Kmitání mech. soustav

Kmitání negativně ovlivňuje hlučnost, životní prostředí, životnost zařízení, přesnost výrobků

Klasifikace:

1) Podle počtu stupňů volnosti

$n = 1$ } diskrétní soustavy
$n \geq 2$ }
$n \to \infty$ kontinuální soustavy

2) Podle charakteru sil

$$Q = kq + b\dot{q} \Rightarrow \text{lineární}$$

parametr tuhosti, deformace, parametr tlumení, rychlost deformace

$$Q = k(t)q + b(t)\dot{q} \Rightarrow \text{lineární (periodické) fce. času}$$

$$Q = Q(q, \dot{q}, t) \Rightarrow \text{nelineární}$$

3) Podle charakteru budících sil

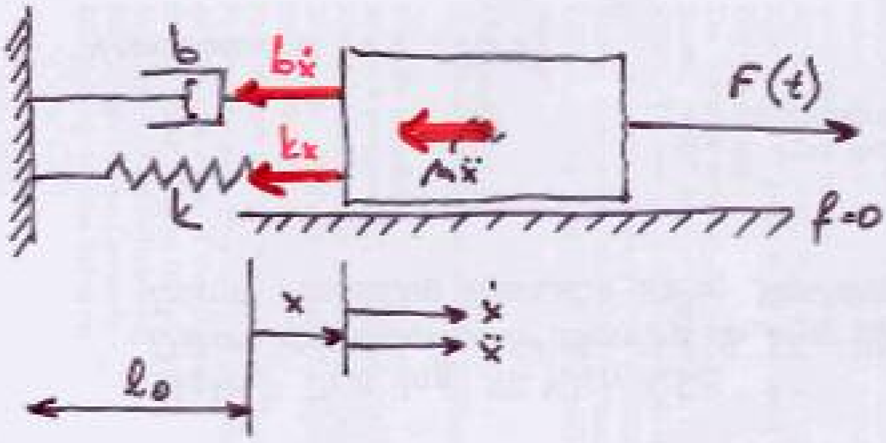
- volné kmity (není buzení)
- vynucené kmitání < deterministické / stochastické (náhodné)

deterministické < harmonické / periodické / neperiodické

4) Podle charakteru pohybu kmitající soustavy

podélné, příčné, torzní, ohybové, krouživé, kombinované

Kmitání s 1 stupněm volnosti



m [kg] hmotnost
b [N/m·s⁻¹] tlumení
k [N/m] tuhost
F(t) buzení

matematický model (pohybová rovnice)

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=F(t)$$

Volné kmitání

vyvolány $\quad x(0)=x_0$
$\qquad\qquad\;\; \dot{x}(0)=v_0$

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0 \quad / \cdot \frac{1}{m}$$

$$\ddot{x}+\underbrace{\frac{b}{m}}_{2D\Omega}\dot{x}+\underbrace{\frac{k}{m}}_{\Omega^2}x=0$$

$\Omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ -- vlastní frekvence (netlumené soustavy) [rad/s]

$D=\frac{b}{2m\Omega}$ — poměrný útlum (bezrozměrná veličina)

$$\ddot{x}+2D\Omega\dot{x}+\Omega^2x=0$$

$$\lambda^2+2D\Omega\lambda+\Omega^2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{12}=-D\Omega\pm\sqrt{D^2\Omega^2-\Omega^2}$$

3 případy

1) $D>1$ $\quad \lambda_{12}=-D\Omega\pm\Omega\sqrt{D^2-1}$

-- 2 reálné kořeny → nadkritické tlumení

2) $D=1$ $\quad \lambda_1=\lambda_2=-\Omega$ → kritické tlumení

3) $0 \le D < 1$ $\quad \lambda_{1,2} = -D\Omega \pm i\Omega\sqrt{1-D^2}$

2 komplexně sdružené kořeny

– podkritické (slabé) tlumení

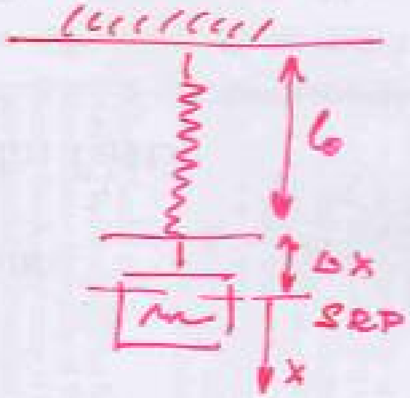
ad 1)

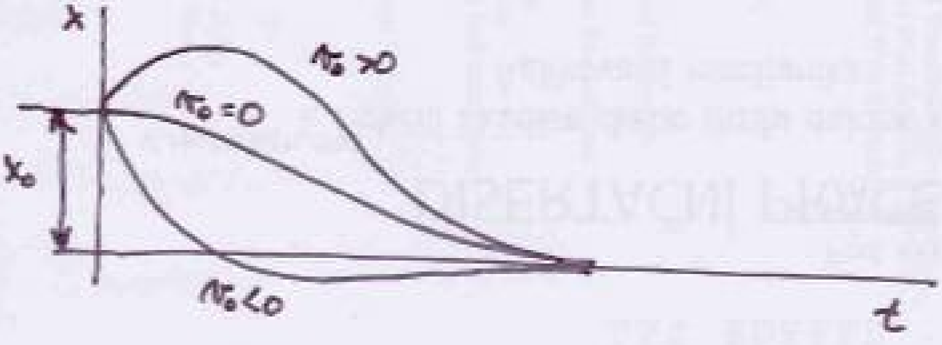
$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

c_1 a c_2 určíme z počátečních podmínek

$$\dot{x} = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_0 &= c_1 + c_2 \\ v_0 &= c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1, c_2 = ?$$





ad 2)

$D = 1$

$$x = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\Omega t}$$

$$\dot{x} = c_2 e^{-\Omega t} - (c_1 + c_2 t)\,\Omega e^{-\Omega t}$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= c_1 \\ v_0 &= c_2 - c_1 \Omega \end{aligned}\right\} c_1, c_2 - ?$$

ad 5) $x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lambda_{12} = -D\Omega \pm i\,\Omega_D \qquad \Omega_D = \Omega \cdot \sqrt{1-D^2}$

$x = e^{-D\Omega t}\left(c_1 e^{i\Omega_D t} + c_2 e^{-i\Omega_D t}\right)$

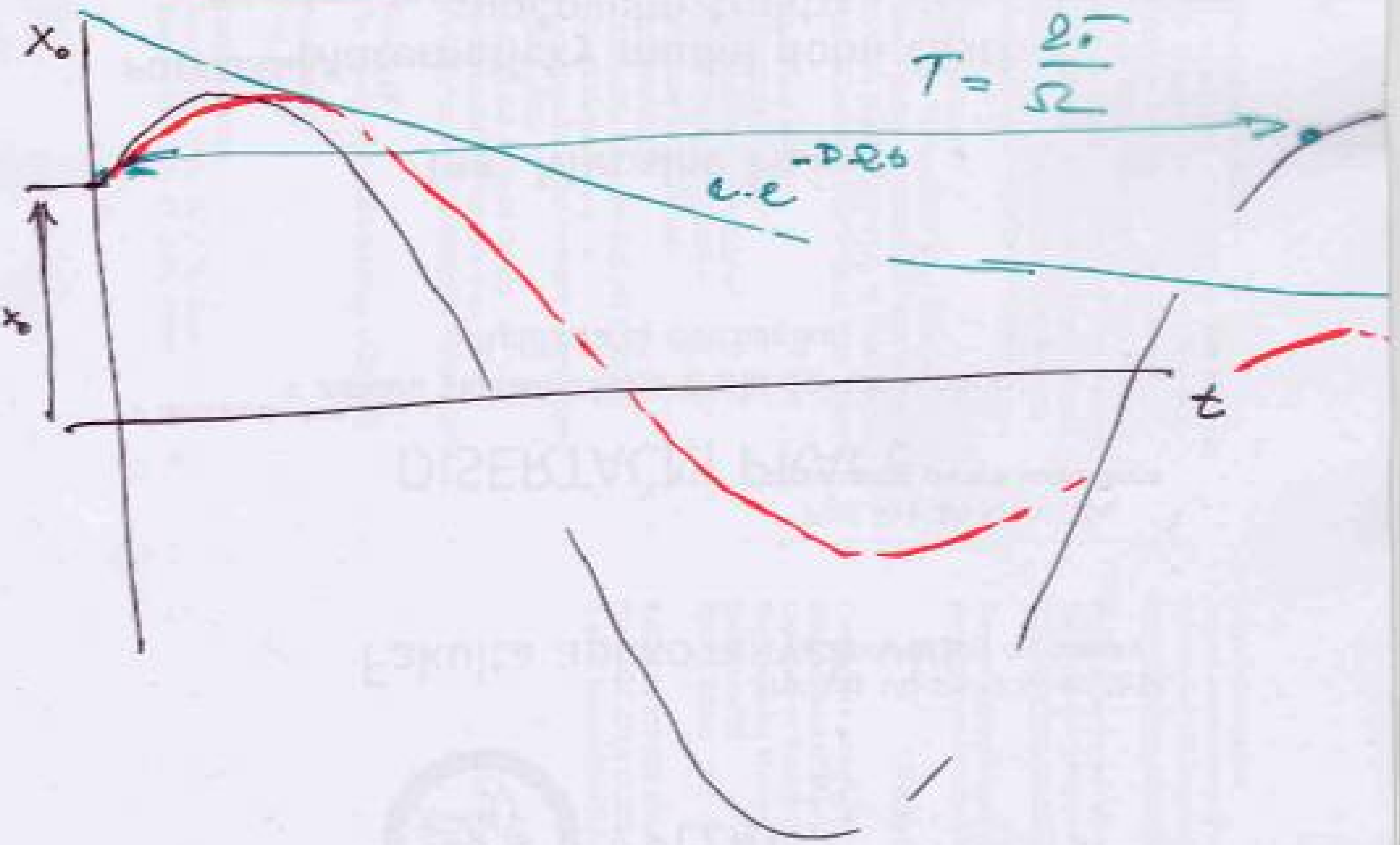
$x = e^{-D\Omega t}\left(A\cos\Omega_D t + B\sin\Omega_D t\right)$

$\dot{x} = -D\Omega x + e^{-D\Omega t}\left(-A\Omega_D \sin\Omega_D t + B\Omega_D \cos\Omega_D t\right)$

$x_0 = A$

$v_0 = -D\Omega x_0 + B\Omega_D \Rightarrow B = \frac{v_0 + D\Omega x_0}{\Omega_D}$

$$\Rightarrow x = e^{-D\Omega t}\left(x_0 \cos\Omega_D t + \frac{v_0 + D\Omega x_0}{\Omega_D}\sin\Omega_D t\right)$$



$T_D = \frac{2\pi}{\Omega_D}$