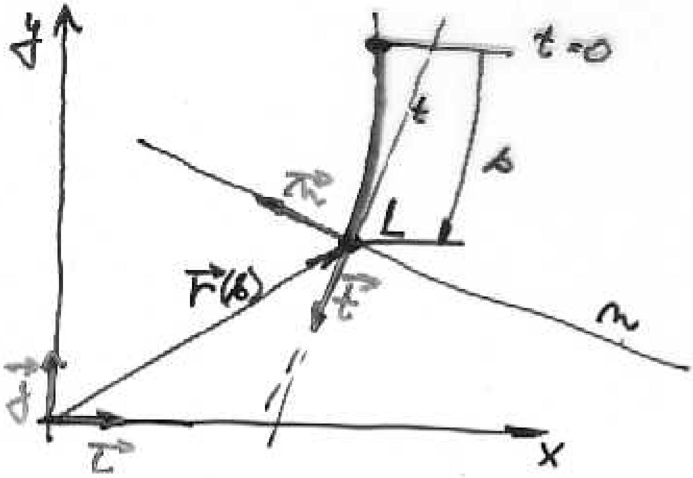
Křivočarý pohyb bodu v rovině



$\vec{r} = \vec{r}(s) \qquad s = s(t)$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{ds}}_{\vec{t}} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v(t)} = \vec{t} \cdot v(t)$$

⇒ vektor rychlosti vždy leží na tečně k trajektorii

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{t}}{ds}}_{\perp \vec{t}} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} \cdot v + \vec{t} \cdot \frac{dv}{dt}$$

1. Frenetův vztah $\dfrac{d\vec{t}}{ds} = K \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\text{normálový vektor}}$

K - flexní křivost

$K = \dfrac{1}{R}$

R - poloměr křivosti

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{n} \cdot \underbrace{K \cdot v^2}_{a_n} + \vec{t} \cdot \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a_t}$$

a_n normálové zrychlení, a_t - tečné zrychlení

V kartézských souřadnicích platí:

$$\vec{r}(t) = \vec{i} \cdot x(t) + \vec{j} \cdot y(t)$$

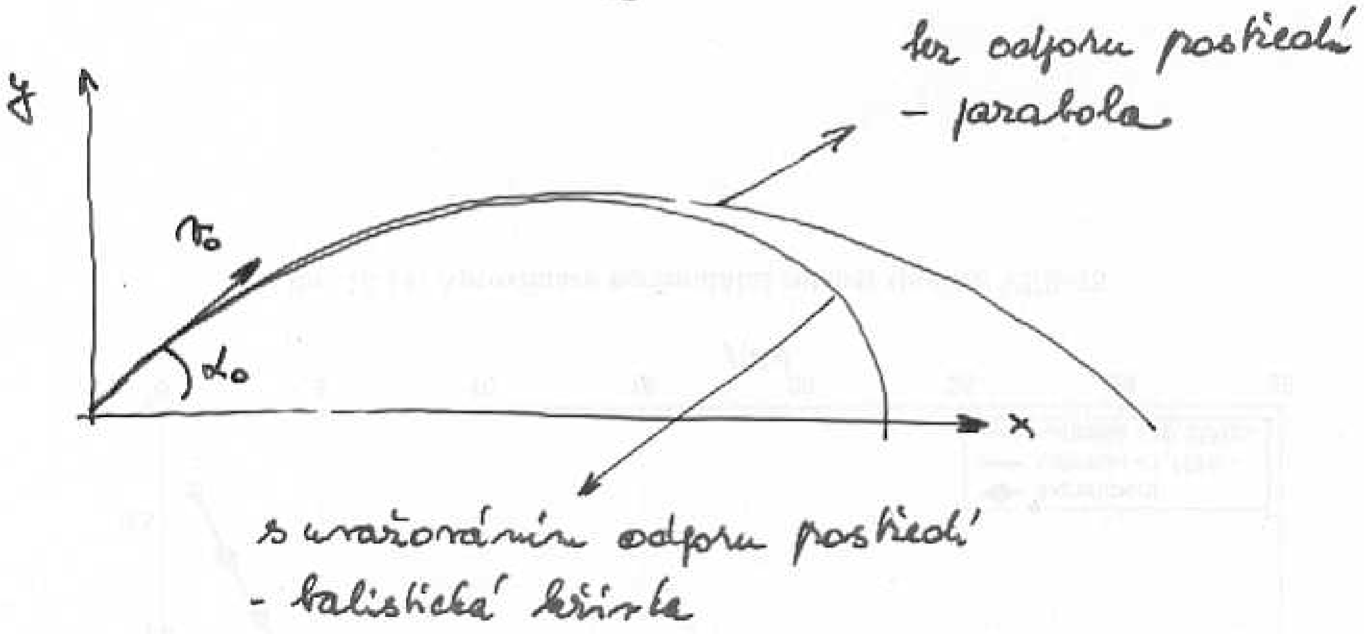
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \cdot \underbrace{\dot{x}(t)}_{v_x} + \vec{j} \cdot \underbrace{\dot{y}(t)}_{v_y} \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}\, \underbrace{\dot{v}_x}_{a_x} + \vec{j}\, \underbrace{\dot{v}_y}_{a_y} \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Př.: <u>Trajektorie šikmého vrhu</u>

- řešíme jako superpozici dvou přímočarých pohybů ve směru osy $\underline{x}$ a $\underline{y}$

- směr x: rovnoměrný přímočarý pohyb (bez odporu)
- směr y: přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb (zrychlení $\underline{g}$)



Kinematika tělesa

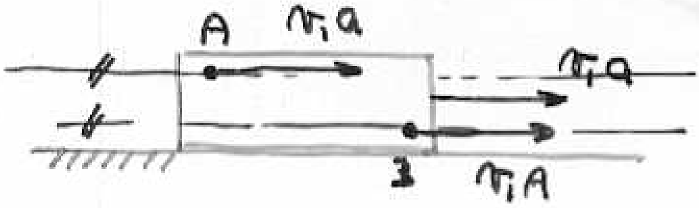
Budeme uvažovat pouze tuhá tělesa

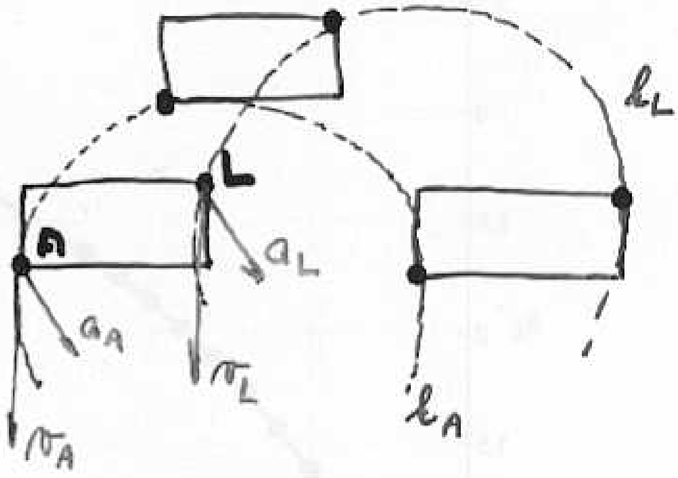
- Posuvný pohyb
- Rotační pohyb
- Obecný (rovinný) pohyb

1) Posuvný pohyb tělesa

- spojnice dvou libovolných bodů tělesa zachovává svůj směr vzhledem k nehybnému prostoru.

=> všechny body tělesa mají stejnou rychlost, stejné zrychlení a pohybují se po stejných, vzájemně posunutých křivkách.

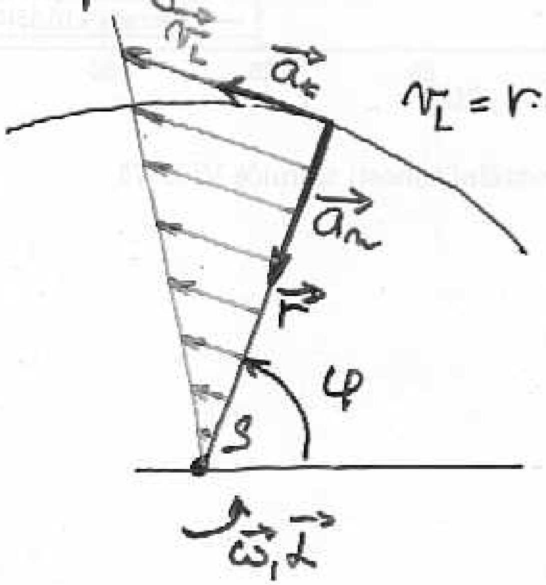




k_A, k_L - stejné křivky

$\vec{v}_A = \vec{v}_L$, $\vec{a}_A = \vec{a}_L$

2) Rotační pohyb tělesa



$v_L = r \cdot \omega$

$\varphi(t)$

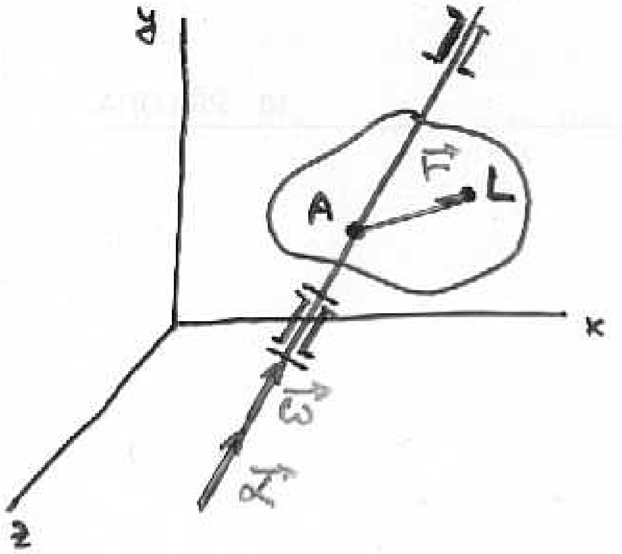
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad [rad \cdot s^{-1}]$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d(\omega^2)}{2d\varphi} \quad [rad \cdot s^{-2}]$$

$$v = \omega \cdot r$$

$$a_t = \alpha \cdot r$$

$$a_n = \omega \cdot v = r \cdot \omega^2$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}_n}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_L = \vec{\omega} \times \vec{r}$$
$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$
$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Přímočarý pohyb bodu	Rotační pohyb tělesa
x	φ
v	ω
a	α

Rozdělení rotačního pohybu podle $\underline{\alpha}$

1) $\alpha = 0$ - rovnoměrný pohyb

2) $\alpha = konst \neq 0$ - rovnoměrně zrychlený pohyb

3) $\alpha = \alpha(\varphi, \omega, t)$ - nerovnoměrný pohyb

Nerovnoměrný rotační pohyb tělesa řešíme zcela analogicky k nerovnoměrnému přímočarému pohybu hmotného bodu

→ dosadíme do „základní rovnice kinematiky"

a integrujeme v daných okrajových podmínkách

Př: Řešte rozběh rotoru, je-li zrychlení popsáno fcí $\alpha = \alpha_0 + k\omega^2$. $\underline{\underline{k}}$ a $\underline{\underline{\alpha_0}}$ jsou dané kladné konstanty
počáteční podmínky $t=0,\ \varphi_0 = 0,\ \dot{\varphi}_0 = 0$

$\omega(t) = ?$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \alpha_0 + k\omega^2$$

$$\int_0^t dt = \int_0^\omega \frac{d\omega}{\alpha_0 + k\omega^2}$$

$$\vdots$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0 \cdot k}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha_0}} \cdot \omega\right) \longleftarrow \text{hledáme inv. fci}$$

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{\alpha_0}{k}} \cdot \operatorname{tg}\left(t \cdot \sqrt{\alpha_0 \cdot k}\right)$$

$\varphi(t) = ?$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{\alpha_0}{k}} \cdot \operatorname{tg}\left(t \cdot \sqrt{\alpha_0 \cdot k}\right)$$

$$\vdots$$

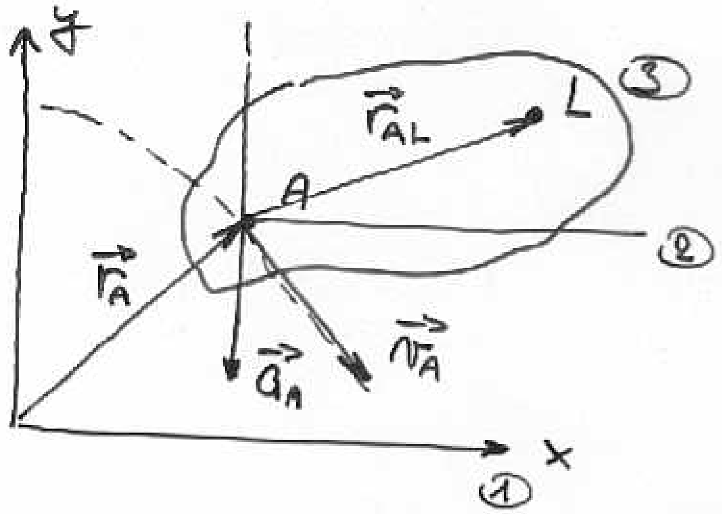
$\omega(\varphi) = ?$

$$\alpha = \frac{d(\omega^2)}{2d\varphi} = \alpha_0 + k\omega^2$$

$$\vdots$$

Obecný rovinný pohyb

- složený pohyb (posuvný + rotační, rotační + sférický, posuvný + sférický, rotační + rotační ...)



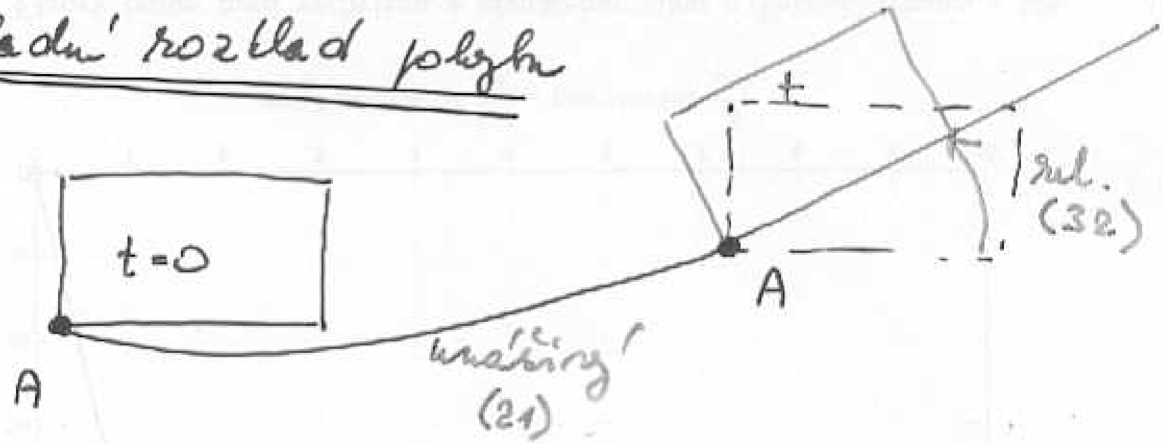
$31 = 32 + 21$

31 - absolutní - složný p.

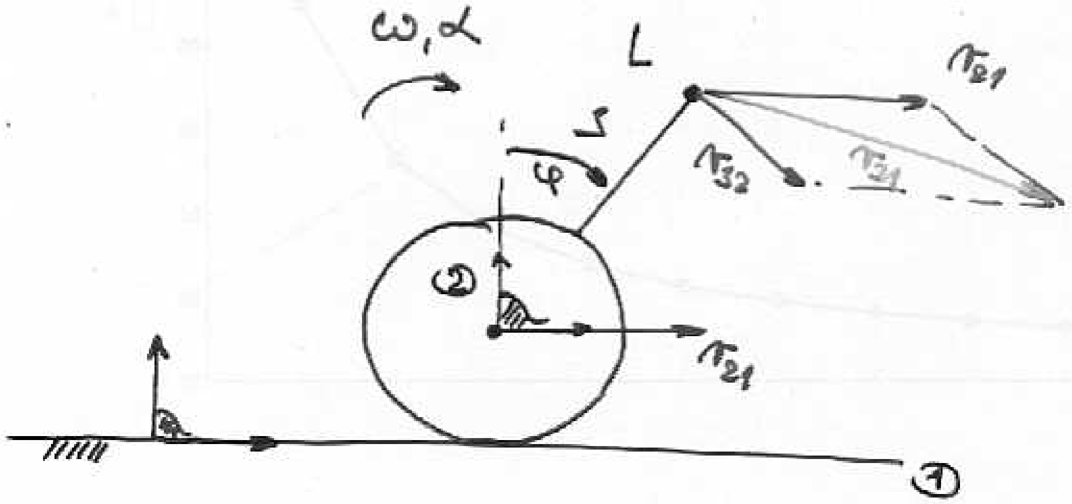
32 - relativní - druhotný p.

21 - unášivý p.

Základní rozklad pohybu



Př:



Základní rozklad obecného rovinného pohybu tělesa

Absolutní pohyb 31 rozložíme na unášivý pohyb posuvný 21, reprezentovaný pohybem referenčního bodu A, a na relativní rotační pohyb 32 kolem referenčního bodu A.

Rychlost libovolného bodu L: $\vec{v}_{31} = \underbrace{\vec{v}_{32}}_{\vec{\omega} \times \vec{r}_{AL}} + \underbrace{\vec{v}_{21}}_{\vec{v}_A}$

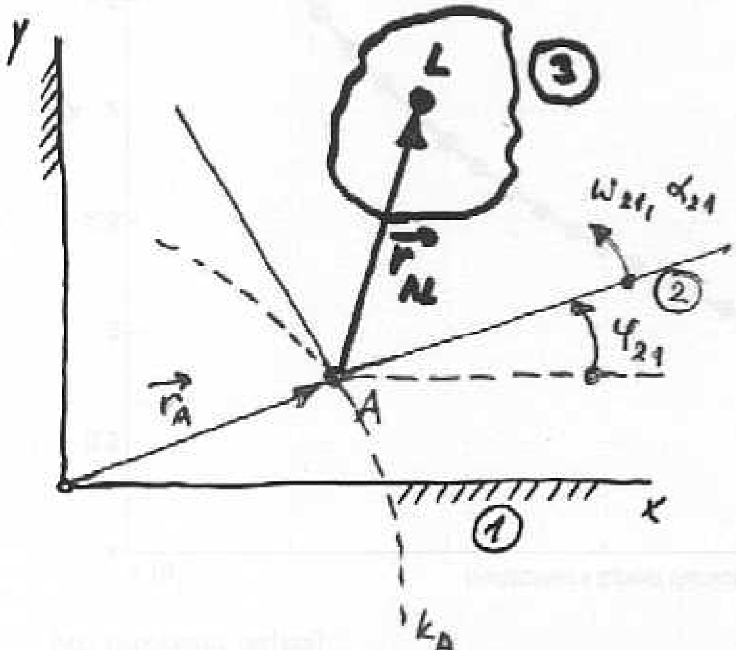
$v_{32} = r_{AL} \cdot \omega_{32}$

Zrychlení bodu L: $\vec{a}_{31} = \vec{a}_{32} + \underbrace{\vec{a}_{21}}_{a_A}$

$a_{32_t} = r_{AL} \cdot \alpha_{32}$ $\quad a_{32_n} = r_{AL} \cdot \omega_{32}^2$

Obecný rozklad obecného rovinného pohybu tělesa

— unášivý pohyb 21 není posuvný!



$$\boxed{31 = 32 + 21}$$

Rychlost bodu L:

$$\vec{v}_{31} = \vec{v}_{32} + \vec{v}_{21}$$

Zrychlení bodu L:

$$\vec{a}_{31} = \vec{a}_{32} + \vec{a}_{21} + \vec{a}_C$$

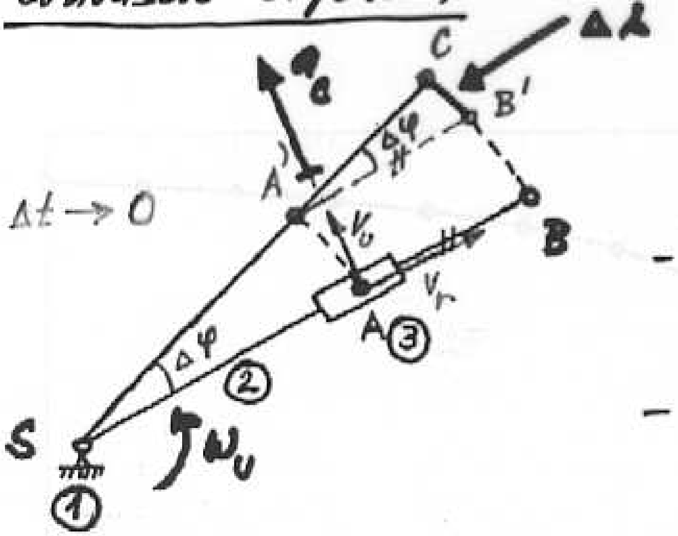
$$\vec{a}_C = 2\, \vec{\omega}_U \times \vec{v}_{rel}$$

Coriolisovo zrychlení

$$a_c = |\vec{a_c}| = 2\,\omega_U \cdot v_{rel} = 2\,\omega_U \cdot \dot{r}_{rel} = 2\,\omega_{21} \cdot v_{32}$$

Směr Coriolisova zrychlení – relativní rychlost $\vec{v_{32}}$ pootočíme o 90° ve smyslu unášivé rychlosti ω_{21}

Coriolisovo zrychlení



v_r – relativní rychlost

v_U – unášivá rychlost

Za čas Δt

- bod A → B (kolem ③)

$\overline{AB} = v_r \cdot \Delta t$

- kolem ② se pootočí

$\Delta\varphi = \omega_U \cdot \Delta t$

- kdyby měl bod A pouze výchozí unášivou rychlost $v_U = \omega_U \cdot \overline{SA}$, urazil by za dobu Δt jen dráhu $\overline{AA'} = \overline{BB'}$

⇒ **pro dosažení bodu C se musí za Δt v_U zvětšit tak, aby bod urazil dráhu**

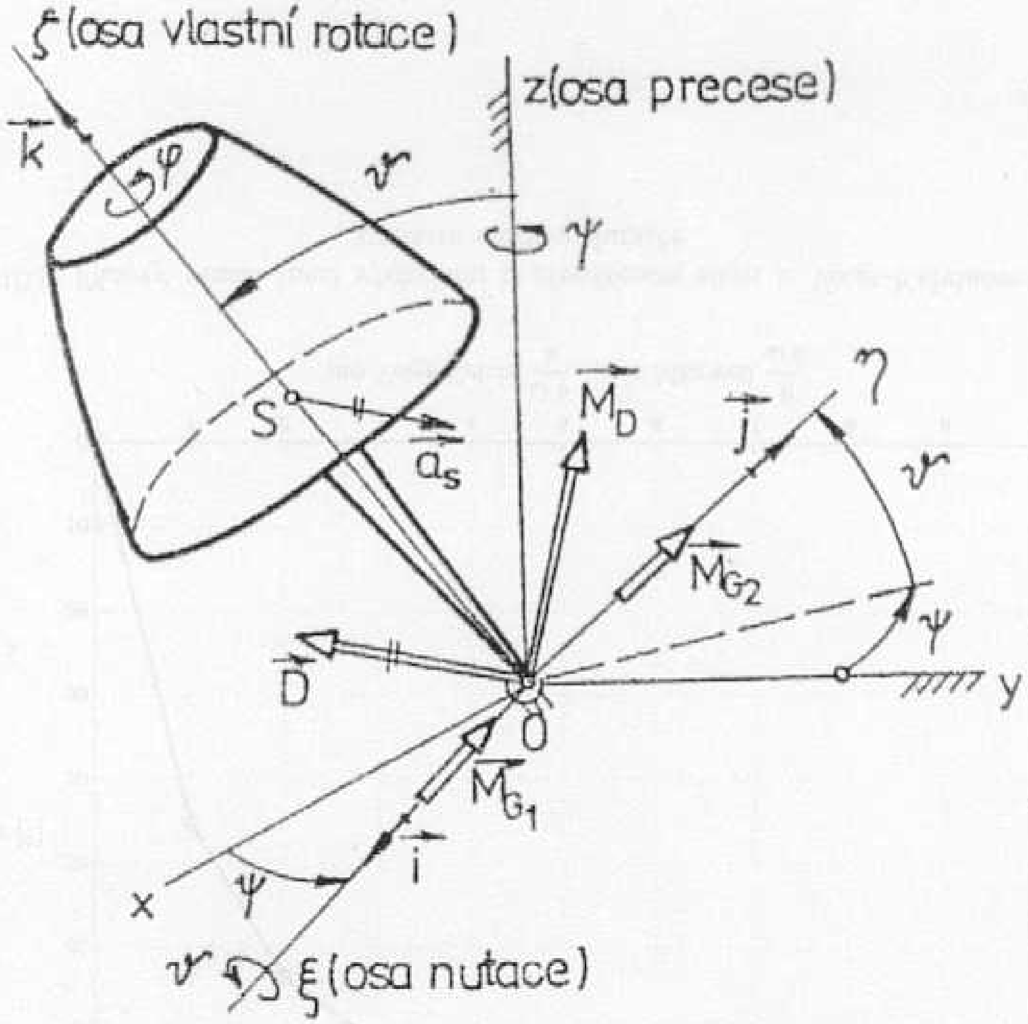
$$\Delta s = \overline{B'C} = \overline{A'B'} \cdot \Delta\varphi$$

$\overline{A'B'} = \overline{AB} = v_r \cdot \Delta t$; $\Delta\varphi = \omega_U \cdot \Delta t$

$\Delta s = v_r \cdot \omega_U \cdot (\Delta t)^2$ ←srovnání→ rovnoměrně zrychlený pohyb $\Delta s = \frac{1}{2}\, a\,(\Delta t)^2$

$\frac{1}{2}\, a_c = v_r \cdot \omega_U \Rightarrow \boxed{a_c = 2\,\omega_U \cdot v_r}$

Obecně : $\boxed{\vec{a_c} = 2\,\vec{\omega_U} \times \vec{v}_{rel}}$


ζ (osa vlastní rotace)
z(osa precese)
k
φ
ϑ
ψ
S
a_s
M_D
j
η
ϑ
M_G2
ψ
D
O
y
M_G1
i
x
ψ
ϑ
ξ (osa nutace)