Bezkontextové gramatiky

Def. BKG: G = (N, T, P, S) kde

1. **N je množina neterminálních symbolů,**
2. **T " " terminálních " ,**
3. **$S \in N$ je počáteční symbol,**
4. **P je množina přepisovacích pravidel tvaru**
   $A \to \alpha$, kde $A \in N$, $\alpha \in (N \cup T)^*$

Bezkontextový jazyk
Def. BKL: $L(G) = \{ w : S \Rightarrow^* w ,\ w \in T^* \}$
Tj.L(G) je množina řetězců derivovatelných z S
Úmluva pro zjednodušení zápisů:
a, b, c, ... představují terminální symboly
A, B, C, ... „ neterminální „
X, Y, Z, ... „ $N \cup T$
α, β, γ, ... „ řetězce z $N \cup T$
u, v, z, . . „ „ z terminálních symbolů
e představuje prázdný řetězec
- DERIVACE řetězce α je posloupnost kroků odvození α pomocí přepisovacích pravidel gramatiky

$$S = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha_n = \alpha$$

Dtto $S \Rightarrow^* \alpha$ pozn.: $\Rightarrow^*$ je uzávěr relace $\Rightarrow$

- PŘÍMÁ DERIVACE $\alpha A \beta \Rightarrow \alpha \gamma \beta$, kde $A \to \gamma \in P$
- DERIVAČNÍ STROM je grafickým vyjádřením derivace (struktury) řetězce. Kořenem je počáteční symbol, uzly jsou prvky $N \cup T$, listy jsou prvky T, větve z uzlu A vedou do uzlů, které zleva doprava tvoří řetězec α, který je pravou stranou pravidla $A \to \alpha$

Př. G[E]

$E \to T \mid E + T$
$T \to F \mid T * F$
$F \to (E) \mid i$
Vytvořte derivační strom a derivaci věty např. i + i * i (na tabuli)

Vztah derivace a derivačního stromu

- **KANONICKÁ DERIVACE**
  - **Levá derivace -expanduje vždy nejlevější neterminál**
  - **Pravá derivace -expanduje vždy nejpravější neterminál**

Př. levá a pravá derivace věty i + i * i
na tabuli

- **VĚTNÁ FORMA**

Def.: Řetězec α se nazývá větnou formou v gramatice G, s počátečním symbolem S, platí-li:

$$S \Rightarrow^* \alpha, \text{ kde } \quad \alpha \in (N \cup T)^*$$

- **VĚTA**

Def.: Řetězec α se nazývá větou v gramatice G, s počátečním symbolem S, platí-li:

$$S \Rightarrow^* \alpha, \text{ kde } \quad \alpha \in T^*$$

- **FRÁZE**

Def.: Nechť $\lambda = \alpha\ \beta\ \gamma$ je větná forma v gramatice G. Podřetězec β se nazývá frází větné formy λ vzhledem k neterminálnímu symbolu A, platí-li

$$S \Rightarrow^* \alpha A \gamma \quad \text{a} \quad A \Rightarrow^* \beta$$

- **JEDNODUCHÁ FRÁZE větné formy $\alpha A \gamma$ vzhledem k neterm. A je podřetězec β, platí-li**

$$S \Rightarrow^* \alpha A \gamma \quad \text{a} \quad A \Rightarrow \beta$$

- **L-FRÁZE**

je nejlevější jednoduchou frází

Př.
Najdi fráze, jednoduché fráze a l-frázi větné formy i*i+i v G[E]
(na tabuli)
Problémy analýzy při konstrukci derivačního stromu:

1.(shora dolů) Kterou z pravých stran vybrat k derivování

2.(zdola nahoru) Jak vymezit l-frázi a na co ji redukovat

řešení: -buď analýza s návratem (neefektivní, složitost kubická)

-nebo deterministická analýza (jen pro některé, druhy BKG)

Víceznačnost gramatik

Def. Věta generovaná gramatikou G je víceznačná, existují-li alespoň dva různé, derivační stromy této věty.
G pak rovněž nazýváme víceznačnou.

Př. Jazyk { $a^m c a^n$; m, n >= 0 }

je generován gramatikou S -> aS | Sa | c

-Je věta aaca jednoznačná ? jak vypadá strom ?

-Může pro nejednoznačnou gramatiku existovat ekvivalentní jednoznačná gramatika?

Př. G[E] E -> E + E | E * E | i

-Jaké jsou důsledky v generovaném jazyce ?

Věta: Nutnou podmínkou jednoznačnosti gramatiky je, aby pro žádný neterminální symbol neexistovalo jak pravidlo rekurzivní zprava, tak i pravidlo rekurzivní zleva.

Problém nejednoznačnosti bezkontextověch jazyků je algoritmicky nerozhodnutelný

Př. Syntaktický tvar podmíněného příkazu:

S -> a S b S | a S | c

-Je G[S] víceznačná ?

S1 -> a S2 b S1 | a S1 | c
S2 -> a S2 b S2 | c

Gramatika je také, víceznačná, existují-li v G pro rekurzivní neterm. symbol A alespoň 2 rekurzivní pravidla, z nichž jedno je rekurzivní zprava (zleva) a má shodný prefix (postfix) rekurzivního symbolu A s druhým pravidlem.

Jazyky, které nelze generovat jednoznačnou gramatikou se nazývají inherentně nejednoznačné.

Úpravy gramatik

Odstranění zbytečných symbolů

Zbytečný je takový symbol X, který je buď nedosažitelný z S, nebo (je-li neterminální) z něj nelze generovat terminální řetězec.

$$\underbrace{S \Rightarrow^* \overbrace{w X y}}_{2.} \overbrace{\Rightarrow^* w x y}^{1.} \text{, kde } w, x, y \in T^*$$

Postup při eliminaci zbytečných symbolů

1. a)Označíme všechny $X \in T$.
   b)Označíme všechny $X \in N$, pro něž existuje X-pravidlo, jehož pravá strana neobsahuje neoznačený symbol.
   c)Opakujeme krok b), dokud přibývá označených symbolů.
   d)Neoznaznačené symboly jsou zbytečné.

a)Označíme počáteční symbol S.
   b) Označíme všechny symboly z pravých stran pravidel s označeným levostranným symbolem.
   c)Opakujeme krok b), dokud přibývá označených symbolů.
   d)Neoznaznačené symboly jsou zbytečné.

! na pořadí kroků !

Př. $G[S]$: $S \rightarrow a \mid A$ $\quad A \rightarrow A B$ $\quad B \rightarrow b$

Odstranění prázdných pravidel

Gramatika G je bez prázdných pravidel, jestliže buď neobsahuje žádné pravidlo $A \rightarrow e$, nebo obsahuje jediné takové pravidlo tvaru $S \rightarrow e$ a S se nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla v G.

Postup při odstranění prázdných pravidel

1. Označíme všechny symboly X, pro něž existuje pravidlo s prázdnou pravou stranou.
2. Označíme všechny symboly X, pro něž existuje pravidlo s pravou stranou obsahující pouze označené symboly.
3. Opakujeme 2 dokud přibývá označených symbolů.
4. Takto získanou množinu označíme N_e .
5. Každé pravidlo gramatiky mající na pravé straně jeden či více symbolů z N_e , nahradíme množinou pravidel vzniklých všemi možnými způsoby vypuštění v pravých stranách symbolů z N_e. Případně vznikající pravidla tvaru $X \rightarrow e$ do výsledné gramatiky nezařazujeme.
6. Obsahuje-li N_e počáteční symbol S, vytvoříme nový počáteční symbol S´ s pravidly $S' \rightarrow e$
   a $S' \rightarrow S$

(Gramatika bez prázdných pravidel je nezkracující)

Př. Na tabuli. Odstraňte prázdná pravidla z G[S]: $S \rightarrow a\ S\ b\ S \mid e$

Odstranění jednoduchých pravidel

Jednoduchá pravidla mají tvar $A \rightarrow B$, kde $A, B \in N$

Odstranění = žádný problém = nahradíme $A \rightarrow B$ všemi možnými pravidly vzniklými záměnou B za pravé strany B-pravidel

Př. Zkusme pro G[E] na tabuli

Odstranění cyklů

$A \Rightarrow^* A$ implikuje existenci jednoduchých pravidel

Cyklus je evidentní nešvar. Proč?

Odstraníme jednoduchá pravidla.

Odstranění libovolného pravidla

Nechť chceme z G odstranit pravidlo $A \rightarrow \alpha\ B\ \beta$. Musíme proto místo něj dát do G všechna pravidla tvaru $A \rightarrow \alpha\ \gamma\ \beta$, kde γ jsou pravé strany B pravidel.

Př. V G s pravidly $A \rightarrow a\ A\ A \mid b$ odtranit pravidlo $A \rightarrow a\ A\ A$

Upravená gramatika

neobsahuje cykly, e-pravidla a zbytečné symboly

Odstranění levé rekurze

(Greibachové normální forma: ∀pravé strany začínají terminálem)

Levorekurzivní gramatiku nelze použít k analýze shora dolů

Odstranění pravidla rekurzivního zleva:

Nechť je dána BKG G = (N, T, P, S), ve které,

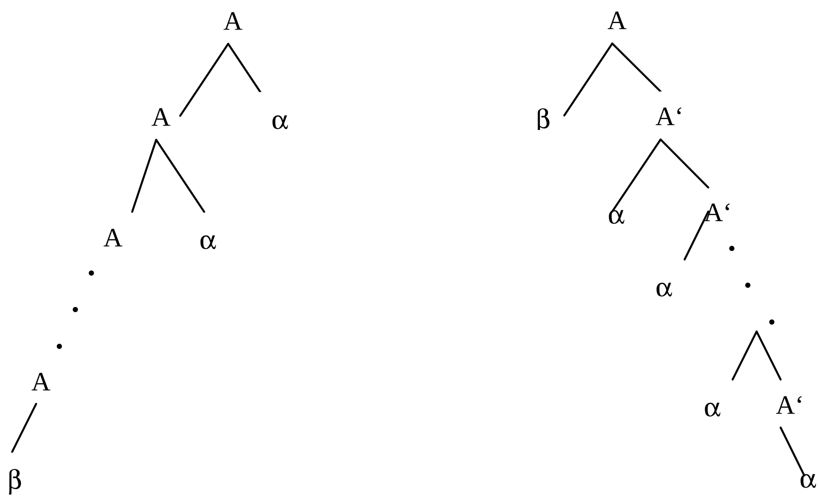
$$\boxed{A \to A\alpha_1 \mid A\alpha_2 \mid \ldots \mid A\alpha_m \mid \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_n}$$

jsou všechna A pravidla v P a žádné, z β nezačíná A.

Pak G' = (N ∪ { A'}, T, P', S), kde P' obsahuje místo uvedených pravidel pravidla:

$$\boxed{\begin{array}{l} A \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_n \mid \beta_1 A' \mid \beta_2 A' \mid \ldots \mid \beta_n A' \\ A' \to \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_m \mid \alpha_1 A' \mid \alpha_2 A' \mid \ldots \mid \alpha_m A' \end{array}}$$

je ekvivalentní s gramatikou G



Př.a) G[E] na tabuli. $E \to E + T \mid T$ **?proč nepoužijeme** $E \to T + E$

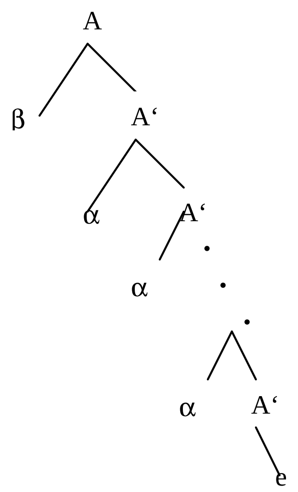
$T \to T * F \mid F$

$F \to (E) \mid i$

Alternativa odstranění s kratším výsledkem:

Ekvivalentní bude jak vidno i gramatika s pravidly

$$\boxed{\begin{array}{l} A \rightarrow \beta_1 A' \mid \beta_2 A' \mid \dots \mid \beta_n A' \\ A' \rightarrow \alpha_1 A' \mid \alpha_2 A' \mid \dots \mid \alpha_m A' \mid e \end{array}}$$



Př.b) G[E] na tabuli.

$$\begin{array}{l} E \rightarrow E + T \mid T \\ T \rightarrow T * F \mid F \\ F \rightarrow (E) \mid i \end{array}$$

Pro pohodlné:

Výsledek př.a)

$E \rightarrow T \mid T E'$
$E' \rightarrow +T \mid + T E'$
$T \rightarrow F \mid F T'$
$T' \rightarrow * F \mid * F T'$
$F \rightarrow (E) \mid i$

výsledek př.b)

$E \rightarrow T E'$
$E' \rightarrow + T E' \mid e$
$T \rightarrow F T'$
$T' \rightarrow * F T' \mid e$
$F \rightarrow (E) \mid i$

Odstranění levé rekurze (včetně nepřímé rekurze):

1. Zvolíme uspořádání na N = {A1, A2, ... An} tak, aby:
je-li Ai $\rightarrow$ α pravidlo, jehož pravá strana začíná neterminálním symbolem Aj , pak j > i .
Přiřaďme i = 1

2. Odstraníme přímou levou rekurzi u Ai pravidel (postup viz výše)

3. Je-li i = n, pak jsme získali výslednou G' a skonči

Jinak přiřaď i = i + 1 ; j = 1

4. Každé, pravidlo tvaru Ai $\rightarrow$ Aj γ nahraď pravidly

Ai $\rightarrow$ $\alpha_1 \gamma$ | $\alpha_2 \gamma$ | … | $\alpha_p \gamma$, kde

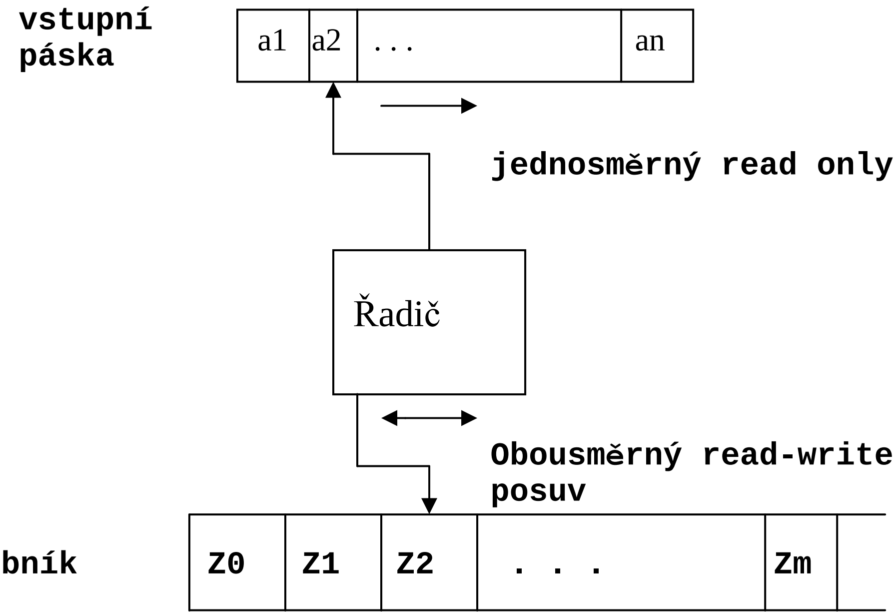
Aj $\rightarrow$ α_1 | α_2 | … | α_p jsou všechna Aj pravidla

5. Je-li j = i - 1 jdi na krok 2., jinak j = j + 1 a jdi na 4.

Př. na tabuli A $\rightarrow$ B C | a
B $\rightarrow$ C A | A b
C $\rightarrow$ A B | CC | a

Zásobníkové automaty

ZA je abstraktní model syntaktického analyzátoru BK jazyků
Obecně je:
-jednocestný,
-nedeterministický,
-s nekonečnou pamětí (zásobníkem)



Definice:

ZA $\mathcal{P} = (\ Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ \delta,\ q_0\ ,\ Z_0\ ,\ F\ )$
1 2 3 4 5 6 7

1.Konečná množina stavů
2.Konečná vstupní abeceda
3.Konečná abeceda zásobníkových symbolů
4.Zobrazení $\delta\colon\ Q \times (\ \Sigma \cup \{e\}\ ) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$
5.Počáteční stav řadiče $\in\ Q$
6.Dno zásobníku $\in\ \Gamma$
7.Množina koncových stavů $\subset\ Q$

Konfigurace ZA $(\ q,\ w,\ \alpha\ )\ \in\ Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$

Stav řadiče
Dosud nepřečtený vstup
Obsah zásobníku

Pozn.: Je to akceptační automat, ne překladový.
Přechod ZA je binární relace $\vdash$ **nad množinou konfigurací,**
nebo její p tou mocninou $\vdash_p$ **či uzávěrem** $\vdash_*$ **a** $\vdash_+$
$(\ q,\ aw,\ \alpha\beta\ )\ \vdash\ (\ p,\ w,\ \gamma\ \beta\ )$ **jestliže** $\delta(\ q,\ a,\ \alpha\ )$ **obsahuje**
$(\ p,\ \gamma\ ),\ \ a \in T \cup \{e\},\ \ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \Gamma^*$
Př. na tabuli. Popsat $\mathcal{P}$ **akceptující** $L = \{\ 0^n\ 1^n\}$ **kde** $n \geq 0$

Počáteční konfigurace ZA je (q_0, w, Z_0), kde $w \in \Sigma^*$

Interpretace zápisu přechodové fce
$\delta(q, a, b) = \{ (p1, \gamma 1), (p2, \gamma 2), \ldots, (pn, \gamma n) \}$
ZA ve stavu q, se vstupním symbolem a, vrcholovým řetězcem zásobníku b, přejde do některého ze stavů pi a vrchol α nahradí příslušným řetězcem $\gamma i \in \Gamma^*$.

Přechod bez čtení vstupního symbolu (e-přechod)
$\delta(q, e, \alpha) = \{ (p1, \gamma 1), (p2, \gamma 2), \ldots, (pn, \gamma n) \}$

Def.
Rozšířený ZA (RZA) je sedmice $\mathscr{P} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$
kde $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{e\}) \times \Gamma^* \rightarrow Q \times \Gamma^*$
tj. reaguje na vrcholové řetězce zásobníku
Př. popsat $\mathscr{P}$ akceptující $L = \{ w w^R \}$ kde $w \in \{a, b\}^*$
R má význam „reverzní“

Def.
Věta w jazyka může být akceptována zásobníkovým automatem $\mathscr{P} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ dvojím způsobem:

a) přechodem do koncového stavu

$L(\mathscr{P}) = \{ w: (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, e, \gamma), \gamma \in \Gamma^*, q \in F, w \in \Sigma^* \}$

b) s prázdným zásobníkem

$L_e(\mathscr{P}) = \{ w: (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, e, e), q \in Q, w \in \Sigma^* \}$

Vztah bezkontextových gramatik a zásobníkových automatů

Pro danou BKG G = (N, T, P, S) můžeme sestrojit ZA $\mathcal{P}$ takový, že L(G) = L($\mathcal{P}$). Platí i opačně.

A.
Konstrukce ZA, který je modelem syntaktické analýzy metodou shora dolů.

$\mathcal{P}$ = ({q}, T, N $\cup$ T, δ, S, ϕ), kde δ je definováno takto:

1. $\delta(q, e, A) = \{ (q, \alpha): A \rightarrow \alpha \in P\}$ pro $\forall$ A $\in$ N,
2. $\delta(q, a, a) = \{ (q, e) \}$ pro $\forall a \in T$.

Operaci 1. nazýváme expanzí (nahradí na vrcholu zásobníku a tím i ve větné formě neterminální symbol některou jeho pravou stranou).

Operaci 2. nazýváme srovnáním (čteného vstupního symbolu a symbolu z vrcholu zásobníku).

Tento ZA má vrchol zásobníku vždy vlevo.

Př. Zapsat $\mathcal{P}$ pro G[E] (na tabuli)

B.
Konstrukce ZA, který je modelem syntaktické analýzy metodou zdola nahoru.

$\mathcal{P}$ = ({q, r}, T, N $\cup$ T $\cup$ {#}, δ, q, #, {r}), kde δ je definováno takto:

1. **δ(q, a, e) = { (q, a) } pro $\forall$a $\in$ T,**
2. **δ(q, e, α) = { (q, A) : A $\rightarrow$ α $\in$ P },**
3. **δ(q, e, #S) = { (r, e) }.**

Operaci 1. nazýváme přesun (přesun vstupního symbolu na vrchol zásobníku).

Operaci 2.nazýváme redukce (náhrada pravé strany pravidla na vrcholu zásobníku a tím i ve větné formě stranou levou).

Operace 3. je přijetí.

Tento ZA má vrchol zásobníku vpravo.

Př. Zapsat $\mathcal{P}$ pro G[E] (na tabuli)

ZA konstruované dle A. i B. jsou obecně nedeterministické (nepoužitelné pro SA). Pro konstrukci SA lze použít buď:

a) **Deterministickou simulaci nedeterministického ZA = algoritmus syntaktické analýzy s návraty.**
b) **Zdokonalit konstrukci ZA tak, aby byl pro určitou třídu BKG deterministický.**

? Co představuje obsah zásobníku zřetězený s ještě nezpracovanou částí vtupního řetězce?