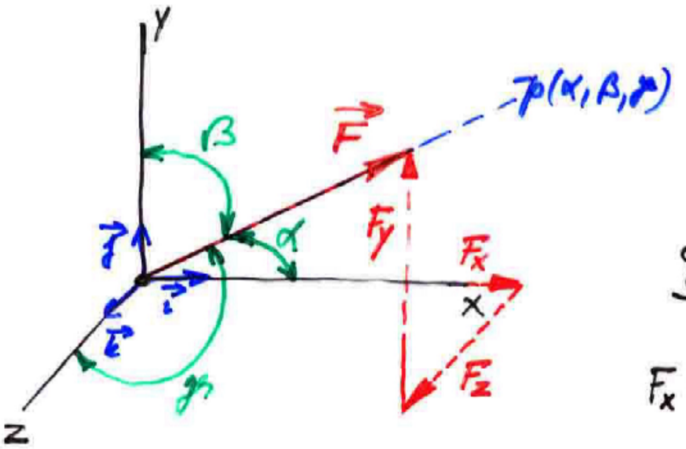
Teorie silových soustav

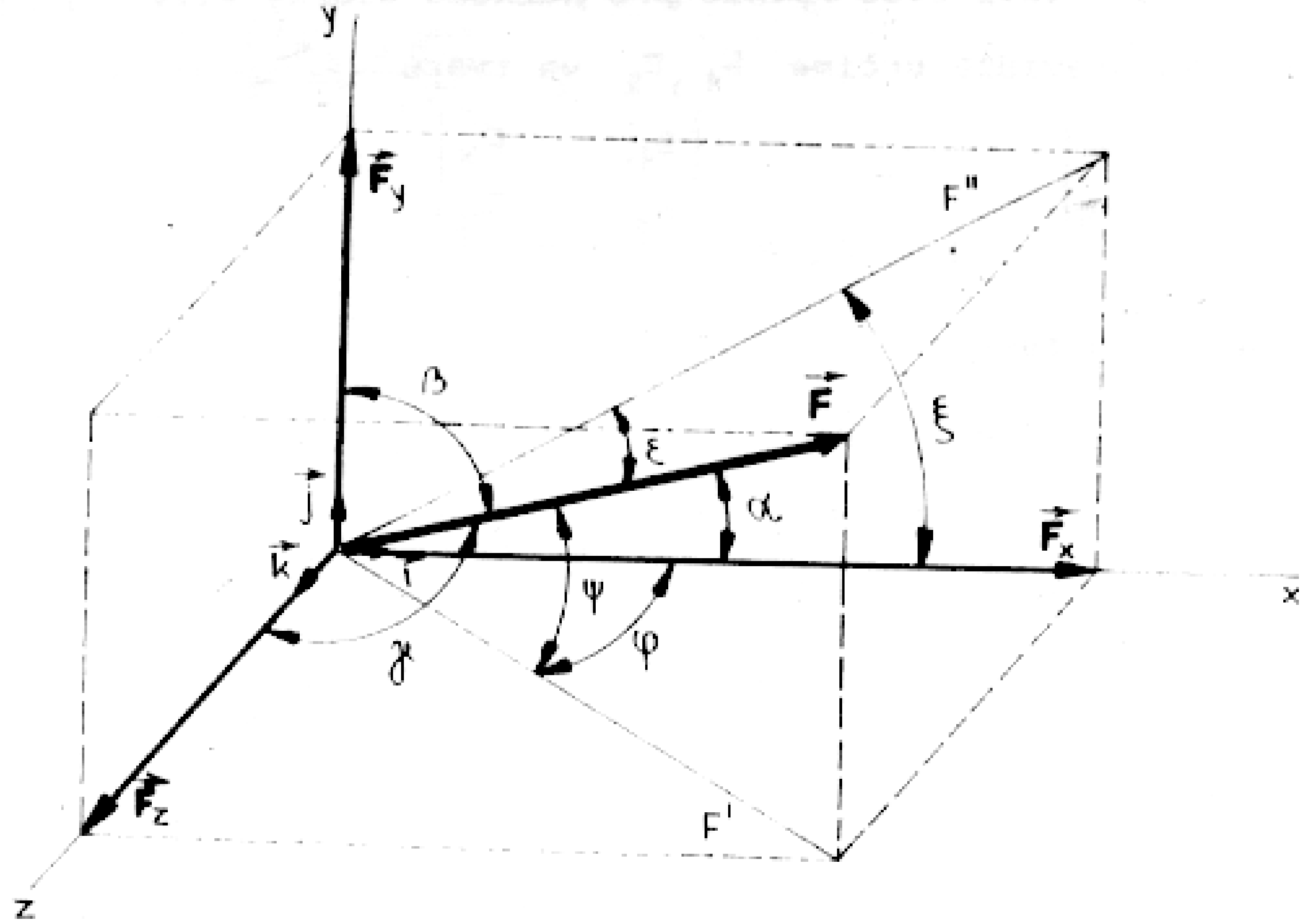
Síla (model pro tuhá tělesa) = vektor vázaný ke své nositelce a po ní libovolně posunutelný



$$\vec F = \vec i F_x + \vec j F_y + \vec k F_z = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

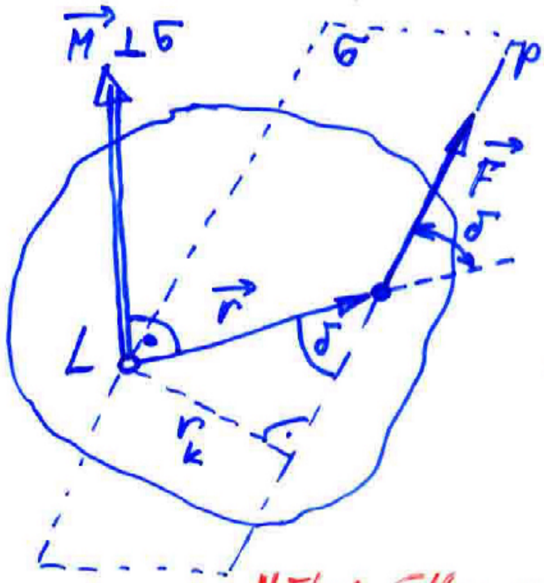
Př.: Známe $F = |\vec F|$, úhly α, β, γ

$F_x = F \cdot \cos\alpha$, $F_y = F \cdot \cos\beta$, $F_z = F \cdot \cos\gamma$



Moment síly k bodu

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$



Působení síly na těleso (k bodu L)

a) posuvný účinek ..... $\vec{F}$ [N]

b) otáčivý účinek ..... $\vec{M}$ [Nm]

$M = F \cdot r_k = F \cdot r \cdot \sin\delta \Rightarrow$ vektorový součin

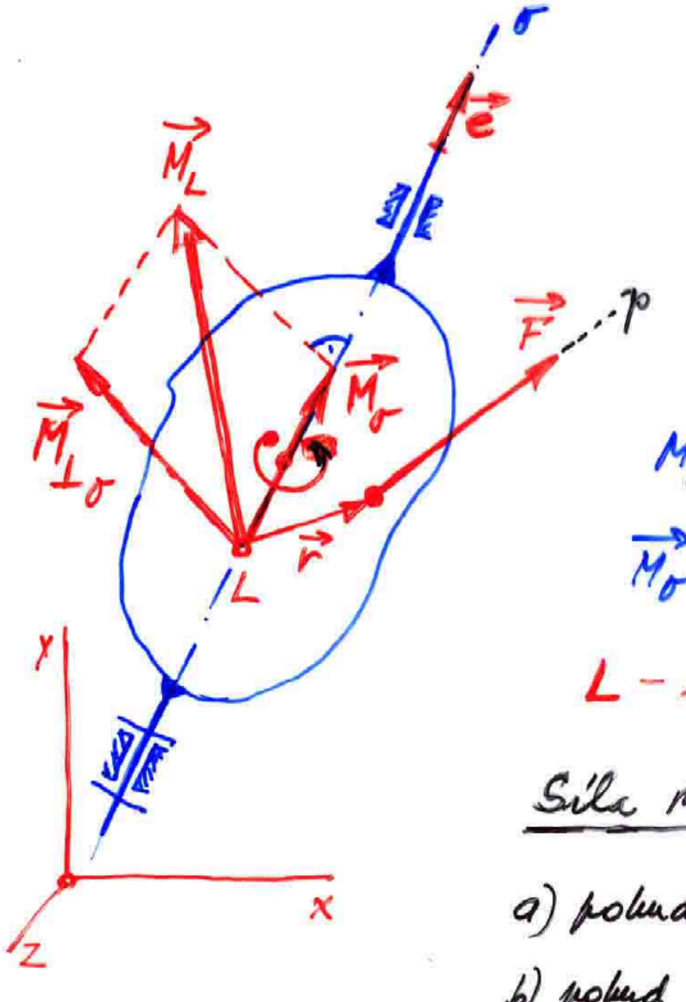
$\boxed{\vec{M}_L = \vec{r} \times \vec{F}}$ – vektor vázaný k bodu L

Věta: Síla nemá k bodu moment, pokud její nositelka tímto bodem prochází.

Moment síly k ose

$$\boxed{\vec{M}_o = \vec{e} \cdot [\vec{e} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})]}$$

– charakterizuje otáčivý účinek síly vzhledem k pevné ose tělesa (otáčí tělesem kolem osy o)



$$\vec{M}_L = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_L < \begin{cases} \vec{M}_o \text{ ..... otáčí kolem } o \\ \vec{M}_{\perp o} \text{ ..... neotáčí} \end{cases}$$

$$M_o = \vec{M}_L \bullet \vec{e} = \vec{e} \bullet (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$\vec{M}_o = \vec{e} \cdot M_o = \vec{e} \bullet [\vec{e} \bullet (\vec{r} \times \vec{F})]$$

L – libovolný bod na ose o

<u>Síla nemá k ose moment</u> (neotáčí tělesem)

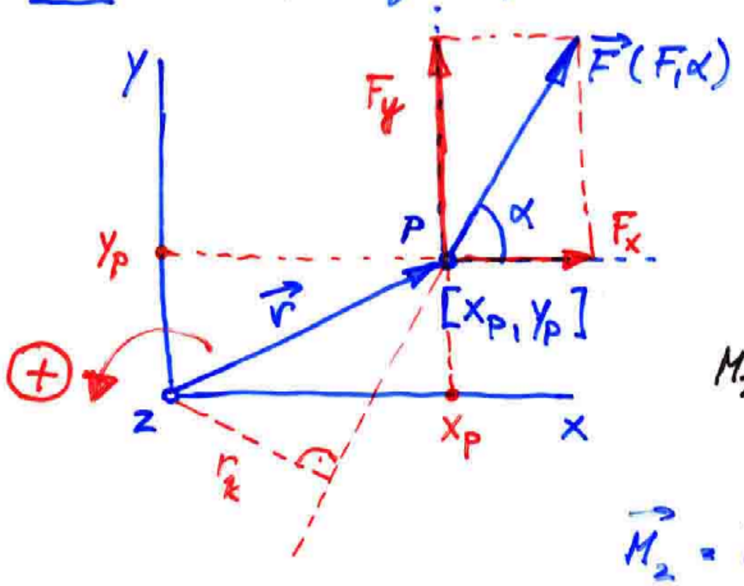
a) pokud její nositelka protíná osu

b) pokud je její nositelka s osou o rovnoběžná

<u>Varignonova věta</u>

Moment výsledné síly k bodu (ose) je roven součtu momentů jejích složek k témuž bodu (ose).

<u>Př.:</u> Moment síly k počátku souř. systému (k ose z)



$\vec{F}$ – leží v rovině x, y

$$\boxed{M_z = F \cdot r_k}$$

$$F_x = F \cdot \cos\alpha , \quad F_y = F \cdot \sin\alpha$$

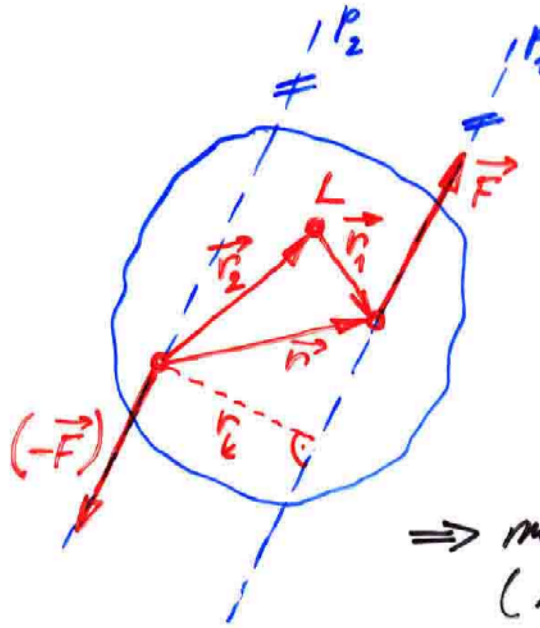
$$M_z = -F_x \cdot y_p + F_y \cdot x_p =$$

$$= F(-y_p \cdot \cos\alpha + x_p \cdot \sin\alpha)$$

$$\vec{M}_z = \vec{r} \times \vec{F}$$

Dvojice sil (silová dvojice ≈ momentu)

Def.: soustava dvou sil, které jsou stejně velké, opačně orientované a leží na rovnoběžných nositelkách



– pouze otáčivý účinek

$$\underline{\underline{\vec{M}_L}} = \vec{r_1} \times \vec{F} + \underbrace{(-\vec{r_2}) \times (-\vec{F})}_{\vec{r_2} \times \vec{F}} =$$

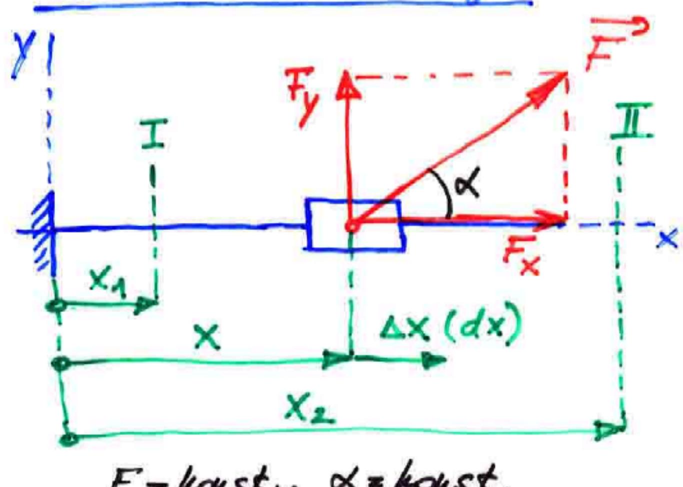
$$= \underbrace{(\vec{r_1} + \vec{r_2})}_{\vec{r}} \times \vec{F} = \underline{\underline{\vec{r} \times \vec{F}}} \Rightarrow$$

⟹ moment nezávisí na poloze bodu L (stejný ke všem bodům tělesa)

$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$ – moment dvojice sil – volný vektor

$(M = r_k \cdot F)$

Práce a výkon síly



F = konst., α = konst.

Práce [J]

– posunutí bodu dx vyvolá složka F_x

$$dW = F_x \cdot dx = F \cdot \cos\alpha \cdot dx$$

$$W = \int dW = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot \cos\alpha \cdot dx =$$

$$= F \cdot \cos\alpha\ (x_2 - x_1)$$

Obecně: $x \to \vec{r}$

$dx \to d\vec{r}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F} \cdot d\vec{r} < \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$$

Výkon síly [W = J/s]

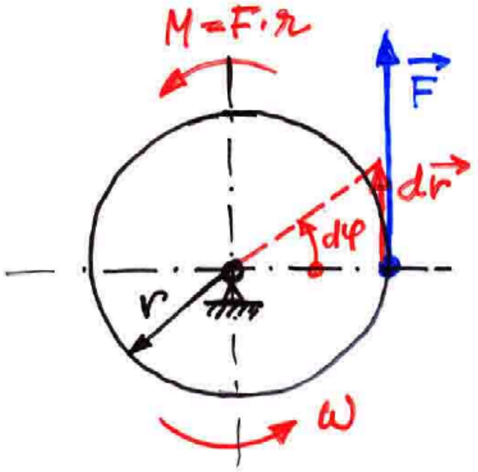
- střední výkon $P_{stř} = \frac{W}{t}$

- okamžitý výkon $P \approx \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\overset{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dW}}{dt} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{P}} = \vec{F} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} = \underline{\underline{\vec{F} \cdot \vec{v}}} \quad \begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix}$$

$\vec{v}$ – rychlost působiště síly

Práce a výkon momentu



Práce [J]

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot \underbrace{dr}_{r \cdot d\varphi} = \underbrace{F \cdot r}_{M = konst.} \cdot d\varphi$$

$$\boxed{dW = M \cdot d\varphi}$$

$$W = \int dW = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi = M(\varphi_2 - \varphi_1)$$

φ_1, φ_2 – dosadit v radiánech

$$\frac{\hat{\varphi}}{\varphi^\circ} = \frac{\pi}{180} \Rightarrow \hat{\varphi} = \frac{\pi}{180} \cdot \varphi^\circ$$

Obecně: $dW = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$

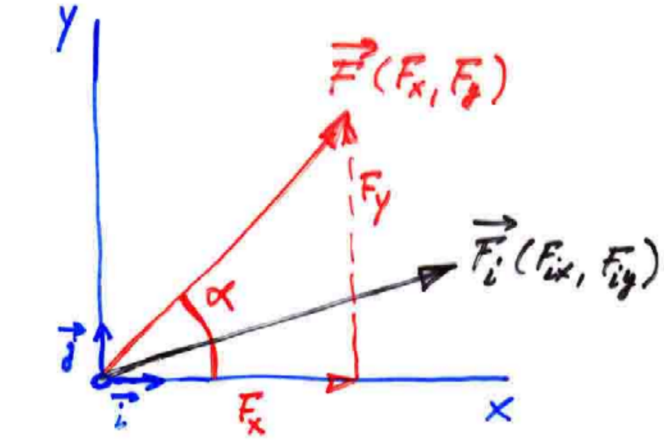
$$W = \int dW = \int \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} \quad \begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix}$$

Výkon momentu [W]

- okamžitý výkon $\underline{\underline{P}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \vec{M} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{\varphi}}{dt}}_{\vec{\omega}} = \underline{\underline{\vec{M} \cdot \vec{\omega}}} \quad \begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix}$

$\vec{\omega}$ – úhlová rychlost [rad/s]

Rovinná soustava sil o společném působišti:



$i = 1, 2, \ldots, n$

1) náhrada (jedna síla) = = výslednice $\vec F$

$$\vec F = \sum_{i=1}^{n} \vec F_i \Big< \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

$$\vec F \Big< \underbrace{\begin{matrix} F_x = \sum F_{ix} \\ F_y = \sum F_{iy} \end{matrix}}_{\text{2 složkové podmínky}} \Bigg\} \quad \begin{matrix} F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ tg\,\alpha = \dfrac{F_y}{F_x} \end{matrix}$$

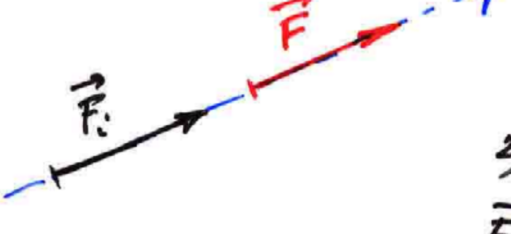
2) rovnováha

Def.: Soustava sil je v rovnováze, má-li nulovou náhradu.

$\Rightarrow$ náhrada (výslednice) $\vec F = \vec O \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec F_i = \vec O} \Big< \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$

podmínky rovnováhy: $\boxed{\begin{matrix} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 \end{matrix}}$ 2 složkové podmínky rovnováhy

Soustava sil na společné nositelce



1) výslednice $\vec F$

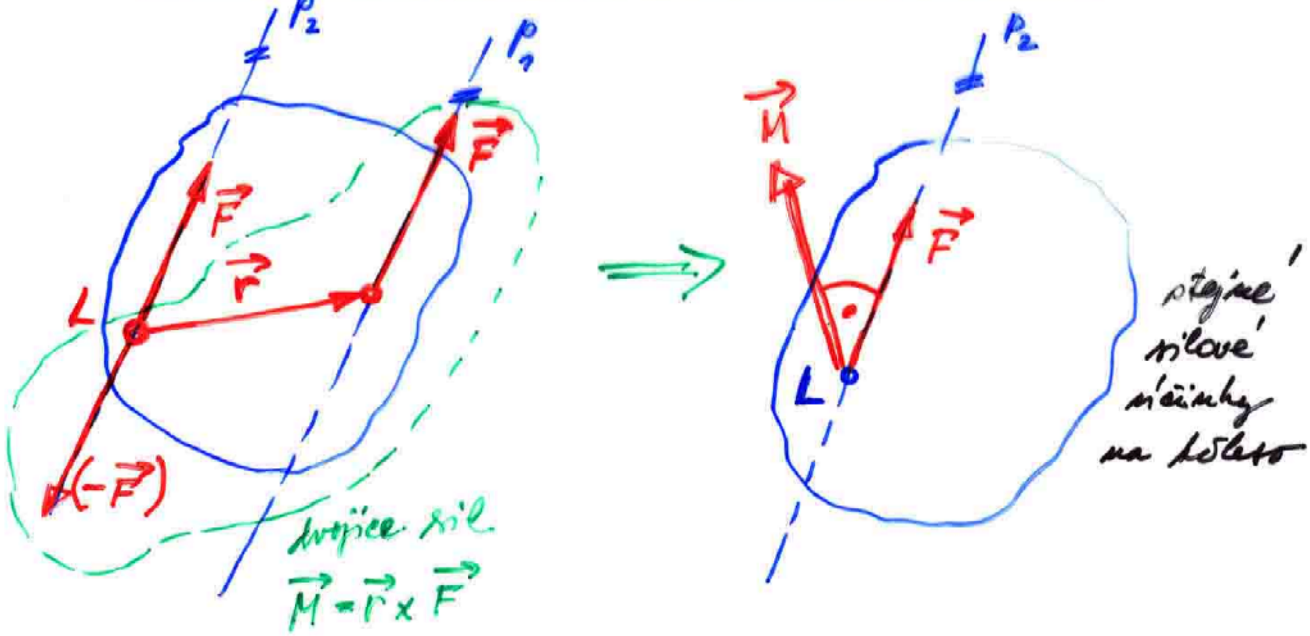
$\vec F = \sum \vec F_i \longrightarrow F = \sum F_i$ ve směru p

2) rovnováha

$\vec F = \vec O \to \sum \vec F_i = \vec O \Rightarrow \boxed{\sum F_i = 0}$ - směr p

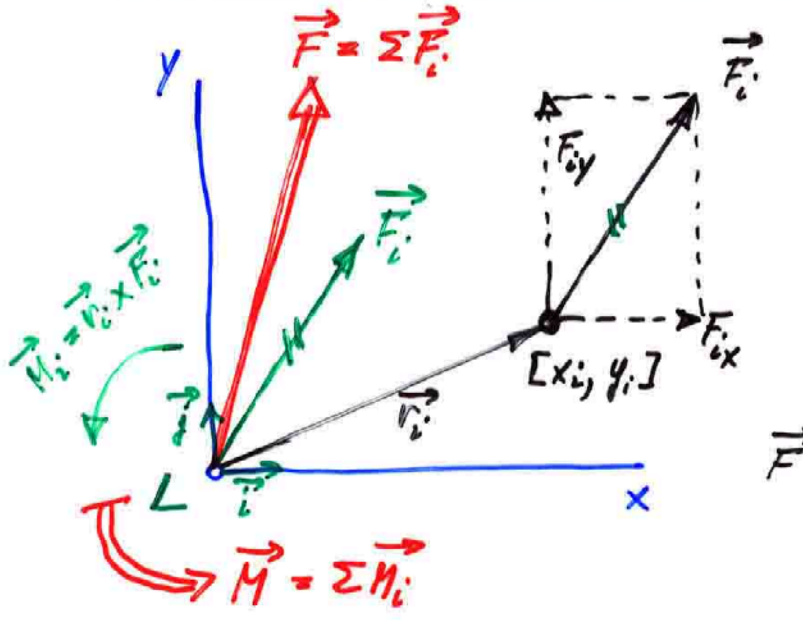
1 podmínka

Přeložení síly na rovnoběžnou nositelku



Obecná rovinná soustava sil

$\boxed{\text{3 podmínky, z toho 1 momentová}}$



$i = 1, 2, \dots, n$

1) náhrada v bodě L

a) výslednice $\vec{F}$

$$\vec{F} = \Sigma \vec{F_i} \quad \begin{cases} F_x = \Sigma F_{ix} \\ F_y = \Sigma F_{iy} \end{cases}$$

2 složkové podmínky

b) výsledný moment $\vec{M}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{M} = \Sigma \vec{M_i} \implies M &= \Sigma M_{iz} = \Sigma M_{i_L} = \\ &= \Sigma(-x_i \cdot F_{iy} + y_i \cdot F_{ix}) \end{aligned}\right\} \text{1 momentová podmínka}$$

– složkové podmínky mohu nahradit momentovými (ale neplatí obráceně!)

2) rovnováha

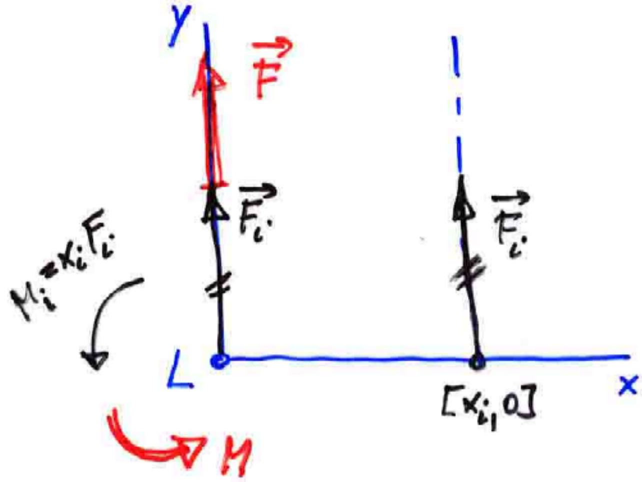
$$\left.\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{O}\\ \vec{M} &= \vec{O}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0\\ \sum F_{iy} &= 0\\ \sum M_i &= 0\end{aligned}}$$

– podmínky rovnováhy
– 3 podmínky (1 momentová)

Poznámka: Grafické řešení – vláknový polygon (cvičení)

Rovnoběžné síly v rovině

$\boxed{\text{2 podmínky (1 momentová)}}$



1) náhrada v bodu L

a) výslednice $\vec{F}$

$$\vec{F} = \sum \vec{F_i} \longrightarrow \boxed{F = \sum F_i}$$ – směr y

1 složková podmínka

b) výsledný moment $\vec{M}$

$$\vec{M} = \sum \vec{M_i} \longrightarrow \boxed{M = \sum M_{iz} = \sum M_{iL} = \sum x_i \cdot F_i}$$

1 momentová podm.

2) Rovnováha

$$\left.\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{O}\\ \vec{M} &= \vec{O}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\sum F_i &= 0\\ \sum M_i &= 0\end{aligned}}$$

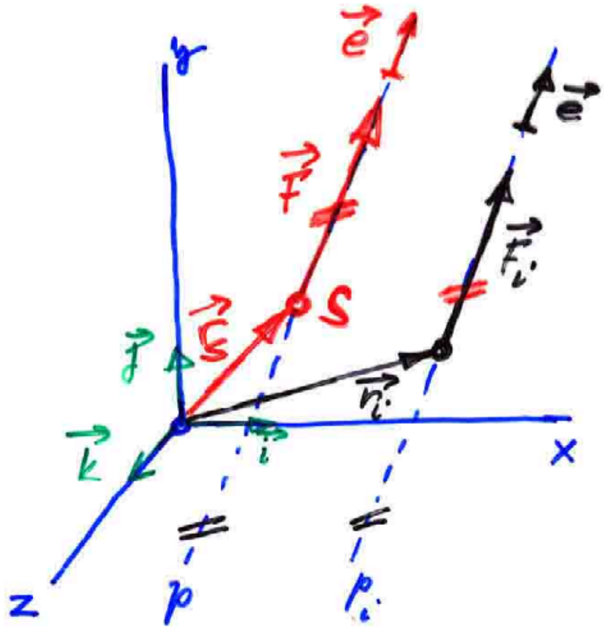
– 2 podmínky (1 momentová)

Poznámka: 1) Grafické řešení – vláknový polygon (cvičení)

2) Rovinné silové soustavy lze vždy jednoznačně nahradit jedinou silou (výslednicí) na předem neznámé nositelce (cvičení); platí i pro rovnoběžné síly v prostoru (E_3).

Středisko rovnoběžných sil

- návod jak určit polohu středu hmotnosti (těžiště) tělesa, křivky, plochy



$i = 1, 2, \dots, n$

S - středisko

$$\vec{F_i} = \vec{e} \cdot F_i$$

$$\vec{F} = \vec{e} \cdot F$$

$$\vec{F} = \Sigma \vec{F_i}$$

momentová podmínka

$$\vec{r_s} \times \underbrace{\vec{F}}_{\vec{e} \cdot F} = \Sigma \vec{r_i} \times \underbrace{\vec{F_i}}_{\vec{e} \cdot F_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r_s} \cdot F \times \vec{e} = \Sigma \vec{r_i} F_i \times \vec{e} \Rightarrow \boxed{\vec{r_s} \cdot F = \Sigma \vec{r_i} \cdot F_i}$$

polohový vektor střediska

$$\boxed{\vec{r_s} = \frac{\Sigma \vec{r_i} \cdot F_i}{F}}$$ - nezávisí na směru $\vec{e}$

Poloha středu hmotnosti

$F_i = m_i \cdot g$, $F = m \cdot g$, $m = \Sigma m_i$

$$\vec{r_s} \cdot F = \Sigma \vec{r_i} F_i \longrightarrow \boxed{\vec{r_s} \cdot m = \Sigma \vec{r_i} \cdot m_i} < \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_s \cdot m &= \Sigma x_i m_i \\ y_s \cdot m &= \Sigma y_i m_i \\ z_s \cdot m &= \Sigma z_i m_i \end{aligned}}$$

- statické momenty k rovině y, z
- — " — — " — x, z
- — " — — " — x, y