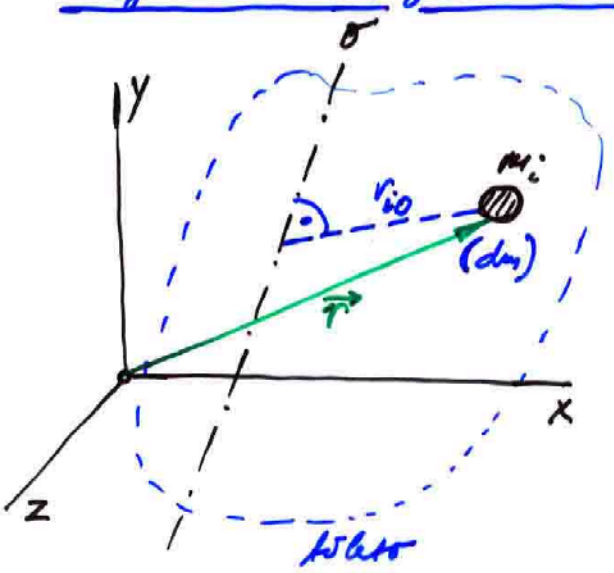
Dynamika tuhého tělesa

Geometrie hmotnosti

- máme hmotnost a statický moment, střed hmotnosti (S)
- budeme definovat osové a deviační momenty setrvačnosti

Osové momenty setrvačnosti

i-tý bod soustavy hmotných bodů



$i = 1, 2, \dots, n$

Moment setrvačnosti k ose σ

$$I_{i\sigma} = m_i \, r_{i0}^2 \quad [kg\,m^2]$$

r_{i0} – kolmá vzdálenost od osy σ

soustava hmotných bodů

$$I_\sigma = \Sigma I_{i0} = \Sigma m_i \, r_{i0}^2$$

Tuhé těleso ..... $I_\sigma = \int_{(m)} r_0^2 \, dm$

Momenty setrvačnosti tělesa k souřadnicovým osám

- polohový vektor $\vec{r}$ → souřadnice x, y, z

osové: $I_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) \, dm$; $I_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) \, dm$

$I_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) \, dm$ – vždy kladné !!

Deviační momenty setrvačnosti:

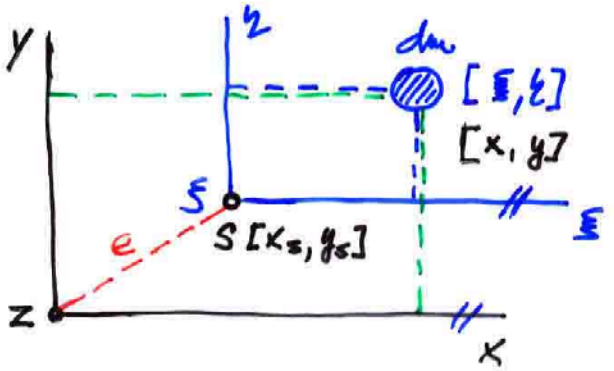
- ke dvojici os
- analogický postup jako u osových momentů setrvačnosti

$$D_{xy} = \int_{(m)} x \cdot y \, dm \; ; \quad D_{xz} = \int_{(m)} x \cdot z \, dm \; ; \quad D_{yz} = \int_{(m)} y \cdot z \, dm \quad [kg\,m^2]$$

- mohou nabývat hodnot $\gtreqless 0$!

Steinerova věta

- transformační vztah momentů setrvačnosti mezi rovnoběžnými souř. soustavy
- jedna soustava musí mít počátek ve středu hmotnosti S tělesa



- známe momenty setrvačnosti v $\Sigma_{\xi\eta\zeta}$
- hledáme momenty setrvačnosti v Σ_{xyz}

Transformační vztah souřadnic

$$x = x_S + \xi$$
$$y = y_S + \eta$$
$$(z = z_S + \zeta)$$

$$\underline{\underline{I_z}} = \int_{(m)} (x^2 + y^2)\, dm = \int_{(m)} \left[(x_S + \xi)^2 + (y_S + \eta)^2 \right] dm =$$

$$= \int_{(m)} (x_S^2 + \underbrace{2\xi \cdot x_S}_{} + \xi^2 + y_S^2 + \underbrace{2 y_S \cdot \eta}_{} + \eta^2) \cdot dm =$$

$2 x_S \int_{(m)} \xi \cdot dm = 0$ – z definice středu hmotnosti

$$= \int_{(m)} (\xi^2 + \eta^2)\, dm + (x_S^2 + y_S^2) \int_{(m)} dm = \underline{\underline{I_{\xi} + m \overbrace{(x_S^2 + y_S^2)}^{e^2}}}$$

Matice setrvačnosti

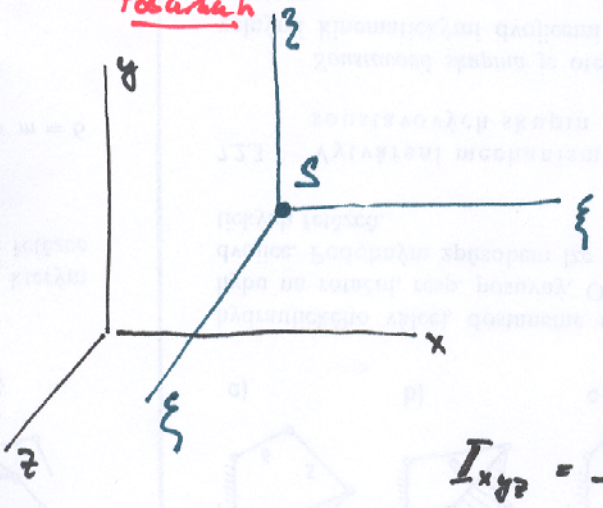
$$I_{xyz} = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

Hlavní osa setrvačnosti – deviační momenty k hlavní ose setrvačnosti jsou nulové

Hlavní centrální osa setrvačnosti – hlavní osa setrvačnosti, která navíc prochází středem hmotnosti

Transformace matice setrvačnosti

Posunutí

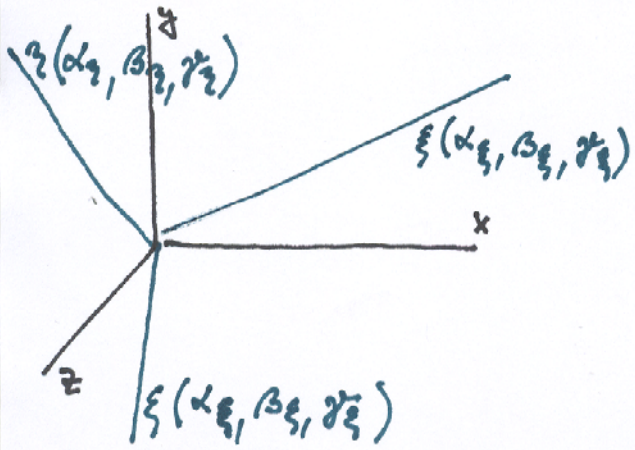


Matici setrvačnosti v souřadnicovém systému S, ξ, ζ, ξ s počátkem ve středu hmotnosti posouváme do souřadnicového syst. O, x, y, z

Steinerova věta

$$I_{xyz} = I_{\xi\zeta\xi} + m \cdot \begin{bmatrix} y_s^2 + z_s^2 & -x_s y_s & -x_s z_s \\ -x_s y_s & x_s^2 + z_s^2 & -y_s z_s \\ -x_s z_s & -y_s z_s & x_s^2 + y_s^2 \end{bmatrix}$$

Rotace



$$I_{\xi\zeta\xi} = T \cdot I_{xyz} \cdot T^T$$

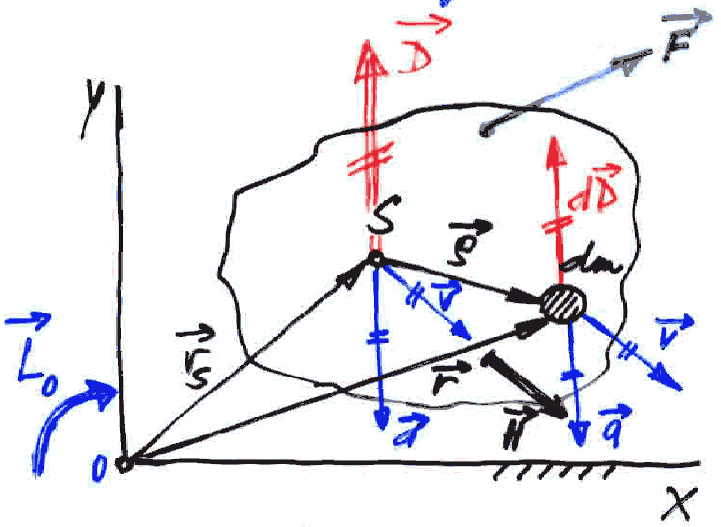
$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha_\xi & \cos\beta_\xi & \cos\gamma_\xi \\ \cos\alpha_\zeta & \cos\beta_\zeta & \cos\gamma_\zeta \\ \cos\alpha_\xi & \cos\beta_\xi & \cos\gamma_\xi \end{bmatrix}$$

Dynamika tělesa

- D'Alembertův přístup k sestavení pohybových rovnic
- všechny síly (statické a dynamické) tvoří obecný obecnou soustavu sil
- může působit $\vec{D}$ (setrvačná síla), $\vec{M}_D$ – setrvačný moment

Posuvný pohyb tělesa

- body tělesa – stejná rychlost, stejné zrychlení, trajektorie stejné a rovnoběžné posunuté křivky



$$E_k = \int_{(m)} \frac{1}{2} v^2 \, dm = \frac{1}{2} m v_S^2$$

$$\vec{H} = \int_{(m)} \vec{v} \, dm = m \vec{v}_S$$

$$\vec{L}_S = \int_{(m)} \vec{\varrho} \times \vec{v} \, dm = \underbrace{\left(\int_{(m)} \vec{\varrho} \cdot dm\right)}_{\vec{0}} \times \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_S \times \vec{H} = \vec{r}_S \times m \vec{v}_S$$

Setrvačné účinky v S

$$d\vec{D} = (-\vec{a}) \cdot dm$$

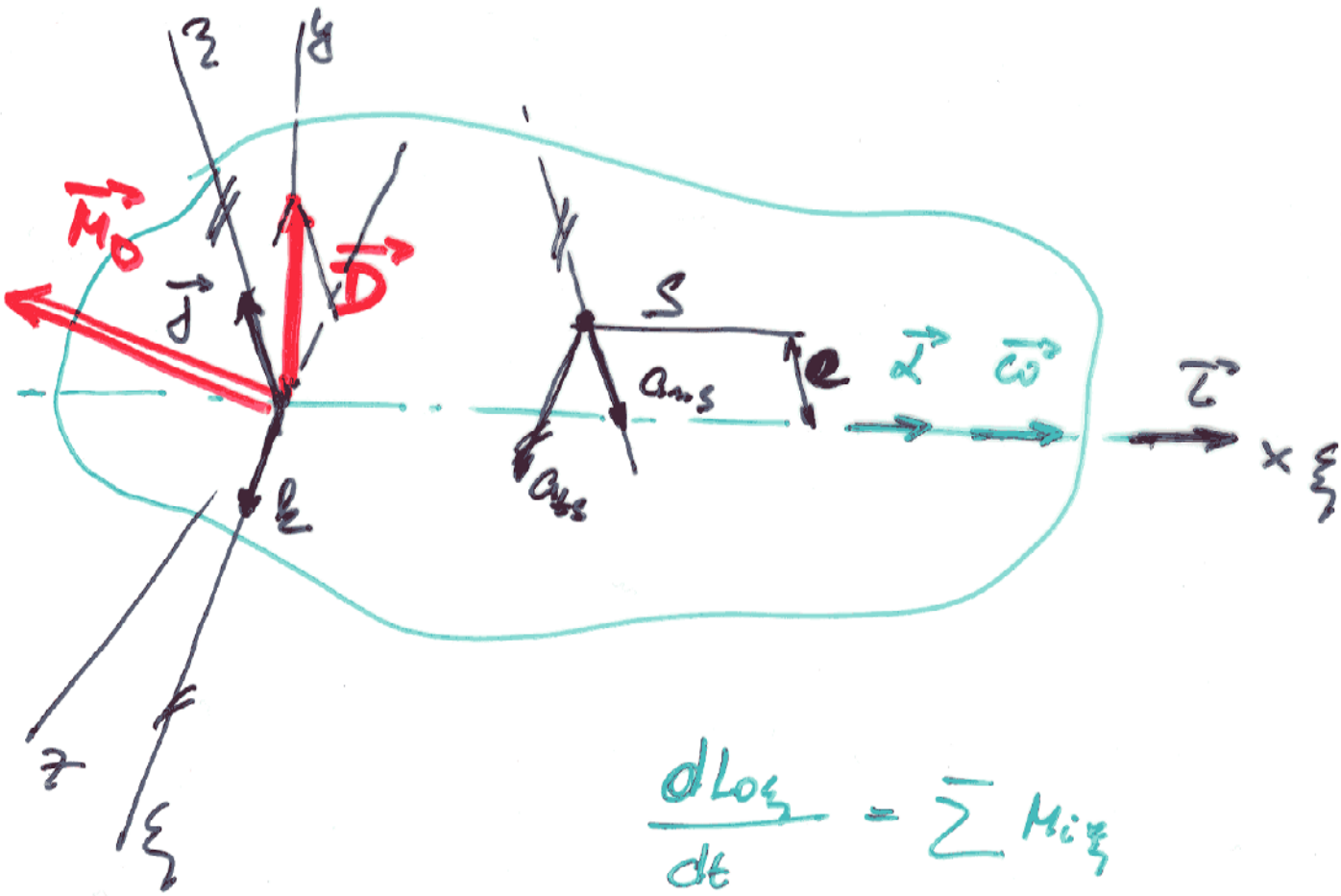
setrvačná síla: $\boxed{\vec{D} = \int_{(m)} (-\vec{a}) \, dm = \underline{-m \vec{a}_S}}$ v S !

setrvačný moment: $\underline{\underline{\vec{M}_D}} = \int_{(m)} \vec{\varrho} \times (-\vec{a}) \, dm = \left(\int_{(m)} \vec{\varrho} \, dm\right) \times (\vec{a}) = \underline{\underline{\vec{0}}}$

Pohybové rovnice:

$$\Sigma F_{ix} + D_x = 0$$
$$\Sigma F_{iy} + D_y = 0$$
$$\Sigma M_i^F + M^D = 0 \quad \text{(k bodu)}$$

Rotační pohyb



$$\frac{dL_{O\xi}}{dt} = \sum M_{i\xi}$$

$$\Rightarrow I_\xi \cdot \alpha = \sum M_{i\xi}$$

$$a_{ns} = e \cdot \omega^2$$
$$a_{ts} = e \cdot \alpha$$

$$\vec{D} = \underbrace{-\vec{k} \cdot m \cdot e \cdot \alpha}_{D_n} + \underbrace{\vec{j} \cdot m \cdot e \cdot \omega^2}_{D_t}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \int v^2 \, dm = \frac{1}{2} \int r^2 \omega^2 \, dm = \frac{1}{2} I_\xi \omega^2$$

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ & I_y & -D_{yz} \\ \text{Sym.} & & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_x \omega \\ -D_{xy} \omega \\ -D_{xz} \omega \end{bmatrix} = \vec{i} \underset{(\xi)}{I_x} \omega - \vec{j} \underset{(\xi\zeta)}{D_{xy}} \omega - \vec{k} \underset{(\xi\zeta)}{D_{xz}} \omega$$

Prostorový pohyb tělesa

Hybnost $\vec{H} = m \cdot \vec{v}_s$

Moment hybnosti $\vec{L}_0 = \underline{\vec{r}_s \times m \vec{v}_s} + \vec{L}_s$

Moment hybnosti relativního pohybu k středu hmotnosti

$$\vec{L}_s = \int_m \vec{\rho} \times dm \, \vec{v}_r$$

$$\underline{E_k = \frac{1}{2} m v_s^2 + E_{kr}}$$

Königova věta

$$E_{kr} = \int \frac{1}{2} v_r^2 \, dm$$

Kin. energie relativního pohybu