Rozdělení mechaniky a její náplň

TM – vychází z platnosti Newtonových zákonů

Mechanika – nauka o rovnováze a pohybu hmotných útvarů pohybujících se rychlostí $v \ll c$

– vlastnosti skutečných hmotných útvarů jsou složité pro popis => zavádíme idealizované modely hmotných útvarů

– podle úrovně idealizace:

* hmotný bod – zanedbávají se rozměry,
  – charakterizován hmotností
* tuhé těleso – nedeformuje se účinkem sil,
  – pohyb tělesa závisí na hmotnosti a jejím rozložení v prostoru
* poddajné těleso – má určitý tvar i objem, který se účinkem sil mění málo => vyšetřujeme deformace a napětí v libovolném bodě tělesa
* kapalina – má málo proměnný objem, nemá určitý tvar. O klasifikaci kapaliny rozhoduje vazkost a stlačitelnost
* plyn – nemá určitý objem ani tvar, řídí se stavovou rcí

Rozdělení mechaniky odpovídající uvedeným modelům hm. útvarů:

– mechanika hm. bodů	mechanika diskrétních soustav		mechanika pevných těles
– mechanika tuhých těles			
– mechanika poddajných těles (pružnost, pevnost)		mechanika kontinua	
– hydromechanika	mechanika tekutin		
– termomechanika			

Z jiného hlediska dělíme mechaniku na:

– **statika** – vyšetřuje podmínky rovnováhy hm. útvarů za klidu

– **kinematika** – vyšetřuje pohyb hm. útvarů bez ohledu na příčiny pohybu (síly)

– **dynamika** – zkoumá pohyb hm. útvarů jako následek působení vnějších sil

Kombinací obou hledisek se vyvíjí další disciplíny mechaniky:

– hydrostatika
– hydrodynamika
– aerodynamika

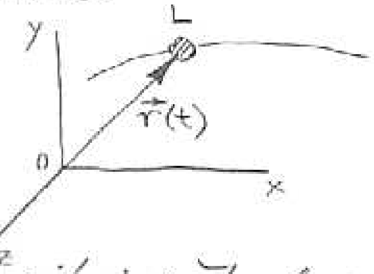
Nové trendy a směry v mechanice:

– **biomechanika** – mechanika aplikovaná v medicíně, biologii

Kinematika hmotného bodu

- cílem je vyšetřit pohyb hmotných bodů bez ohledu na příčiny pohybu (síly)
- spojitá křivka, po které se hm. bod pohybuje v prostoru se nazývá trajektorie, nebo-li dráha pohybu. Je určena závislostí polohového vektoru $\vec{r}$ na čase

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$



- s ohledem na tvar trajektorie hm. bodů, můžeme jednotlivé pohyby rozdělit na:
  a) přímočarý pohyb hm. bodu – trajektorií je přímka
  b) křivočarý pohyb hm. bodu v rovině – trajektorií je rovinná křivka
  c) křivočarý pohyb hm. bodu v prostoru – trajektorií je prostorová křivka
- při řešení pohybu hm. bodů se obecně setkáváme s dvěma typy úloh: α) známe rovnici trajektorie $\vec{r} = \vec{r}(t)$ a hledáme základní kinematické veličiny:

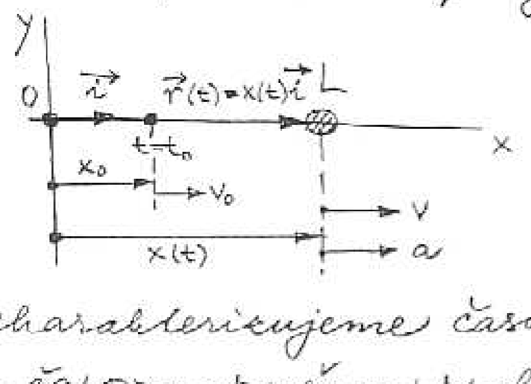
$$\left.\begin{aligned} &\text{– rychlost } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad [m\,s^{-1}] \\ &\text{– zrychlení } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad [m\,s^{-2}] \end{aligned}\right\} \text{derivací}$$

β) máme předepsáno zrychlení $\vec{a}(t)$ + počáteční podmínky v čase $t = t_0$ a úlohou je určit:

$$\left.\begin{aligned} &\text{– rychlost } \vec{V}(t) \\ &\text{– rci trajektorie } \vec{r}(t) \end{aligned}\right\} \text{integrací}$$

Přímočarý pohyb hmotného bodu L

- jeho trajektorií je přímka $x = x(t)$
- nejjednodušší a základní pohyb hm. bodu



- rychlost charakterizujeme časovou změnou polohy: $v = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}$
- zrychlení časovou změnou rychlosti: $a = \frac{dv}{dt} \equiv \dot{v}$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x}$$

- pokud $v = v(x) \Rightarrow a = \frac{dv(x)}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \equiv \frac{d(v^2)}{2dx}$

Druhy přímočarého pohybu hm. bodu

– podle funkce zrychlení rozdělujeme přímočarý pohyb do 3 základních skupin:

1. rovnoměrný pohyb: $a = 0$, poč. podm. pro $t = t_0$: $v(t_0) = v_0$, $x(t_0) = x_0$

$$a = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \underline{v(t) = v_0 = konst} \Rightarrow \underline{v(x) = v_0}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0\, dt \Rightarrow x - x_0 = v_0 (t - t_0)$$

$$\underline{x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0)}$$

2. rovnoměrně zrychlený (zpomalený) pohyb: $a = \pm a_K = konst$, $a_K > 0$, počáteční podmínky pro $t = t_0$: $v(t_0) = v_0$, $x(t_0) = x_0$

$$a = \frac{dv}{dt} = \pm a_K \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} \pm a_K dt \Rightarrow \underline{v(t) = v_0 \pm a_K (t - t_0)}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \pm a_K (t - t_0) \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} \left[v_0 \pm a_K (t - t_0)\right] dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) \pm \frac{1}{2} a_K (t - t_0)^2}$$

$$a = \frac{d(v^2)}{2dx} = \pm a_K \Rightarrow \int_{v_0^2}^{v^2} d(v^2) = \pm \int_{x_0}^{x} 2 a_K\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 \pm 2 a_K (x - x_0)$$

$$\underline{v(x) = \sqrt{v_0^2 \pm 2 a_K (x - x_0)}}$$

Znaménko (+) odpovídá zrychlenému a znaménko (−) odpovídá zpomalenému (zpožděnému) pohybu.

3. nerovnoměrný pohyb: $a = a(t, v, x)$, počáteční podmínky pro $t = t_0$: $v(t_0) = v_0$, $x(t_0) = x_0$

– řešení nerovnoměrného pohybu je vždy nutné řešit integrací z rovnic $v = \frac{dx}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(v^2)}{2dx}$, neboť nelze napsat obecně platné vztahy jako u pohybů rovnoměrných.

– příklady nerovnoměrných pohybů:

$a(v) = g - kv^2$, $k > 0$

$a(v) = -a_0 - kv$, $k > 0$

$a(x) = -\Omega^2 x \quad , \quad \Omega^2 > 0$ ... jedná se v tomto případě o harmonický pohyb (děje se po přímce)

Př.: Zrychlení hm. bodu konajícího harmonický pohyb je popsáno fcí $a = -\Omega^2 x$, kde Ω^2 je kladná konstanta. Vyšetřete všechny kinematické závislosti $v(t)$, $x(t)$ a $v(x)$ tohoto pohybu, jsou-li počáteční podmínky v čase $t=0$: $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

$a(x) = -\Omega^2 x = \ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \Omega^2 x = 0$, je to ODR 2. řádu

$\Rightarrow \lambda^2 + \Omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\Omega^2 \Rightarrow \lambda^2 = i^2\Omega^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\Omega$

Obecné řešení má tvar: $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}$

Využijeme Eulerova vztahu: $e^{\pm i\Omega t} = \cos\Omega t \pm i \sin \Omega t$

$$\Rightarrow x(t) = C_1 \cos\Omega t + C_1 i \sin\Omega t + C_2 \cos\Omega t - C_2 i \sin\Omega t =$$
$$= \underbrace{(C_1 + C_2)}_{=A} \cos\Omega t + \underbrace{i(C_1 - C_2)}_{=B} \sin\Omega t$$

$\Rightarrow x(t) = A\cos\Omega t + B \sin\Omega t$, konstanty A a B určíme z počátečních podmínek pohybu

$\dot{x}(t) = -A\Omega \sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t$

$x(0) = x_0 = A$

$\dot{x}(0) \equiv v(0) = v_0 = B\Omega \Rightarrow B = \frac{v_0}{\Omega}$

Hledaná závislost: $x(t) = x_0 \cos\Omega t + \frac{v_0}{\Omega}\sin\Omega t$

Tuto závislost je možné ještě upravit na tvar:

$x(t) = X\sin(\Omega t + \varphi)$, kde X je amplituda harmonického pohybu,
Ω je kruhová frekvence,
φ je počáteční fáze

Tedy: $x_0 \cos\Omega t + \frac{v_0}{\Omega}\sin\Omega t = X \sin\Omega t \cos\varphi + X\cos\Omega t \sin\varphi$

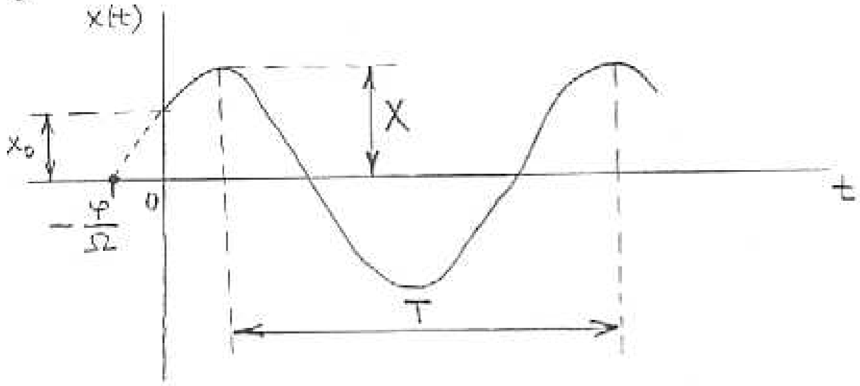
$$x_0 = X\sin\varphi \quad /()^2 \quad \oplus \quad \Rightarrow$$
$$\frac{v_0}{\Omega} = X\cos\varphi \quad /()^2$$

$\Rightarrow X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\Omega}\right)^2}$. Podělením rovnic $\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{x_0\Omega}{v_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_0\Omega}{v_0}\right)$$

Našli jsme vztahy pro amplitudu X a fázi φ a tím je závislost $\underline{x(t) = X \sin(\Omega t + \varphi)}$ jednoznačně určena.

Její grafické znázornění:



Závislost $v(t)$ dostaneme derivací $x(t)$ podle času:

$$\underline{\underline{v(t) = \dot{x}(t) = X\Omega \cos(\Omega t + \varphi)}}$$

Závislost $v(x)$ dostaneme následujícím způsobem:

$$a(x) = \frac{d(v^2)}{2dx} = -\Omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0^2}^{v^2} d(v^2) = -\int_{x_0}^{x} 2\Omega^2 x \, dx \quad \Rightarrow$$

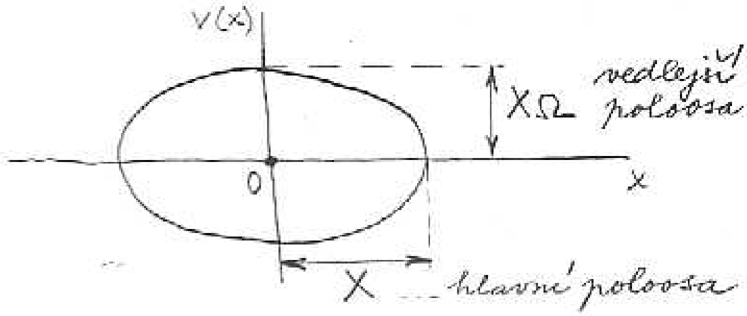
$$\Rightarrow v^2 - v_0^2 = -\Omega^2(x^2 - x_0^2) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v(x) = \sqrt{v_0^2 - \Omega^2(x^2 - x_0^2)}}}$$

Úpravou tohoto vztahu dostaneme:

$$v^2 = v_0^2 - \Omega^2 x^2 + \Omega^2 x_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{\Omega^2} = \underbrace{\frac{v_0^2}{\Omega^2} + x_0^2}_{= X^2} - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{v^2}{\Omega^2} = X^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{x^2}{X^2} + \frac{v^2}{X^2\Omega^2} = 1}}$$

jedná se o elipsu. Graf závislosti rychlosti na výchylce můžeme tedy znázornit v tzv. <u>fázové rovině</u> elipsou.

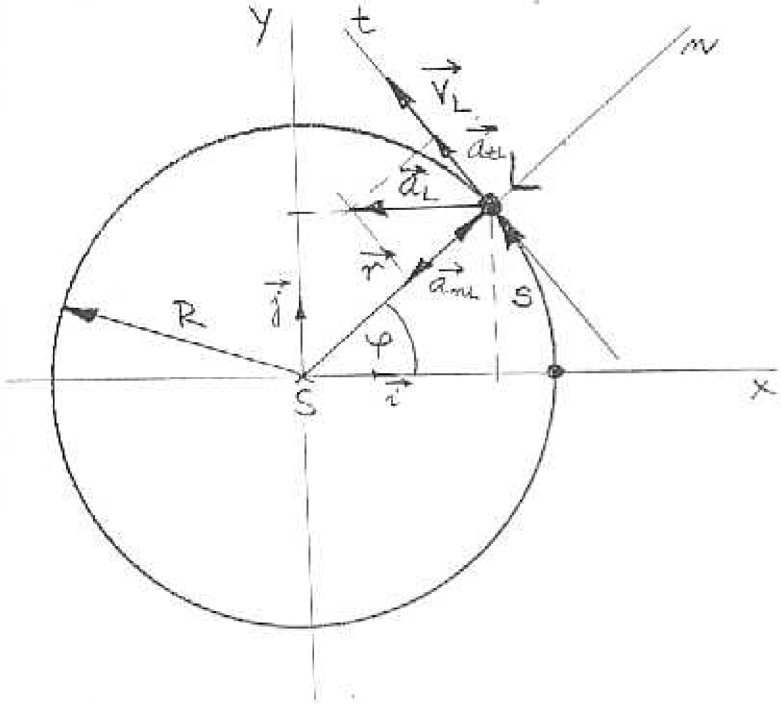


Perioda harmonického pohybu je $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ [s]

a frekvence je $f = \frac{1}{T}$ [s^{-1} = Hz].

<u>Pohyb hmotného bodu po kružnici</u>

– pohyb bodu po kružnici o poloměru R je popsán průvodičem $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, kde $x = R\cos\varphi$
$y = R\sin\varphi$
a $\vec{i}, \vec{j}$ jsou jednotkové vektory.



V souřadnicové soustavě tečny t a normály n je oblouková souřadnice s vyjádřena jako

$$s = R\varphi$$

Velikost rychlosti získáme derivací:

$$v_L = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = R\dot{\varphi} \equiv \underline{R\omega},$$

kde $\omega \equiv \dot{\varphi}$ je úhlová rychlost

Rychlost v_L leží vždy na tečně.

Složky zrychlení bodu L jsou:

- tečné $a_{tL} = \frac{dv_L}{dt} = \dot{v}_L \equiv \ddot{s} = R\ddot{\varphi} = \underline{R\alpha}$, kde $\alpha \equiv \ddot{\varphi} = \dot{\omega}$ je úhlové zrychlení průvodiče

  ↳ leží na tečně t

- normálové zrychlení $a_{nL} = R\dot{\varphi}^2 = R\omega^2 = \frac{v_L^2}{R}$.

Velikost výsledného zrychlení hm. bodu L je potom:

$$a_L = \sqrt{a_{tL}^2 + a_{nL}^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Vektorově: $\vec{a}_L = \vec{a}_{tL} + \vec{a}_{nL}$