ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

Samostatná práce z KIV/VSP

příklad č. 5, okruh 2

Ivan Habernal, A02226
e-mail: habernal@students.zcu.cz
datum narození: 5. 7.

1 Zadání

Je dána funkce $R(t)$ pro neobnovovaný systém jako

$$R(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 < t < 100 \\ 2 - 0,01t & \text{pro } 100 < t < 200 \text{ (lin. klesá)} \\ 0 & \text{pro } 200 < t \end{cases}$$

Určete další ukazatele spolehlivosti, tj. $Q(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ (vzorce) a nakreslete jejich průběhy. Dále určete pravděpodobnost poruchy systému v časovém intervalu $\langle 50, 150 \rangle$ a střední dobu bezporuchového provozu T_s.

2 Teoretický úvod

Náhodná veličina $\tau(\tau > 0)$ je charakterizována svou distribuční funkcí $F(t)$, čili pravděpodobností, že bude nabývat hodnoty menší než je určitá zadaná hodnota. Lze ji vyjádřit vztahem $F(t) = \mathcal{P}(\tau < t)$, kde $\mathcal{P}(A)$ je pravděpodobnost jevu A a t je nezáporné reálné číslo. Distribuční funkce $F(t)$ je neklesající a platí pro ni $0 \leq F(t) \leq 1$ pro všechna t.

V teorii spolehlivosti má distribuční funkce význam *pravděpodobnosti poruchy* objektu do času t (kde t je čas od uvedení objektu do provozu) a značí se $Q(t)$.

Opakem je *pravděpodobnost bezporuchového provozu* objektu v čase t a je doplněk distribuční funkce do jedničky. Značí se $R(t)$ a platí:

$$R(t) = 1 - Q(t) \tag{1}$$

Hustotu pravděpodobnosti (v teorii spolehlivosti se označuje jako *hustota poruch*) $f(t)$ spojité náhodné veličiny t lze určit derivací distribuční funkce podle času, tedy

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

pokud tato derivace existuje.

K nejdůležitějším ukazatelům v teorii spolehlivosti patří *intenzita poruch* a udává podmíněnou hustotu poruch v čase t za předpokladu, že k poruše dosud nedošlo. Je definovaná vztahem

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - Q(t)} \tag{3}$$

Pravděpodobnost, že se objekt neporouchaný v čase t porouchá v malém časovém intervalu $\mathrm{d}t$ následujícím za t je $\lambda(t)\mathrm{d}t$.

Postupně dosadíme do vztahů 1 a 2, pak do 3:

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} \\ \lambda(t) &= -\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{R(t)} \end{aligned} \tag{4}$$

Rovnici upravíme a intergrujeme na tvar

$$R(t) = \mathrm{e}^{\left(-\int_0^t \lambda(\tau)\mathrm{d}\tau\right)} \tag{5}$$

Pro období normálního provozu elektronických součástek v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ bylo empiricky zjištěno, že λ má přibližně konstatní hodnotu.[1] Pak dokážeme integrál 5 vypočítat a dostaneme výrazy popisující *exponenciální zákon poruch.*

$$\begin{aligned} R(t) &= \mathrm{e}^{-\lambda t} && (6) \\ Q(t) &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} && (7) \\ f(t) &= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} && (8) \end{aligned}$$

Dalším důležitým ukazatelem je *střední doba bezporuchového provozu* T_s (tj. střední hodnota sledované náhodné veličiny τ), což je středí hodnota provozní doby objektu, při níž nenastala žádná porucha. Vypočítá se ze vzorce

$$T_s = \int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t \tag{9}$$

Pro neobnovované objekty se nazývá též *střední doba do první poruchy.*

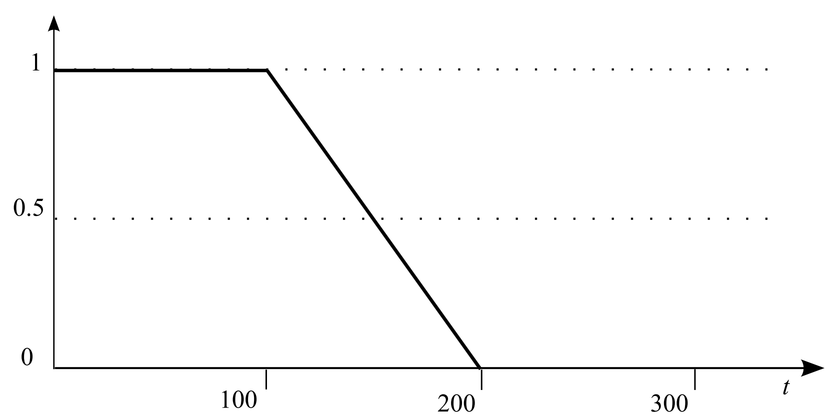
Pokud známe průběh $R(t)$, můžeme odvodit T_s integrací vztahu 9, dostaneme pak (pro exponencionální rozdělení)

$$T_s = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} \tag{10}$$

3 Řešení

Pravděpodobnost poruchy $Q(t)$ určíme jednoduše podle vzorce 1, čili

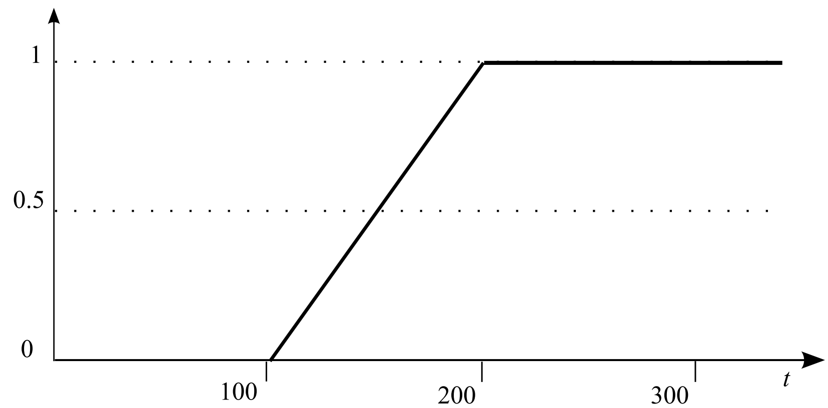
$$Q(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 < t < 100 \\ -1 + 0,01t & \text{pro } 100 < t < 200 \\ 1 & \text{pro } 200 < t \end{cases} \tag{11}$$



Obrázek 1: Průběh pravděpodobnosti bezporuchového provozu $R(t)$

Zadaný průběh pravděpodobnosti bezporuchového provozu a vypočtený průběh pravděpodobnosti poruchy jsou na obrázcích 1 a 2.

[1] $t_1 \doteq 6$ až 10 týdnů a $t_2 \doteq 10$ let

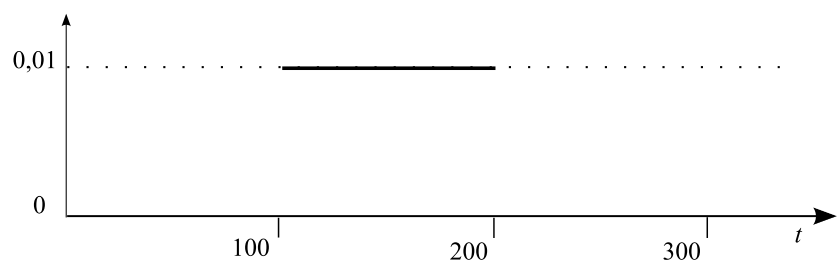


Obrázek 2: Průběh pravděpodobnosti poruchy $Q(t)$

Jednoduchou derivací rovnice 11 dostaneme $f(t)$, čili *hustotu poruch*. Řešení je ve tvaru

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 < t < 100 \\ 0,01 & \text{pro } 100 < t < 200 \\ 0 & \text{pro } 200 < t \end{cases} \tag{12}$$

a jeho průběh je zobrazen na obrázku 3.



Obrázek 3: Průběh hustoty poruch $f(t)$

Z rovnice 3 vypočítáme *intenzitu poruch* $\lambda(t)$. Průběh zachycuje obrázek 4 a řešením je následující rovnice:

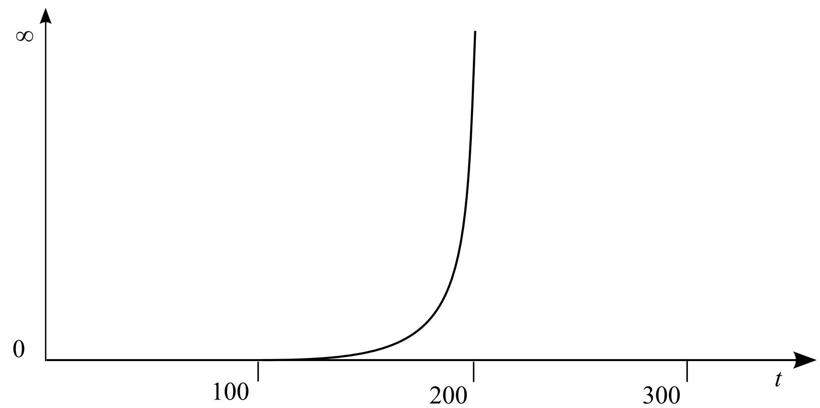
$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 < t < 100 \\ \frac{10}{200-t} & \text{pro } 100 < t < 200 \\ \text{nedef. } \left(\frac{0}{0}\right) & \text{pro } 200 < t \end{cases} \tag{13}$$

Pravděpodobnost poruchy na intervalu $\langle 50, 150 \rangle$ vypočítáme z *pravděpodobnosti poruchy* $Q(t)$ (neboli distribuční funkce $F(t)$). Je to pravděpodobnost toho, že se systém do času $t_2 = 150$ porouchá a zároveň pravděpodobnost, že se do času $t_1 = 50$ neporouchá, čili

$$\mathcal{P}_{\langle t_1, t_2 \rangle} = Q(150) - Q(50) = 0,5. \tag{14}$$

Střední dobu bezporuchového provozu T_s vypočteme z integrálu 9. Pro tento triviální případ lze k výsledku dojít i z obrázku 1, kdy spočítáme obsah oblasti pod křivkou $R(t)$.

$$T_s = \int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t = 150 \tag{15}$$



Obrázek 4: Intenzita poruch $\lambda(t)$

Reference

[1] Racek S.: *Pravděpodobnostní modely počítačů*, (nevydáno).