnot k sestrojení frekvenční charakteristiky.

2. Uveďte potřebné matematické vztahy a příklad výpočtu jednoho bodu frekvenční charakteristiky (pro jednu hodnotu frekvence).

   Další body frekvenční charakteristiky řešte s využitím programového vybavení na PC.

3. Frekvenční charakteristiku sestrojte:
   a) v komplexní rovině,
   b) v logaritmických souřadnicích.

4. Zkonstruujte asymptotické logaritmické frekvenční charakteristiky měřené soustavy a zpětně usuzujte na její vlastnosti.

5. Proveďte zhodnocení získaných výsledků.

Poznámka:

Frekvenční přenos je nutno upravit na algoritmizovaný tvar, tj.

$$F(j\omega) = \frac{1}{a_2(j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0}$$

ŘEŠENÍ:

(1) Tabulka vypočítaných hodnot

f[Hz]	0,000	0,061	0,097	0,118	0,134	0,147	0,159	0,173	0,189	0,216	0,262	0,418
Re{F(jw)}	0,600	0,655	0,713	0,674	0,514	0,268	0,003	-0,238	-0,364	-0,368	-0,263	-0,095
Im{F(jw)}	0,000	-0,175	-0,415	-0,666	-0,892	-1,012	-1,001	-0,854	-0,632	-0,356	-0,152	-0,025
A[w]	0,600	0,678	0,825	0,948	1,029	1,047	1,001	0,886	0,730	0,512	0,304	0,098
A[dB]	-4,437	-3,372	-1,670	-0,465	0,249	0,395	0,008	-1,049	-2,736	-5,810	-10,347	-20,150
Fi [°]	0,000	-14,991	-30,190	-44,651	-60,045	-75,153	-89,814	-105,555	-119,930	-135,955	-149,988	-165,041
w[rad/s]	0,000	0,381	0,609	0,741	0,842	0,924	0,999	1,087	1,188	1,357	1,646	2,626

(2) Matematické vztahy a příklad výpočtu

Budeme pracovat se soustavou z předchozího měření, jejíž obrazový přenos je tvaru

$$F(p) = \frac{0,6}{p^2 + 0,6p + 1}$$

Pro výpočet frekvenční charakteristiky provedeme substituci $p = j\omega$:

$$F(p) = \frac{0,6}{p^2 + 0,6p + 1}$$

$$F(p) = \frac{0,6}{(j\omega)^2 + 0,6j\omega + 1}$$

Reálná a imaginární část :

$$F(p) = \frac{1}{a_2(j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0} = \frac{1}{a_0 - a_2\omega^2 + a_1 j\omega} = \frac{1}{a_0 - a_2\omega^2 + a_1 j\omega} \cdot \frac{a_0 - a_2\omega^2 - a_1 j\omega}{a_0 - a_2\omega^2 - a_1 j\omega} =$$

$$= \frac{a_0 - a_2\omega^2 - a_1 j\omega}{\left(a_0 - a_2\omega^2\right)^2 + a_1^2\omega^2} = \frac{a_0 - a_2\omega^2}{\left(a_0 - a_2\omega^2\right)^2 + a_1^2\omega^2} - j\frac{a_1\omega}{\left(a_0 - a_2\omega^2\right)^2 + a_1^2\omega^2}$$

$$\mathrm{Re}\{F(j\omega)\} = \frac{a_0 - a_2\omega^2}{\left(a_0 - a_2\omega^2\right)^2 + a_1^2\omega^2}$$

$$\mathrm{Im}\{F(j\omega)\} = -\frac{a_1\omega}{\left(a_0 - a_2\omega^2\right)^2 + a_1^2\omega^2}$$

Amplituda:

$$A(\omega) = |F(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}\{F(j\omega)\}^2 + \mathrm{Im}\{F(j\omega)\}^2} = \sqrt{\frac{1}{\left(a_0 - a_2\omega^2\right)^2 + a_1^2\omega^2}}$$

A konkrétně pro náš přenos dosadíme koeficienty:

$$a_2 = 1,66; a_1 = 1, a_0 = 1,66$$

$$\mathrm{Re}\{F(j\omega)\} = \frac{1,66 - 1,66\omega^2}{\left(1,66 - 1,66\omega^2\right)^2 + \omega^2}$$

$$\mathrm{Im}\{F(j\omega)\} = -\frac{\omega}{\left(1,66 - 1,66\omega^2\right)^2 + \omega^2}$$

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{\left(1,66 - 1,66\omega^2\right)^2 + \omega^2}}$$

Příklad výpočtu pro:

$\omega = 0{,}38 rad \cdot s^{-1}$

$$\mathrm{Re}\{F(j\omega)\} = \frac{1{,}66 - 1{,}66\omega^2}{\left(1{,}66 - 1{,}66\omega^2\right)^2 + \omega^2} = \frac{1{,}66 - 0{,}38^2}{\left(1{,}66 - 1{,}66 * 0{,}38^2\right)^2 + 0{,}38^2} = \frac{1{,}426}{2{,}178} = 0{,}655$$

$$\mathrm{Im}\{F(j\omega)\} = -\frac{\omega}{\left(1{,}66 - 1{,}66\omega^2\right)^2 + \omega^2} = -\frac{0{,}38}{\left(1{,}66 - 1{,}66 * 0{,}38^2\right)^2 + 0{,}38^2} = -\frac{0{,}38}{2{,}178} = -0{,}175$$

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{\left(1{,}66 - 1{,}66\omega^2\right)^2 + \omega^2}} = \sqrt{\mathrm{Re}\{F(j\omega)\}^2 + \mathrm{Im}\{F(j\omega)\}^2} = \sqrt{(0{,}655)^2 + (-0{,}175)^2} = 0{,}678$$

(3a) Frekvenční charakteristika v komplexní rovině

Vše potřebné pro sestrojení frekvenční charakteristiky v komplexní rovině již máme spočítáno a zaznamenáno v tabulce ad **(1)**.

graf viz příloha

(3b) Frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích

Logaritmická frekvenční charakteristika je ekvivalentním vyjádřením charakteristiky v komplexní rovině. Logaritmováním frekvenčního přenosu dostaneme vztah:

$$\ln F(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega)$$

Zvlášť poté vynášíme logaritmus amplitudy jako LAFCH a zvlášť fázi jako LFFCH. Na vodorovnou osu obou charakteristik vynášíme dekadický logaritmus kruhové frekvence ω. K tomu se používá logaritmická stupnice s dekádovým, popř. oktávovým intervalem.

(i) Amplitudová frekvenční charakteristika

Často se při kreslení LAFCH vynáší na svislou osu amplituda v decibelech (tzv. zisk), což je jednotka definovaná jako dvacetinásobek dekadického logaritmu.

$$A(\omega) = 20\log|F(j\omega)| = 20\log\sqrt{\frac{1}{\left(a_0 - a_2\omega^2\right)^2 + a_1^2\omega^2}} = 10\log 1 - 10\log\left(a_0^2 - 2a_0a_2\omega^2 + a_2^2\omega^4 + a_1^2\omega^2\right) =$$

$$= -10\log\left[a_0^2\left(1 - 2\frac{a_2}{a_0}\omega^2 + \frac{a_2^2}{a_0^2}\omega^4 + \frac{a_1^2}{a_0^2}\omega^2\right)\right] = -10\log\left\{a_0^2\left[\left(1 - \frac{a_2}{a_0}\omega^2\right)^2 + \frac{a_1^2}{a_0^2}\omega^2\right]\right\}$$

Dostáváme konečný vztah pro zisk:

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{a_0} - 10\log\left[\left(1 - \frac{a_2}{a_0}\omega^2\right)^2 + \frac{a_1^2}{a_0^2}\omega^2\right]$$

A pro náš konkrétní přenos:

$$a_2 = 1{,}66; a_1 = 1; a_0 = 1{,}66$$

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{1{,}66} - 10\log\left[\left(1 - \frac{1{,}66}{1{,}66}\omega^2\right)^2 + \frac{1}{1{,}66^2}\omega^2\right]$$

Příklad výpočtu:

$\omega = 0{,}38 rad \cdot s^{-1}$

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{1{,}66} - 10\log\left[\left(1-0{,}38^2\right)^2 + \frac{1}{1{,}66^2}0{,}38^2\right] = -4{,}402 - 10\log[0{,}732 + 0{,}0524] =$$

$$= -4{,}402 + 1{,}0546 = -3{,}34$$

ω[rad/s]	0,000	0,381	0,609	0,741	0,842	0,924	0,999	1,087	1,188	1,357	1,646
A(ω)	-4,402	-3,340	-1,644	-0,447	0,258	0,397	0,008	-1,046	-2,727	-5,792	-10,321

graf viz příloha

(ii) Fázová frekvenční charakteristika

Na svislou osu fázové frekvenční charakteristiky vynášíme fázi (fázový posuv) *Φ(ω)* v úhlových stupních.

$$tg\Phi = \frac{\mathrm{Im}\{F(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{F(j\omega)\}} = -\frac{a_1\omega}{a_0 - a_2\omega^2}$$

Při počítání fáze nesmíme zapomenout na fakt, že funkce tangens je periodická a proto musíme v některých případech připočítávat periodu π.

Příklad výpočtu:

$\omega = 0{,}38 rad/s$

$$tg\Phi = -\frac{-0{,}18}{0{,}66} = -\frac{0{,}38}{1{,}66 - 1{,}66 * 0{,}38^2} = -0{,}27$$

$$\Phi = arctg(-0{,}27)$$

$$\Phi = -14{,}99°$$

ω[rad/s]	0	0,38	0,61	0,74	0,84	0,92	1	1,09	1,19	1,36	1,65	2,63
Φ[°]	0,00	-14,99	-30,19	-44,65	-60,05	-75,15	-89,81	-105,56	-119,93	-135,95	-149,99	-165,04

graf viz příloha

(4) Asymptotické logaritmické frekvenční charakteristiky

(i) Amplitudová frekvenční charakteristika

Přesný průběh amplitudové charakteristiky nahradíme asymptotickým průběhem.

Rovnice asymptot: 1° pro ω = 0 rad/s:

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{a_0} - 10\log 1$$

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{a_0}$$

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{1{,}66} = -4{,}402$$

2° pro ω → ∞ rad/s:

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{a_0} - 20\log\frac{a_2}{a_0}\omega^2 = \left\langle \frac{a_2}{a_0} = \left(\frac{1}{\omega_n}\right)^2 \right\rangle = 20\log\frac{1}{a_0} - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = 20\log\frac{1}{a_0} - 40\log\frac{\omega}{\omega_n}$$

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{1{,}66} - 40\log\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}\omega = -4{,}402 - 40\log\omega$$

Jde o rovnici přímky se sklonem -40 dB/dek.

Průsečík obou přímek (asymptot) je dán společným řešením obou rovnic:

$$20\log\frac{1}{a_0} = 20\log\frac{1}{a_0} - 40\log\frac{\omega}{\omega_n}$$

$$40\log\frac{\omega}{\omega_n} = 0 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_n} = 1; \omega = \omega_n$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \left(\frac{1}{\omega_n}\right)^2; \frac{1}{\omega_n} = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1{,}66}{1{,}66}}} = 1$$

Tabulka pro vytvoření asymptot:

Jelikož jde o přímky, stačí nám u každé asymptoty pouze dva body.

1° pro ω = 0 rad/s:

ω[rad/s]	0,1	10
A(ω)	-4,402	-4,402

2° pro ω → ∞ rad/s:

ω[rad/s]	0,38	2,63
A(ω)	12,34	-21,18

(ii) Amplitudová frekvenční charakteristika

Přesný průběh fázové charakteristiky nahradíme asymptotickým průběhem.

Rovnice asymptot: pro ω = 0 rad/s:

$$tg\Phi = 0 \Rightarrow \Phi = 0$$

Pro ω = ωn = rad/s:

$$\lim_{\omega\to\omega_n} tg\Phi = -\sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \cdot \frac{a_1}{a_0 - a_2\frac{a_0}{a_2}} = -\infty \Rightarrow \Phi = -\frac{\pi}{2}$$

Pro ω → ∞ rad/s:

$$\lim_{\omega\to\omega_n} tg\Phi = -\frac{a_1}{-a_2\omega} = 0 \Rightarrow \Phi = -\pi$$

Tabulka pro vytvoření asymptot:

Jelikož jde o přímky, stačí nám k sestrojení u každé asymptoty pouze dva body.

Pro ω = 0 rad/s:

ω[rad/s]	0,1	100
A(ω)	0	0

Pro ω = ωn = rad/s:

ω[rad/s]	0,1	100
A(ω)	-90	-90

Pro ω → ∞ rad/s:

ω[rad/s]	0,1	100
A(ω)	-180	-180

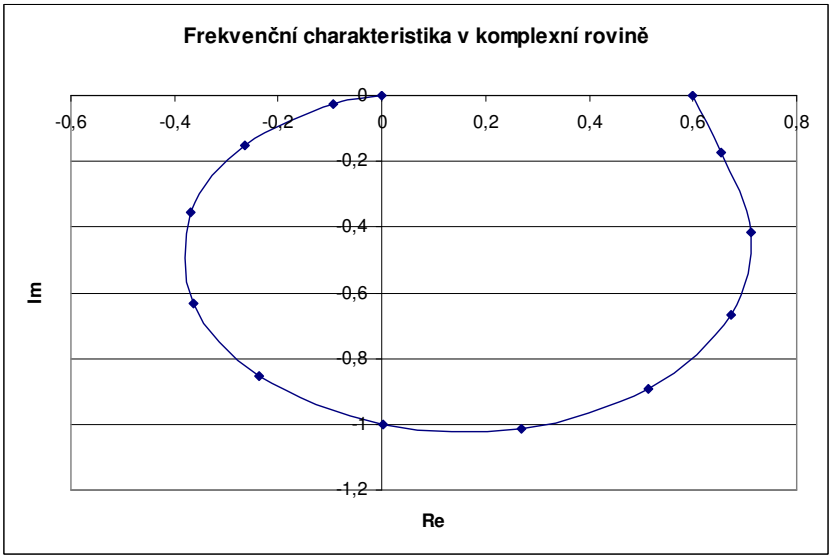
Je nutné si ale uvědomit, jaká bude maximální chyba náhrady. Spočítáme tedy tzv. činitel útlumu:

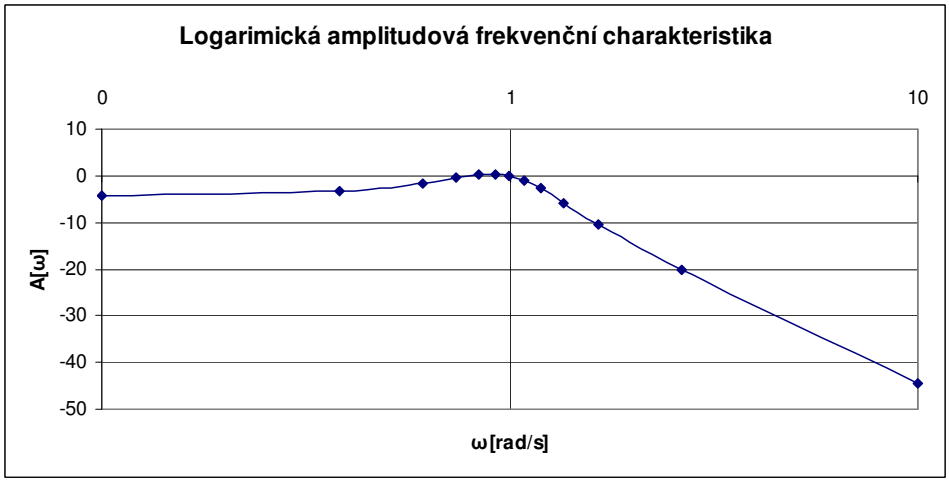
$$D = \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2a_0}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 1{,}66^2}} = \sqrt{\frac{1}{11{,}02}} = 0{,}301$$

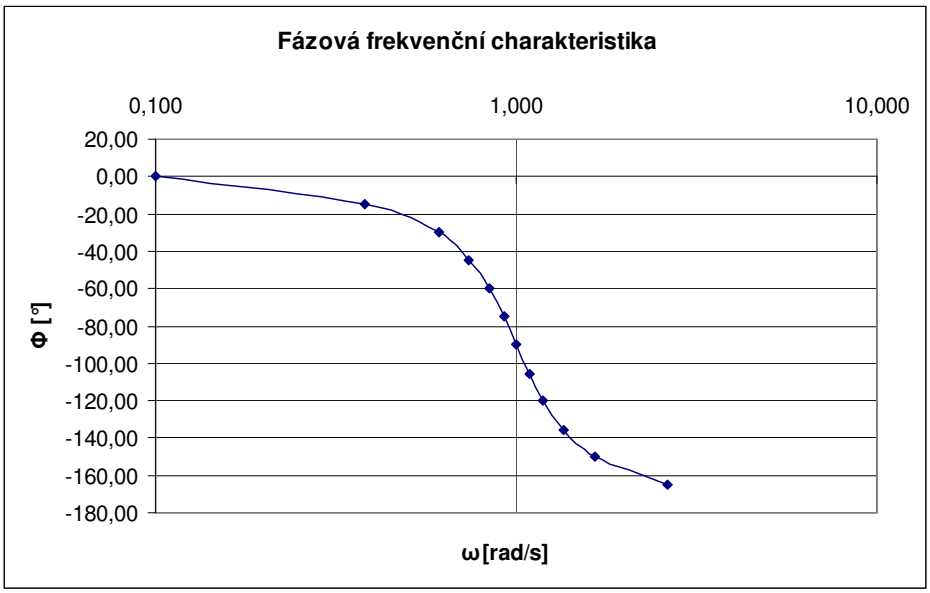
Jelikož $D \notin \langle 0{,}4;0{,}7 \rangle$, ve kterém je chyba náhrady $\Delta x \leq 3dB, \Delta\Phi \leq 6°$, lze očekávat chyby podstatně větší.

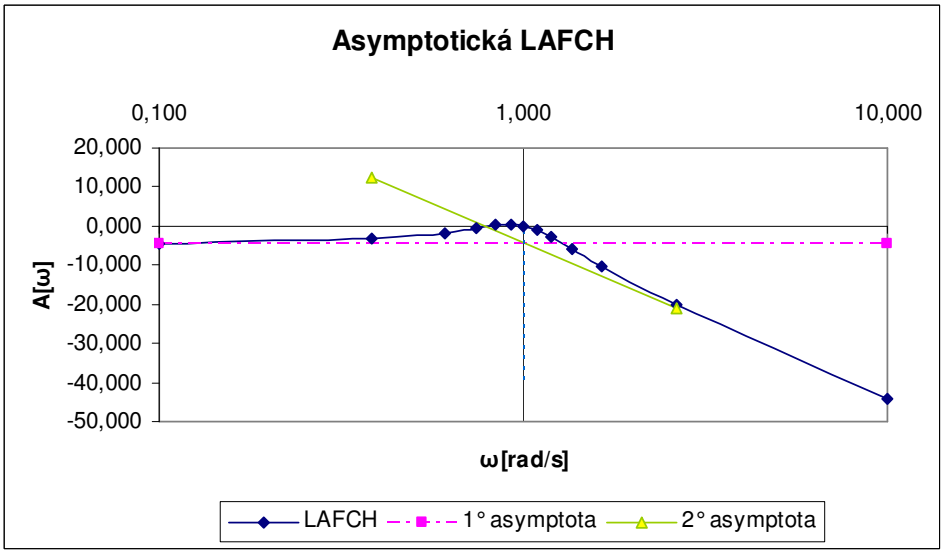
ZÁVĚR A ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ:

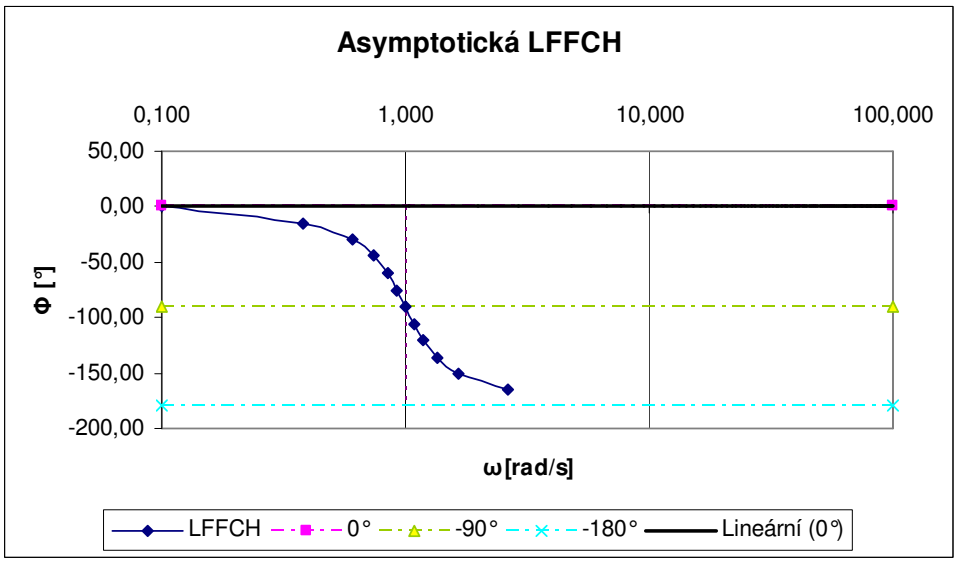
Pomocí programového vybavení na PC jsme pro soustavu určenou přenosem $F(p) = \frac{0.6}{p^2 + 0{,}6p + 1}$, analyzovanou v prvním laboratorním cvičení, sestrojili tabulku hodnot pro vykreslení frekvenční charakteristiky. K tomu jsme použili program Microsoft Excel. Graf je zobrazen v komplexní rovině i v logaritmických souřadnicích. Dále jsme sestrojili asymptotické logaritmické frekvenční charakteristiky měřené soustavy a odhadli, že se jedná o stabilní systém druhého řádu. Průběh frekvenčních charakteristik pro naši soustavu 2. řádu vyšel stejně jako teoretické odhady průběhu probírané na přednášce z Teorie řízení. Z toho lze usoudit, že jsou naše výsledky správné.






Fázová frekvenční charakteristika
0,100
1,000
10,000
20,00
0,00
-20,00
-40,00
-60,00
-80,00
-100,00
-120,00
-140,00
-160,00
-180,00
Φ [°]
ω[rad/s]


Asymptotická LAFCH
0,100
1,000
10,000
20,000
10,000
0,000
-10,000
-20,000
-30,000
-40,000
-50,000
A[ω]
ω[rad/s]
LAFCH
1° asymptota
2° asymptota


Asymptotická LFFCH
0,100
1,000
10,000
100,000
50,00
0,00
-50,00
-100,00
-150,00
-200,00
Φ [°]
ω[rad/s]
LFFCH
0°
-90°
-180°
Lineární (0°)