Základní pohybové zákony

1. Newton: zákon setrvačnosti

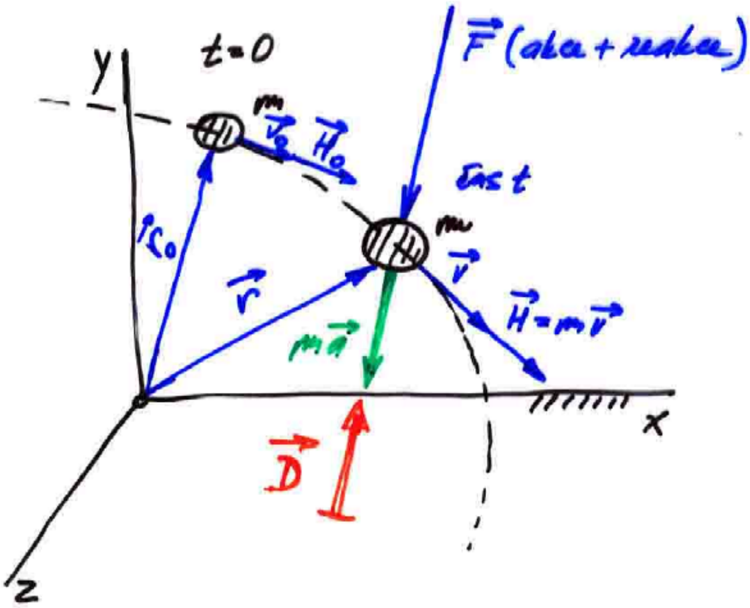
2. Newton: $\dfrac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$; $\vec{H} = m\vec{v}$ – hybnost

3. Newton: princip akce a reakce

Dynamika hmotného bodu

způsob řešení:
- aplikace pohybové rovnice
- aplikace vět o pohybu bodu
  - věta o změně hybnosti
  - věta o změně momentu hybnosti
  - věta o změně (zachování celkové energie) kinetické energie

Pohybová rovnice



II. Newton:

$$\frac{d(m\vec v)}{dt} = \vec F$$

pro m = konst.

$$m \underbrace{\frac{d\vec v}{dt}}_{\vec a} = \vec F$$

$$\boxed{m\vec a = \vec F} \qquad (1)$$

- urychlující síla
- podmínka ekvivalence
- Newtonův přístup

– zavedeme setrvačnou (doplňkovou) sílu $\boxed{\vec D = -m\vec a}$ $\Longrightarrow$ $m\vec a = -\vec D \longrightarrow$ do (1)

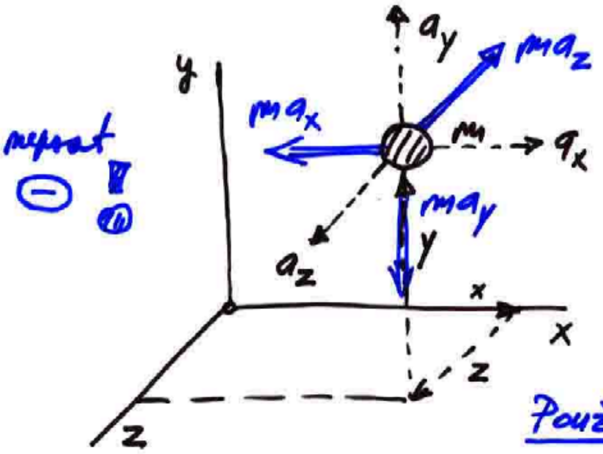
$$-\vec D = \vec F \longrightarrow \boxed{\vec F + \vec D = \vec 0} \quad x,\ y,\ z$$

- pohybová rce
- podmínka dynamické rovnováhy
- D'Alembertův přístup

Vyjádření setrvačné síly

a) kartézské souřadnice

$$\vec D = -m\vec a \quad x,\ y,\ z$$



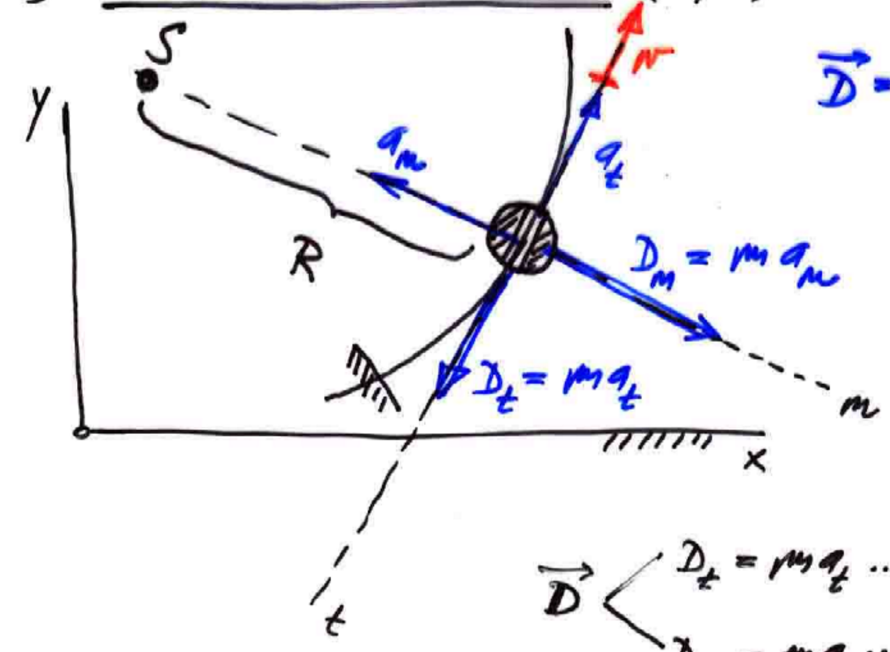
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Použití: – neznám dopředu trajektorii hmotného bodu

b) Přirozené souřadnice $(\vec{t}, \vec{n})$



$$\vec{D} = -m\vec{a} \begin{cases} t \\ n \end{cases}$$

nepsat $\ominus$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\vec{D} \begin{cases} D_t = m a_t \text{ .... tečná složka} \\ D_n = m a_n \text{ .... normálová složka} \end{cases}$$

(odstředivá síla)

Použití: – znám dopředu trajektorii hmotného bodu (např. matematické kyvadlo)

$$\vec{F} + \vec{D} = \vec{0} \begin{cases} t \\ n \end{cases}$$

Věty o pohybu hmotného bodu

– nezavádět setrvačnou sílu (vycházíme z II. Newtona)

– výsledná síla $\vec{F}$(akce + reakce) $= \vec{F}(\vec{v}, \vec{r}, t)$

1) Věta o změně hybnosti .... $\vec{F} = \vec{F}(t)$

II. Newton: $\quad \dfrac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}(t) \qquad \vec{H} = m\vec{v}$

$$\int_{m\vec{v}_0}^{m\vec{v}} d(m\vec{v}) = \int_0^t \vec{F}(t)\cdot dt \Rightarrow \underbrace{m\vec{v}}_{\vec{H}} - \underbrace{m\vec{v}_0}_{\vec{H}_0} = \underbrace{\int_0^t \vec{F}(t)\cdot dt}_{\vec{I}\text{ – impuls síly}}$$

$$\boxed{\vec{H} - \vec{H}_0 = \vec{I}} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$$

– nejobecnější věta, platí i pro $m \neq$ konst.

Použití: – $F = F(t)$, nejčastější pro výpočet $v(t) = ?$

2) Věta o změně momentu hybnosti .... $F(t) \to M(t)$

- pouze pro $m = konst.$
- moment síly $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\longrightarrow$ moment hybnosti $\cdot$ $\vec{L}$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{H} = \vec{r} \times m\vec{v}} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(1) \longrightarrow \dot{\vec{L}} = \underbrace{\underbrace{\dot{\vec{r}}}_{\vec{v}} \times m\vec{v}}_{\vec{0}} + \vec{r} \times m\underbrace{\dot{\vec{v}}}_{\vec{a}} = \vec{r} \times \underbrace{m\vec{a}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}(t) \Rightarrow \int_{\vec{L}_0}^{\vec{L}} d\vec{L} = \int_0^t \vec{M}(t) \cdot dt$$

$$\vec{L} - \vec{L}_0 = \underbrace{\int_0^t \vec{M}(t) \cdot dt}_{\vec{I}_M \text{ – impulsmoment}} \Rightarrow \boxed{\vec{L} - \vec{L}_0 = \vec{I}_M} < \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

- momenty sil k osám

Použití: – $F(t) \longrightarrow M(t)$, pro výpočet $\omega(t) = ?$

3) Věta o změně kinetické energie ..... $\vec{F}(\vec{r})$

- pouze pro $m = konst.$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2}$$

(věta o zachování celkové energie $E_p + E_k = konst.$ platí pouze pro konzervativní síly v uzavřeném systému)

II. Newton: $\dfrac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$

pro $m = konst.$ $\quad m \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \;/\cdot d\vec{r}$

$$m\, d\vec{v} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} d(v^2)$$

$$\frac{1}{2} m \int_{v_0^2}^{v^2} d(v^2) = \int_{\vec r_0}^{\vec r} \vec F(\vec r)\cdot d\vec r$$

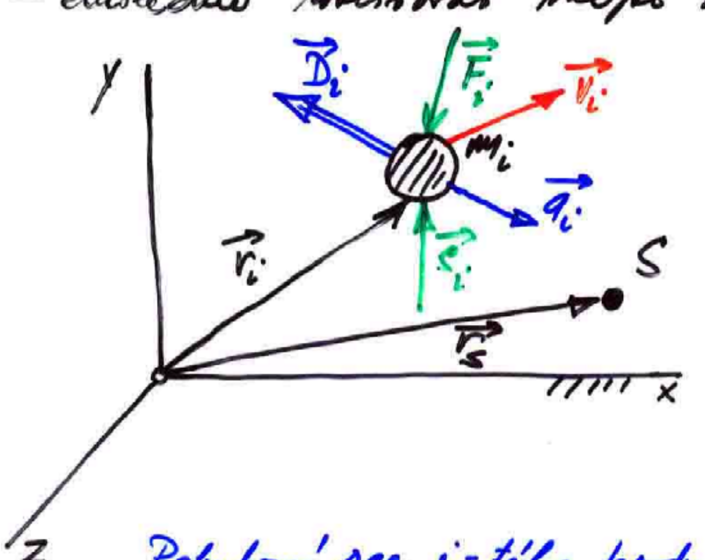
$$\underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{E_k} - \underbrace{\frac{1}{2} m v_0^2}_{E_{k_0}} = \underbrace{\int_{\vec r_0}^{\vec r} \vec F(\vec r)\cdot d\vec r}_{W}$$

$\boxed{E_k - E_{k_0} = W}$ – skalární rovnice

Použití: – $\vec F(\vec r)$ – síla je funkcí polohy
– pro výpočet $v(x) = ?$

Soustava hmotných bodů (tělesa)

– důsledně rozlišovat vnější a vnitřní síly!



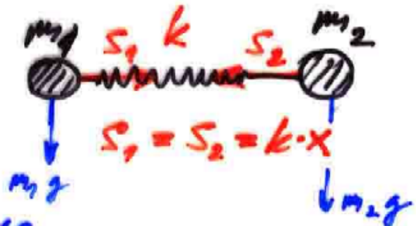
$i = 1, 2, \ldots\ldots, n$
S – střed hmotnosti
$\vec F_i$ – výsledná vnější síla na i-tý bod.
$\vec S_i$ – výsledná vnitřní síla na i-tý bod
$\vec D_i$ – setrvačná síla i-tého bodu ($= -m_i \cdot \vec a_i$)

Pohybová rce i-tého bodu

$\vec r_i \times / \quad \vec F_i + \vec D_i + \vec S_i = \vec 0$

resp. $\vec r_i \times \vec F_i + \vec r_i \times \vec D_i + \vec r_i \times \vec S_i = \vec 0$

Princip rovnováhy vnitřních sil



$$\sum_i \vec{S}_i = \vec{0}\,, \quad \text{resp.} \quad \sum_i \vec{r}_i \times \vec{S}_i = \vec{0}$$

Pohybové rce soustavy hmotných bodů

– sečteme pohybové rovnice všech hmotných bodů s ohledem na rovnováhu vnitřních sil.

$$\sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{D}_i + \underbrace{\sum_i \vec{S}_i}_{\vec{0}} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{D}_i = \vec{0}}$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{D}_i + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{S}_i}_{\vec{0}} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{D}_i = \vec{0}}$$

D'Alembertův princip $\langle\, x, y, z$

D'Alembertův princip

Soustava vnějších a setrvačných sil, působících na soustavu hmotných bodů, je v každém časovém okamžiku v rovnováze (vnitřní síly neovlivňují pohyb soustavy hmotných bodů).

Věty o pohybu soustavy hmotných bodů

– nezanedbat setrvačné síly!

1) 1. věta o pohybu středu hmotnosti

střed hmotnosti ..... $\boxed{\vec{r}_S \cdot m = \sum \vec{r}_i \cdot m_i}$ (1)

$$m = \sum_i m_i$$

$$\frac{d}{dt}(1) \rightarrow m \underbrace{\frac{d\vec{r}_S}{dt}}_{\vec{v}_S} = \sum m_i \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{\vec{v}_i} \Rightarrow \boxed{m\vec{v}_S = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = \sum \vec{H}_i = \vec{H}} \quad (2)$$

– výsledný vektor hybnosti $\vec{H} = m\vec{v}_S$, leží ve středu hmotnosti S a je roven vektorovému součtu hybností jednotlivých bodů ($\sum_i m_i \vec{v}_i$)

2) 2. věta o pohybu středu hmotnosti

$$\frac{d}{dt}(2) \longrightarrow m \underbrace{\frac{d\vec{v}_S}{dt}}_{\vec{a}_S} = \sum_i \underbrace{m_i \cdot \vec{a}_i}_{\vec{F}_i} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}$$

$$\boxed{m\vec{a}_S = \sum \vec{F}_i = \vec{F}} \;\Big\langle\; x,\ y,\ z$$

- střed hmotnosti S se pohybuje jako hmotný bod, do něhož je soustředěna celková hmotnost soustavy hmotných bodů a do něhož translačně přesuneme všechny vnější síly (vnitřní síly neovlivňují pohyb středu hmotnosti)

- např. skokan do dálky neovlivní svými pohyby trajektorii svého středu hmotnosti

3) 1. impulsová věta – věta o změně hybnosti aplikovaná na soustavu hmotných bodů

i-tý bod:
$$m_i\vec{v}_i - m_i\vec{v}_{i0} = \int_0^t \vec{F}_i \cdot dt + \int_0^t \vec{S}_i \cdot dt$$

soustava hmotných bodů

$$\underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i}_{\vec{H}} - \underbrace{\sum_i m_i \cdot \vec{v}_{i0}}_{\vec{H}_0} = \underbrace{\sum_i \int_0^t \vec{F}_i \cdot dt}_{\vec{I}_F} + \underbrace{\sum \int_0^t \vec{S}_i \cdot dt}_{\int_0^t \underbrace{\sum \vec{S}_i}_{\vec{0}} \cdot dt}$$

$\vec{0}$ – výslednice vnitřních sil

$$\boxed{\vec{H} - \vec{H}_0 = \vec{I}_F} \;\Big\langle\; x,\ y,\ z$$

- vnitřní síly neovlivňují změnu hybnosti soustavy hmotných bodů

4) <u>2. impulsová věta</u> – věta o změně momentu hybnosti aplikovaná na soustavu hmotných bodů

<u>i-tý bod</u>: $\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i - \vec{r}_{i0} \times m_i \vec{v}_{i0} = \int_0^t \vec{r}_i \times \vec{F}_i \, dt + \int_0^t \vec{r}_i \times \vec{S}_i \, dt$

<u>soustava hmotných bodů</u>

$$\underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i}_{\vec{L}} - \underbrace{\sum \vec{r}_{i0} \times m_i \vec{v}_{i0}}_{\vec{L}_0} = \underbrace{\sum_i \int_0^t \vec{r}_i \times \vec{F}_i \, dt}_{\vec{I}_M^F} + \underbrace{\sum \int_0^t \vec{r}_i \times \vec{S}_i \, dt}_{\underbrace{\int_0^t \sum_i \vec{r}_i \times \vec{S}_i \, dt}_{\vec{0} \text{ – rovnováha vnitřních sil}}}$$

$$\boxed{\vec{L} - \vec{L}_0 = \vec{I}_M^F} \quad x,\ y,\ z$$

– vnitřní síly neovlivňují změnu momentu hybnosti soustavy hmotných bodů
– platí k pevným osám i k osám procházejícím středem hmotnosti

5) <u>Věta o změně kinetické energie</u>

<u>i-tý bod</u>: $\frac{1}{2} m_i v_i^2 - \frac{1}{2} m_i v_{i0}^2 = \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \int \vec{S}_i \cdot d\vec{r}_i$

<u>soustava hmotných bodů</u>

$$\underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2}_{E_k} - \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i0}^2}_{E_{k0}} = \underbrace{\sum_i \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i}_{W_F} + \underbrace{\sum_i \int \vec{S}_i \cdot d\vec{r}_i}_{W_S \text{ – není nulová!}}$$

(práce u pružiny $W = \frac{1}{2} k x^2$)

$$\boxed{E_k - E_{k0} = W_F + W_S}$$ – skalární rovnice

– vnitřní síly ovlivňují změnu kinetické energie soustavy hmotných bodů

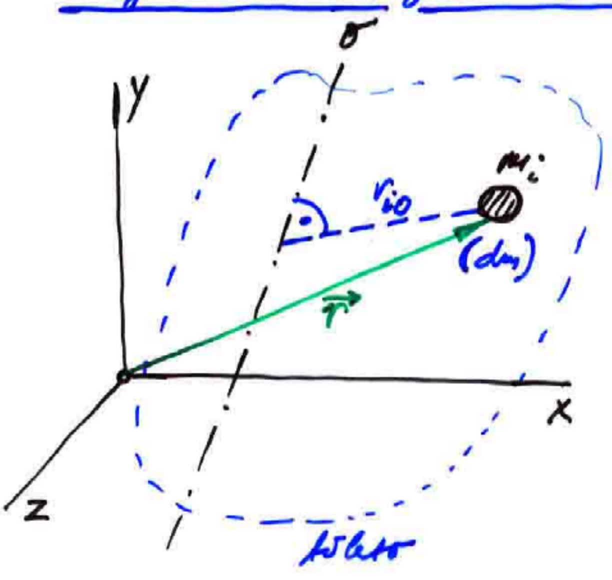
Dynamika tuhého tělesa

Geometrie hmotnosti

- známe hmotnost a statický moment, střed hmotnosti (S)
- budeme definovat osové a deviační momenty setrvačnosti

Osové momenty setrvačnosti

i-tý bod soustavy hmotných bodů



$i = 1, 2, \ldots, n$

Moment setrvačnosti k ose o

$$I_{io} = m_i \, r_{io}^2 \quad [kg\,m^2]$$

r_{io} - kolmá vzdálenost od osy o

Soustava hmotných bodů

$$I_o = \Sigma I_{io} = \Sigma m_i \, r_{io}^2$$

Tuhé těleso ..... $I_o = \int_{(m)} r_o^2 \, dm$

Momenty setrvačnosti tělesa k souřadnicovým osám

- polohový vektor $\vec{r}$ → souřadnice x, y, z

osové: $I_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) \, dm$; $I_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) \, dm$

$I_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) \, dm$ - vždy kladné!!