

ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

Laboratorní cvičení z TŘ- R3a

Výpočet frekvenční charakteristiky s využitím PC a její konstrukce

Jméno apříjmení:	*Kamila Matoušková*
Osobní číslo:	*A04085*
Datum měření:	*20.3. 2007*
Pracovní skupina	*č.3*

ZADÁNÍ REFERÁTU:

1. Pro daný přenos soustavy 2. řádu, analyzované v prvním laboratorním cvičení, sestavte tabulku vypočítaných hodnot k sestrojení frekvenční charakteristiky.

2. Uveďte potřebné matematické vztahy a příklad výpočtu jednoho bodu frekvenční charakteristiky (pro jednu hodnotu frekvence).

   Další body frekvenční charakteristiky řešte s využitím programového vybavení na PC.

3. Frekvenční charakteristiku sestrojte:
   a) v komplexní rovině,
   b) v logaritmických souřadnicích.

4. Zkonstruujte asymptotické logaritmické frekvenční charakteristiky měřené soustavy a zpětně usuzujte na její vlastnosti.

5. Proveďte zhodnocení získaných výsledků.

Poznámka:

Frekvenční přenos je nutno upravit na algoritmizovaný tvar, tj.

$$F(j\omega) = \frac{1}{a_2(j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0}$$

ŘEŠENÍ:

(1) Tabulka vypočítaných hodnot

f[Hz]	0,000	0,061	0,097	0,118	0,134	0,147	0,159	0,173	0,189	0,216	0,262	0,418
Re{F(jw)}	0,600	0,655	0,713	0,674	0,514	0,268	0,003	-0,238	-0,364	-0,368	-0,263	-0,095
Im{F(jw)}	0,000	-0,175	-0,415	-0,666	-0,892	-1,012	-1,001	-0,854	-0,632	-0,356	-0,152	-0,025
A[w]	0,600	0,678	0,825	0,948	1,029	1,047	1,001	0,886	0,730	0,512	0,304	0,098
A[dB]	-4,437	-3,372	-1,670	-0,465	0,249	0,395	0,008	-1,049	-2,736	-5,810	-10,347	-20,150
Fi [°]	0,000	-14,991	-30,190	-44,651	-60,045	-75,153	-89,814	-105,555	-119,930	-135,955	-149,988	-165,041
w[rad/s]	0,000	0,381	0,609	0,741	0,842	0,924	0,999	1,087	1,188	1,357	1,646	2,626

(2) Matematické vztahy a příklad výpočtu

Budeme pracovat se soustavou z předchozího měření, jejíž obrazový přenos je tvaru

$$F(p) = \frac{0,6}{p^2 + 0,6p + 1}$$

Pro výpočet frekvenční charakteristiky provedeme substituci $p = j\omega$:

$$F(p) = \frac{0,6}{p^2 + 0,6p + 1}$$

$$F(p) = \frac{0,6}{(j\omega)^2 + 0,6j\omega + 1}$$

Reálná a imaginární část :

$$F(p) = \frac{1}{a_2(j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0} = \frac{1}{a_0 - a_2\omega^2 + a_1 j\omega} = \frac{1}{a_0 - a_2\omega^2 + a_1 j\omega} \cdot \frac{a_0 - a_2\omega^2 - a_1 j\omega}{a_0 - a_2\omega^2 - a_1 j\omega} =$$

$$= \frac{a_0 - a_2\omega^2 - a_1 j\omega}{\left(a_0 - a_2\omega^2\right)^2 + a_1^2\omega^2} = \frac{a_0 - a_2\omega^2}{\left(a_0 - a_2\omega^2\right)^2 + a_1^2\omega^2} - j\frac{a_1\omega}{\left(a_0 - a_2\omega^2\right)^2 + a_1^2\omega^2}$$

$$\mathrm{Re}\{F(j\omega)\} = \frac{a_0 - a_2\omega^2}{\left(a_0 - a_2\omega^2\right)^2 + a_1^2\omega^2}$$

$$\mathrm{Im}\{F(j\omega)\} = -\frac{a_1\omega}{\left(a_0 - a_2\omega^2\right)^2 + a_1^2\omega^2}$$

Amplituda:

$$A(\omega) = |F(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}\{F(j\omega)\}^2 + \mathrm{Im}\{F(j\omega)\}^2} = \sqrt{\frac{1}{\left(a_0 - a_2\omega^2\right)^2 + a_1^2\omega^2}}$$

A konkrétně pro náš přenos dosadíme koeficienty:

$$a_2 = 1,66; a_1 = 1, a_0 = 1,66$$

$$\mathrm{Re}\{F(j\omega)\} = \frac{1,66 - 1,66\omega^2}{\left(1,66 - 1,66\omega^2\right)^2 + \omega^2}$$

$$\mathrm{Im}\{F(j\omega)\} = -\frac{\omega}{\left(1,66 - 1,66\omega^2\right)^2 + \omega^2}$$

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{\left(1,66 - 1,66\omega^2\right)^2 + \omega^2}}$$

Příklad výpočtu pro:

$\omega = 0{,}38 rad \cdot s^{-1}$

$$\mathrm{Re}\{F(j\omega)\} = \frac{1{,}66 - 1{,}66\omega^2}{\left(1{,}66 - 1{,}66\omega^2\right)^2 + \omega^2} = \frac{1{,}66 - 0{,}38^2}{\left(1{,}66 - 1{,}66 * 0{,}38^2\right)^2 + 0{,}38^2} = \frac{1{,}426}{2{,}178} = 0{,}655$$

$$\mathrm{Im}\{F(j\omega)\} = -\frac{\omega}{\left(1{,}66 - 1{,}66\omega^2\right)^2 + \omega^2} = -\frac{0{,}38}{\left(1{,}66 - 1{,}66 * 0{,}38^2\right)^2 + 0{,}38^2} = -\frac{0{,}38}{2{,}178} = -0{,}175$$

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{\left(1{,}66 - 1{,}66\omega^2\right)^2 + \omega^2}} = \sqrt{\mathrm{Re}\{F(j\omega)\}^2 + \mathrm{Im}\{F(j\omega)\}^2} = \sqrt{(0{,}655)^2 + (-0{,}175)^2} = 0{,}678$$

(3a) Frekvenční charakteristika v komplexní rovině

Vše potřebné pro sestrojení frekvenční charakteristiky v komplexní rovině již máme spočítáno a zaznamenáno v tabulce ad **(1)**.

graf viz příloha

(3b) Frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích

Logaritmická frekvenční charakteristika je ekvivalentním vyjádřením charakteristiky v komplexní rovině. Logaritmováním frekvenčního přenosu dostaneme vztah:

$$\ln F(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega)$$

Zvlášť poté vynášíme logaritmus amplitudy jako LAFCH a zvlášť fázi jako LFFCH. Na vodorovnou osu obou charakteristik vynášíme dekadický logaritmus kruhové frekvence ω. K tomu se používá logaritmická stupnice s dekádovým, popř. oktávovým intervalem.

(i) Amplitudová frekvenční charakteristika

Často se při kreslení LAFCH vynáší na svislou osu amplituda v decibelech (tzv. zisk), což je jednotka definovaná jako dvacetinásobek dekadického logaritmu.

$$A(\omega) = 20\log|F(j\omega)| = 20\log\sqrt{\frac{1}{\left(a_0 - a_2\omega^2\right)^2 + a_1^2\omega^2}} = 10\log 1 - 10\log\left(a_0^2 - 2a_0a_2\omega^2 + a_2^2\omega^4 + a_1^2\omega^2\right) =$$

$$= -10\log\left[a_0^2\left(1 - 2\frac{a_2}{a_0}\omega^2 + \frac{a_2^2}{a_0^2}\omega^4 + \frac{a_1^2}{a_0^2}\omega^2\right)\right] = -10\log\left\{a_0^2\left[\left(1 - \frac{a_2}{a_0}\omega^2\right)^2 + \frac{a_1^2}{a_0^2}\omega^2\right]\right\}$$

Dostáváme konečný vztah pro zisk:

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{a_0} - 10\log\left[\left(1 - \frac{a_2}{a_0}\omega^2\right)^2 + \frac{a_1^2}{a_0^2}\omega^2\right]$$

A pro náš konkrétní přenos:

$$a_2 = 1{,}66; a_1 = 1; a_0 = 1{,}66$$

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{1{,}66} - 10\log\left[\left(1 - \frac{1{,}66}{1{,}66}\omega^2\right)^2 + \frac{1}{1{,}66^2}\omega^2\right]$$

Příklad výpočtu:

$\omega = 0{,}38 rad \cdot s^{-1}$

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{1{,}66} - 10\log\left[\left(1-0{,}38^2\right)^2 + \frac{1}{1{,}66^2}0{,}38^2\right] = -4{,}402 - 10\log[0{,}732 + 0{,}0524] =$$

$$= -4{,}402 + 1{,}0546 = -3{,}34$$

ω[rad/s]	0,000	0,381	0,609	0,741	0,842	0,924	0,999	1,087	1,188	1,357	1,646
A(ω)	-4,402	-3,340	-1,644	-0,447	0,258	0,397	0,008	-1,046	-2,727	-5,792	-10,321

graf viz příloha

(ii) Fázová frekvenční charakteristika

Na svislou osu fázové frekvenční charakteristiky vynášíme fázi (fázový posuv) *Φ(ω)* v úhlových stupních.

$$tg\Phi = \frac{\mathrm{Im}\{F(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{F(j\omega)\}} = -\frac{a_1\omega}{a_0 - a_2\omega^2}$$

Při počítání fáze nesmíme zapomenout na fakt, že funkce tangens je periodická a proto musíme v některých případech připočítávat periodu π.

Příklad výpočtu:

$\omega = 0{,}38 rad/s$

$$tg\Phi = -\frac{-0{,}18}{0{,}66} = -\frac{0{,}38}{1{,}66 - 1{,}66 * 0{,}38^2} = -0{,}27$$

$$\Phi = arctg(-0{,}27)$$

$$\Phi = -14{,}99°$$

ω[rad/s]	0	0,38	0,61	0,74	0,84	0,92	1	1,09	1,19	1,36	1,65	2,63
Φ[°]	0,00	-14,99	-30,19	-44,65	-60,05	-75,15	-89,81	-105,56	-119,93	-135,95	-149,99	-165,04

graf viz příloha

(4) Asymptotické logaritmické frekvenční charakteristiky

(i) Amplitudová frekvenční charakteristika

Přesný průběh amplitudové charakteristiky nahradíme asymptotickým průběhem.

Rovnice asymptot: 1° pro ω = 0 rad/s:

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{a_0} - 10\log 1$$

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{a_0}$$

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{1{,}66} = -4{,}402$$

2° pro ω → ∞ rad/s:

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{a_0} - 20\log\frac{a_2}{a_0}\omega^2 = \left\langle \frac{a_2}{a_0} = \left(\frac{1}{\omega_n}\right)^2 \right\rangle = 20\log\frac{1}{a_0} - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = 20\log\frac{1}{a_0} - 40\log\frac{\omega}{\omega_n}$$

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{1{,}66} - 40\log\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}\omega = -4{,}402 - 40\log\omega$$

Jde o rovnici přímky se sklonem -40 dB/dek.

Průsečík obou přímek (asymptot) je dán společným řešením obou rovnic:

$$20\log\frac{1}{a_0} = 20\log\frac{1}{a_0} - 40\log\frac{\omega}{\omega_n}$$

$$40\log\frac{\omega}{\omega_n} = 0 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_n} = 1; \omega = \omega_n$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \left(\frac{1}{\omega_n}\right)^2; \frac{1}{\omega_n} = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1{,}66}{1{,}66}}} = 1$$

Tabulka pro vytvoření asymptot:

Jelikož jde o přímky, stačí nám u každé asymptoty pouze dva body.

1° pro ω = 0 rad/s:

ω[rad/s]	0,1	10
A(ω)	-4,402	-4,402

2° pro ω → ∞ rad/s:

ω[rad/s]	0,38	2,63
A(ω)	12,34	-21,18

(ii) Amplitudová frekvenční charakteristika

Přesný průběh fázové charakteristiky nahradíme asymptotickým průběhem.

Rovnice asymptot: pro ω = 0 rad/s:

$$tg\Phi = 0 \Rightarrow \Phi = 0$$

Pro ω = ωn = rad/s:

$$\lim_{\omega\to\omega_n} tg\Phi = -\sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \cdot \frac{a_1}{a_0 - a_2\frac{a_0}{a_2}} = -\infty \Rightarrow \Phi = -\frac{\pi}{2}$$

Pro ω → ∞ rad/s:

$$\lim_{\omega\to\omega_n} tg\Phi = -\frac{a_1}{-a_2\omega} = 0 \Rightarrow \Phi = -\pi$$

Tabulka pro vytvoření asymptot:

Jelikož jde o přímky, stačí nám k sestrojení u každé asymptoty pouze dva body.

Pro ω = 0 rad/s:

ω[rad/s]	0,1	100
A(ω)	0	0

Pro ω = ωn = rad/s:

ω[rad/s]	0,1	100
A(ω)	-90	-90

Pro ω → ∞ rad/s:

ω[rad/s]	0,1	100
A(ω)	-180	-180

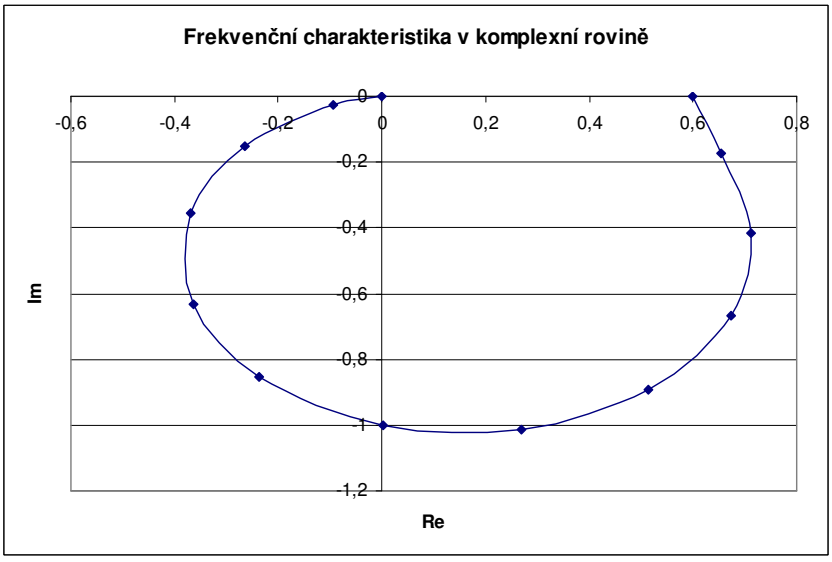
Je nutné si ale uvědomit, jaká bude maximální chyba náhrady. Spočítáme tedy tzv. činitel útlumu:

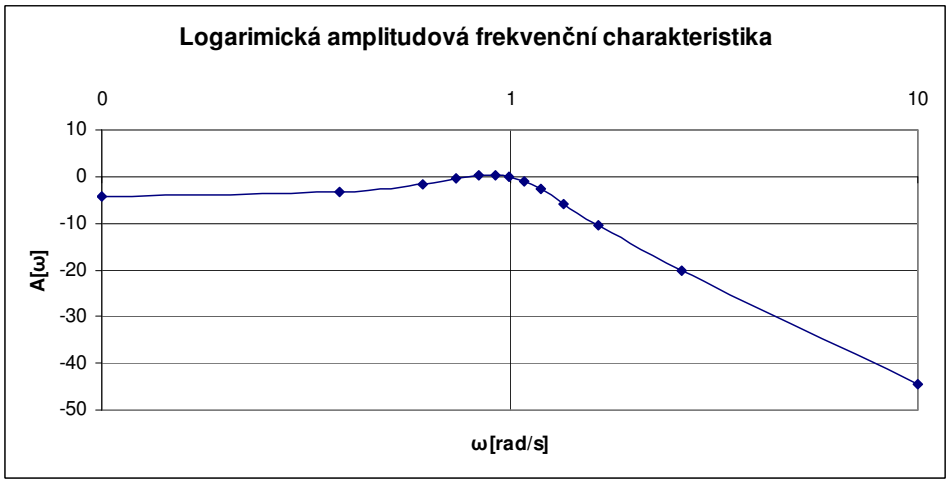
$$D = \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2a_0}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 1{,}66^2}} = \sqrt{\frac{1}{11{,}02}} = 0{,}301$$

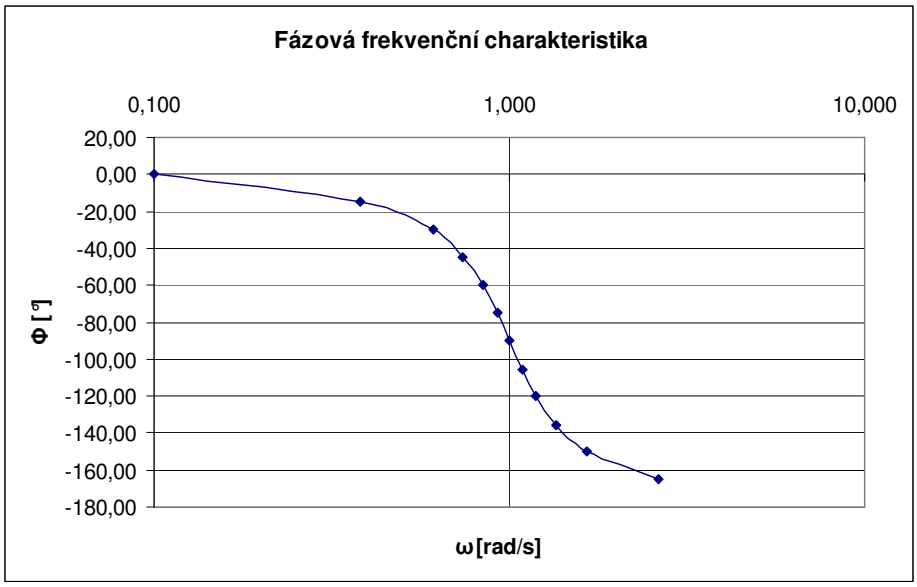
Jelikož $D \notin \langle 0{,}4;0{,}7 \rangle$, ve kterém je chyba náhrady $\Delta x \leq 3dB, \Delta\Phi \leq 6°$, lze očekávat chyby podstatně větší.

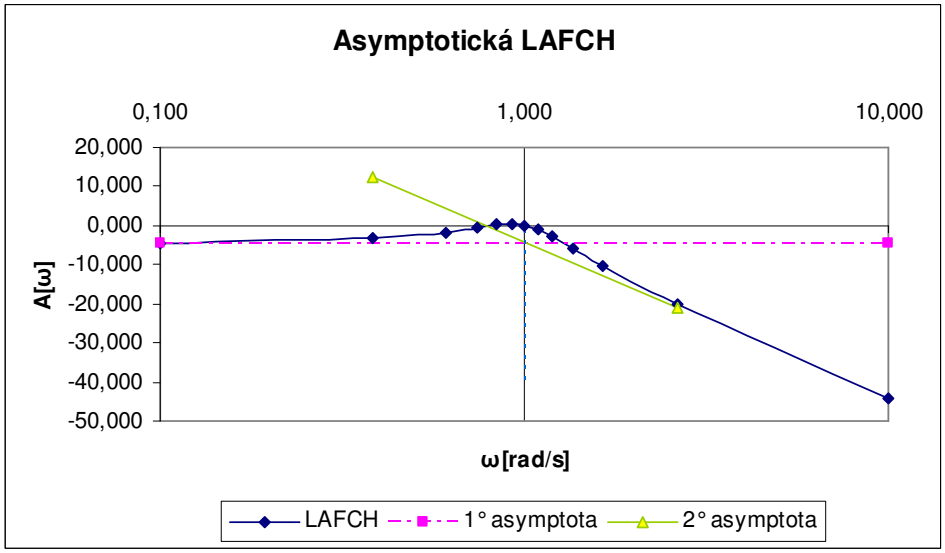
ZÁVĚR A ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ:

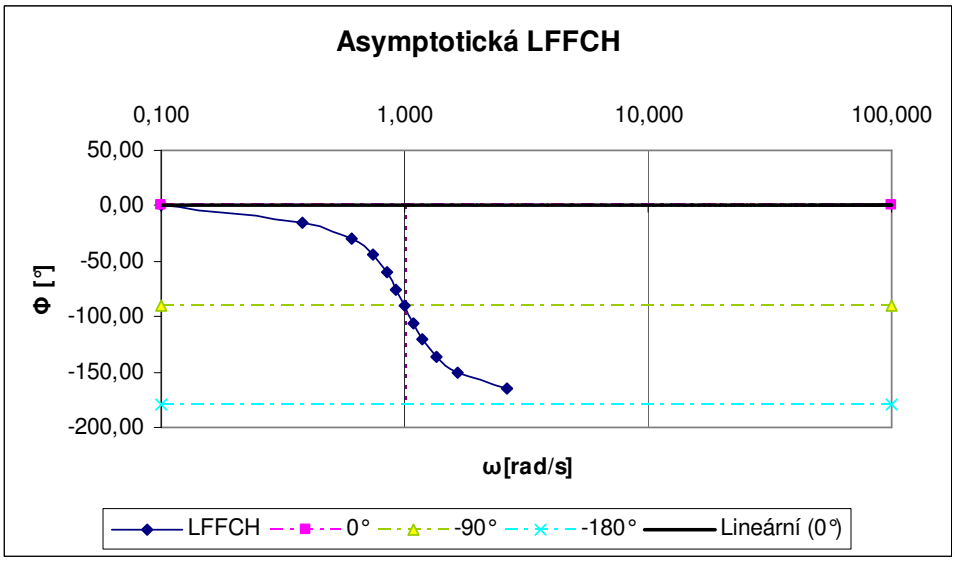
Pro naši soustavu určenou přenosem $F(p) = \frac{0.6}{p^2 + 0{,}6p + 1}$, analyzovanou v prvním laboratorním cvičení, jsem pomocí programového vybavení na PC vypočítala a sestrojila tabulku hodnot pro sestrojení frekvenční charakteristiky. Frekvenční charakteristiku jsem sestrojila pomocí programu Microsoft Excel v komplexní rovině i v logaritmických souřadnicích. Dále jsem sestrojila asymptotické logaritmické frekvenční charakteristiky měřené soustavy a usuzovala na její vlastnosti, které jsou popsány výše. Během zpracování výsledků se nevyskytly závažné problémy. Průběh frekvenčních charakteristik pro naši soustavu 2. řádu vyšel stejně jako teoretické průběhy probírané na přednášce z Teorie řízení. Z toho jsem usoudila, že naše výsledky mohu považovat za správné.






Fázová frekvenční charakteristika
0,100
1,000
10,000
20,00
0,00
-20,00
-40,00
-60,00
-80,00
-100,00
-120,00
-140,00
-160,00
-180,00
Φ [°]
ω[rad/s]


Asymptotická LAFCH
0,100
1,000
10,000
20,000
10,000
0,000
-10,000
-20,000
-30,000
-40,000
-50,000
A[ω]
ω[rad/s]
LAFCH
1° asymptota
2° asymptota


Asymptotická LFFCH
0,100
1,000
10,000
100,000
50,00
0,00
-50,00
-100,00
-150,00
-200,00
Φ [°]
ω[rad/s]
LFFCH
0°
-90°
-180°
Lineární (0°)