Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů

S pojmem *vlastního čísla* jsme se již setkali například u iteračních metod pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Velikosti vlastních čísel iterační matice rozhodovaly o konvergenci příslušné iterační metody. S úlohou na vlastní čísla se setkáme i v aplikacích při řešení řady technických a fyzikálních problémů.

Definice:

Je dána čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n. Číslo λ, pro které má soustava

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \text{resp.} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{o}$$

nenulové řešení, se nazývá *vlastní číslo* matice $\mathbf{A}$ a jemu odpovídající nenulové řešení $\mathbf{v}$ *vlastní vektor* matice $\mathbf{A}$.

Homogenní soustava má nenulové řešení $\Leftrightarrow$ matice soustavy je singulární, tj. její determinant je nulový.

Vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou kořeny *charakteristické rovnice*

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Ke každému vlastnímu číslu λ_i existuje alespoň jeden vlastní vektor $\mathbf{v_i}$.

Poznámka:

Charakteristický polynom je stupně $n \Rightarrow \exists\, n$ vlastních čísel.

Definice:

Matici $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_\mathbf{1}, \lambda_\mathbf{2}, \dots, \lambda_\mathbf{n})$ nazýváme *spektrální maticí* matice $\mathbf{A}$.

Úlohu na vlastní čísla si připomeneme na příkladu.

Příklad: Stanovte taková čísla λ, pro která má homogenní soustava $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ nenulové řešení, a určete toto řešení, kde matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Řešíme tedy soustavu

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aby homogenní soustava měla nenulové řešení, musí být determinant soustavy nulový. Hledáme proto taková λ, aby

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0.$$

Dostali jsme algebraickou rovnici stupně 3 a pouze pro její kořeny

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 1$$

nazývané *vlastní čísla* matice $\mathbf{A}$, bude mít uvažovaná soustava nenulové řešení.

Ke každému vlastnímu číslu λ_i můžeme najít nenulové řešení homogenní soustavy

$$(\mathbf{A} - \lambda_i I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Např. pro $\lambda_1 = 3$ řešíme soustavu

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matice soustavy je samozřejmě singulární a proto bude existovat celý systém řešení v závislosti na parametru $r \in \mathbb{R}$. Každý vektor $[0, r, r]^T$ řeší danou soustavu. Ze systému vybereme jednoho zástupce, např. $\mathbf{v}^{(1)} = [0, 1, 1]^T$, a říkáme, že $\mathbf{v}^{(1)}$ je *vlastní vektor* odpovídající vlastnímu číslu λ_1. Podobně bychom nalezli vlastní vektory odpovídající vlastním číslům λ_2 a λ_3. □

Poznámka:

Vlastní čísla horní trojúhelníkové matice jsou rovna jejím diagonálním prvkům, neboť charakteristický polynom má tvar:

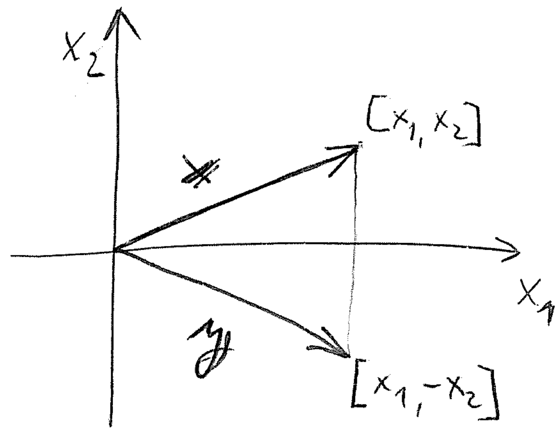
$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda).$$

MOTIVACE

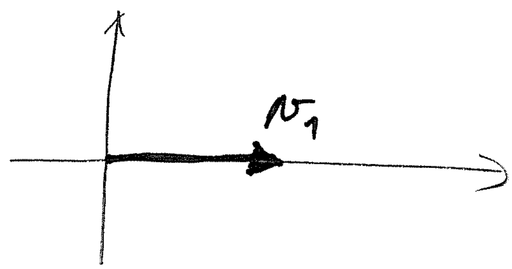
Vlastní vektor je takový vektor, pro který platí, že vynásobíme-li matici A s tímto vektorem, získáme násobek původního vektoru. Mluvíme o <u>samodružných prvcích</u>

<u>Př</u>: osová souměrnost = zobrazení $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$

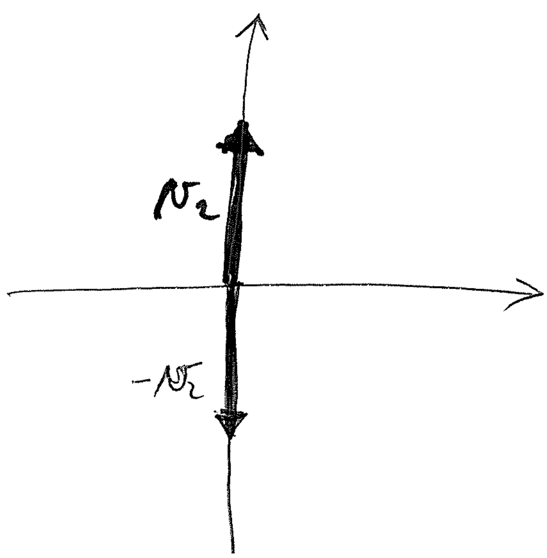
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1} = \underbrace{1}_{\lambda_1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1}$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2} = \underbrace{-1}_{\lambda_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2}$$



Některé poznatky z lineární algebry

Definice Říkáme, že matice A a B jsou podobné, existuje-li regulární matice P taková, že

$$\boxed{P^{-1}AP = B}\ ,\text{ resp. } \boxed{A = PBP^{-1}}$$

Věta: Podobné matice mají stejná vl. čísla.

Dk: $$\det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)\cdot\frac{\det(P)}{\det(P)} =$$

$$= \det(P^{-1})\cdot\det(A - \lambda I)\cdot\det(P) =$$

$$= \det\left[P^{-1}(A - \lambda I)P\right] = \det(\underbrace{P^{-1}AP}_{B} - \lambda I)$$

Věta Je-li v vlastní vektor matice A, potom $P^{-1}v$ je vlastní vektor matice $B = P^{-1}AP$.

Dk: $$Av = \lambda v$$

$$P^{-1}\cdot/ \quad PBP^{-1}v = \lambda v$$

$$B\underbrace{P^{-1}v}_{w} = \lambda \underbrace{P^{-1}v}_{w}$$

Poznámka :

Pokud jsou vl. vektory $v_1, v_2 \dots v_n$ lin. nezávislé, potom platí:

$$X^{-1} A X = \Lambda$$

($\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ ... spektrální matice)

Matice A je tedy podobná diagonální matici.

Matice X je matice, jejíž sloupce tvoří vlastní vektory

$$\boxed{AX = X\Lambda} : \quad A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}}_{X} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda}}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

Úlohy na nalezení vlastních čísel rozdělíme do dvou skupin:

Úplný problém – úloha najít všechna vlastní čísla

Částečný problém – úloha najít pouze některá vl. čísla (obvykle s nejmenší nebo největší absolutní hodnotou).

Příklad: Určete vlastní čísla a vlastní vektory těchto matic:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right], \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right], \quad \mathbf{D} = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Řešení: Všechny zadané matice mají stejný charakteristický polynom

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = p_{\mathbf{B}}(\lambda) = p_{\mathbf{C}}(\lambda) = p_{\mathbf{D}}(\lambda) = (2-\lambda)^3,$$

Vidíme, že $\lambda = 2$ je trojnásobné vl. číslo všech čtyř matic.

Vlastní vektory

A: $v^{(1)} = (1, 0, 0)^T$
$v^{(2)} = (0, 1, 0)^T$
$v^{(3)} = (0, 0, 1)^T$

Pozn.: matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ je nulová, tj. systém všech řešení rovnice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{0}$ je lin. kombinací $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$.

B: $v^{(1)} = (1, 0, 0)^T$
$v^{(3)} = (0, 0, 1)^T$

Pozn.: $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C: $v^{(1)} = (1, 0, 0)^T$
$v^{(2)} = (0, 1, 0)^T$

D: $v^{(1)} = (1, 0, 0)^T$

Pozn.: $\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\square$

Poznámka:

Počet lineárně nezávislých vlastních vektorů může být menší než je řád matice.

Věta Nechť A je čtvercová matice řádu n, λ její vl. číslo a v její vlastní vektor, tj.: $Av = \lambda v$. Potom platí:

(i) $k \in N$ $\qquad \lambda(A^k) = [\lambda(A)]^k$

(ii) A... regulární $\Rightarrow \quad \lambda(A^{-1}) = [\lambda(A)]^{-1}$

(iii) $\lambda(A^H) = \overline{\lambda(A)}$

(iv) vlastní čísla symetrické matice jsou reálná.
(hermitovské)

(v) vlastní vektory symetrické matice odpovídající různým vl. číslům jsou ortogonální

(vi) symetrická pozitivně definitní matice má všechna vl. čísla kladná.

Důkaz

(i) $A\cdot/ \quad Av = \lambda v \quad \Rightarrow \quad A^2 v = \lambda \underbrace{Av}_{=\lambda v} = \lambda^2 v$

$A\cdot/ \quad A^k v = \lambda^k v \quad \Rightarrow \quad A^{k+1} v = \lambda^k \underbrace{Av}_{\lambda v} = \lambda^{k+1} v$

(ii) $Av = \lambda v \quad \Rightarrow \quad A^{-1}Av = \lambda A^{-1} v$

$$v = \lambda A^{-1} v \quad /\cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda} v = A^{-1} v$$

(iii) Označme $B = A - \lambda I$

Platí: $\det B^H = \overline{\det B^T} = \overline{\det B}$

$$\det(A^H - \bar{\lambda} I) = \overline{\det(A - \lambda I)} = 0$$

(iv) $A = A^H, \quad Av = \lambda v$

číslo $/^H$ a vidíme –

$$\lambda v^H v = v^H(\lambda v) = v^H A v = v^H A^H v =$$

$$= \overline{(v^H A^H v)^H} = \overline{v^H \underbrace{Av}_{\lambda v}} = \overline{\lambda v^H v} = \bar{\lambda} v^H v$$

$$\overline{(v^H v)^H} = v^H v$$

$$\overline{v^H v} = v^H v$$

(v)

$$\left.\begin{array}{l} u^H / \; A v = \lambda v \\ v^H / \; A u = \mu u \end{array}\right\} \quad \lambda \neq \mu; \quad \lambda = \bar{\lambda}, \; \mu = \bar{\mu}, \; A = A^H$$

$$u^H A v = \lambda u^H v$$

$$v^H A u = \mu v^H u \quad /^H \qquad -$$

$$u^H A^{\cancel{H}} v = \mu u^H v$$

$$0 = \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} u^H v \quad \Rightarrow \quad \boxed{u^H v = 0}$$

(vi)

$$A v = \lambda v$$

$$v^T A v = \lambda v^T v$$

Platí (pro pozitivně definitní matici A):

$$\forall v \neq 0 : \quad v^T A v > 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \underbrace{v^T v}_{\neq 0} > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda > 0}$$

Věta Nechť A je reálná symetrická matice. Potom existuje ortogonální matice Q taková, že sp. matice $\boxed{\Lambda = Q^T A Q}$

Pozn: ortogonální Q: $\boxed{Q^T Q = I}$ $/ \cdot Q^{-1}$ $\boxed{Q^T = Q^{-1}}$

Podmíněnost úlohy na vlastní čísla

Omezíme se na případ, kdy matice A má n lineárně nezávislých vlastních vektorů $v_1, v_2, \ldots v_n$ odpovídajících vl. číslům $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

- Δa_{ij} ... malé změny v prvcích a_{ij}. $\underline{|\Delta a_{ij}| \leq \varepsilon}$
- porušená matice $A(\varepsilon) = A + \Delta A$ má vlastní čísla $\lambda_k(\varepsilon) = \lambda_k + \Delta \lambda_k$
- dále platí (viz literatura)

$$\boxed{|\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_k| \lesssim \varkappa_k \varepsilon, \quad \text{kde} \quad \varkappa_k = \frac{1}{|\cos \alpha_k|}}$$

kde α_k je úhel v_k a vl. vektoru A^H odpovídajícího vlastního čísla $\overline{\lambda_k}$

- Pro <u>symetrickou matici</u> je $\underline{\alpha_k = 0}$ $\Rightarrow$ $\varkappa_k = 1$

$$|\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_k| \leq \varepsilon \quad \ldots \quad \underline{\text{dobře podmíněná úloha}}$$

- Pro <u>nesymetrickou matici</u> je $\alpha_k \neq 0$ a $\varkappa_k$ <u>může být</u> velmi velké $\Rightarrow$ <u>špatně podmíněná úloha</u>

```
A =
      7     1
      1     3

AT = A

v =
    0.2298   -0.9732
   -0.9732   -0.2298

c =
    2.7639         0
         0    7.2361
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A =
   3.0000                  1.0000 - 1.0000i
   1.0000 + 1.0000i        4.0000

AH =
   3.0000                  1.0000 - 1.0000i
   1.0000 + 1.0000i        4.0000

v =
   0.5774 - 0.5774i        0.4082 - 0.4082i
  -0.5774                  0.8165

c =
    2.0000         0
         0    5.0000

vH =
   0.5774 - 0.5774i        0.4082 - 0.4082i
  -0.5774                  0.8165

cH =
    2.0000         0
         0    5.0000
```

```
A =
     2     0     0     0
     0    -1     2     0
     0     0     2     1
     0     0     0     3

AH =
     2     0     0     0
     0    -1     0     0
     0     2     2     0
     0     0     1     3

v =
    1.0000         0         0         0
         0    1.0000    0.6667    0.5000
         0         0    1.0000    1.0000
         0         0         0    1.0000

c =
     2     0     0     0
     0    -1     0     0
     0     0     2     0
     0     0     0     3

vH =
    1.0000         0         0         0
         0    1.0000    0.0000   -0.0000
         0   -0.6667    1.0000    0.0000
         0    0.1667   -1.0000    1.0000

cH =
    2.0000         0         0         0
         0   -1.0000         0         0
         0         0    2.0000         0
         0         0         0    3.0000

------------------------------------------------------------
 Vlastni vektory A a AH odpovidajici vlastnimu cislu lambda,
 cos uhlu, ktery sviraji a tento uhel

lambda = 2
vlastni_vektor_A =  1     0     0     0
vlastni_vektor_AH = 1     0     0     0
cosinus_uhlu =  1
uhel = 0
------------------------------------------------------------

lambda = -1
vlastni_vektor_A =  0     1     0     0
vlastni_vektor_AH = 0    1.0000   -0.6667    0.1667
cosinus_uhlu = 0.8242
uhel = 34.4962
------------------------------------------------------------

lambda = 2
vlastni_vektor_A =  0    0.6667    1.0000         0
vlastni_vektor_AH = 0    0.0000    1.0000   -1.0000
cosinus_uhlu = 0.5883
uhel = 53.9601
------------------------------------------------------------

lambda = 3
vlastni_vektor_A =  0    0.5000    1.0000    1.0000
vlastni_vektor_AH = 0   -0.0000    0.0000    1.0000
cosinus_uhlu = 0.6667
uhel = 48.1897
------------------------------------------------------------
```

Příklad

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 20 & & & & \\ & 19 & 20 & & & \\ & & 18 & 20 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 2 & 20 \\ \varepsilon & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

rozvoj podle posledního řádku

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (20-\lambda)(19-\lambda)\dots(1-\lambda) - 20^{19}\cdot\varepsilon$$

- pro $\underline{\varepsilon = 0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda_{min} = 1}$

- pro $\underline{\varepsilon = 20!\,20^{-19} = 4{,}64 \cdot 10^{-7}}$

$$p_A(\lambda) = \underbrace{\underbrace{(20-\lambda)(19-\lambda)\dots(1-\lambda)}_{\text{konst. člen} = 20!} - \cancel{20^{19}} \cdot 20!\,\cancel{20^{-19}}}_{\text{odečte se}}$$

$$= \lambda \cdot (\dots\dots) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{min} = 0}$$

- Malé změně ε odpovídá velká změna vl. čísla λ_{min}.
- Vl. čísla nesym. matic jsou citlivá na změnu prvků (citlivost roste s rostoucí vzdáleností od diagonály)

ČÁSTEČNÝ PROBLÉM

Mocninná metoda

Chceme určit vl. číslo matice $\mathbf{A}$ s největší absolutní hodnotou (*dominantní vlastní číslo*).

Předpoklady:

1. $\mathbf{A}$ má n-lineárně nezávislých vlastních vektorů
2. existuje jediné dominantní vlastní číslo
3. vlastní čísla lze seřadit: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.

Odvození:

1. Zvolíme $\mathbf{y}^{(0)}$ jako lin. kombinaci vl. vektorů

$$\mathbf{y}^{(0)} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n.$$

2. Sestrojíme posloupnost

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(k-1)}, \quad \text{tj. } \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{A}^k\mathbf{y}^{(0)}.$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \alpha_1\mathbf{A}^k\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{A}^k\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{A}^k\mathbf{v}_n.$$

3. Platí: $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$, potom

$$\mathbf{y}^{(k)} = \alpha_1 \underbrace{\lambda_1^k}_{*} \mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n.$$

*dominantní vl. číslo (vytkneme)

4. dostaneme:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \lambda_1^k\Big[\alpha_1\mathbf{v}_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overbrace{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k}^{\to 0} \mathbf{v}_i}_{\varepsilon_k \to \mathbf{0}}\Big].$$

5. analogicky pro $\mathbf{y}^{(k+1)}$

6. vybereme j-tou složku $\mathbf{y}^{(k)}$ a $\mathbf{y}^{(k+1)}$, vydělíme je a provedeme limitní přechod

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_j^{(k+1)}}{y_j^{(k)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_1^{k+1}(\alpha_1 v_{1,j} + \overbrace{\varepsilon_{k+1,j}}^{\to 0})}{\lambda_1^k(\alpha_1 v_{1,j} + \underbrace{\varepsilon_{k,j}}_{\to 0})} = \lambda_1$$

Příklad: Mocninnou metodou stanovte dominantní vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{y}^{(0)} = [1, 1, 1]^T.$$

Řešení: Použijeme iterační formuli

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(k)}, \text{ pro } k = 0, 1, \ldots$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{(1)} &= [2; 3; 2]^T & \lambda_1^{(1)} &= \frac{y_2^{(1)}}{y_2^{(0)}} = 3, \\
\mathbf{y}^{(2)} &= [5; 7; 5]^T & \lambda_1^{(2)} &= \tfrac{7}{3} \approx 2,3333, \\
\mathbf{y}^{(3)} &= [12; 17; 12]^T & \lambda_1^{(3)} &= \tfrac{17}{7} \approx 2,4285, \\
\mathbf{y}^{(4)} &= [29; 41; 29]^T & \lambda_1^{(4)} &= \tfrac{41}{17} \approx 2,4117, \\
\mathbf{y}^{(5)} &= [70; 99; 70]^T & \lambda_1^{(5)} &= \tfrac{99}{41} \approx \underline{\underline{2,4146}}.
\end{aligned}$$

$\square$

5 **Poznámka:** Zastavovací podmínka ve tvaru $|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \delta$.

2 **Poznámka:** Nejlepší aproximaci dostaneme, dělíme-li složky, které mají největší absolutní hodnotu.

1 **Poznámka:** Abychom zamezili přetečení, resp. podtečení při zobrazení čísel v počítači je vhodné v každém kroku normovat vektor $\mathbf{y}^{(k)}$ (norma $\mathbf{y}^{(k)}$ roste, resp. klesá pro vlastní číslo v absolutní hodnotě větší, resp. menší než 1).

Poznámka: Nevýhody mocninné metody:

- odhad chyby
- konvergence (obvykle v praxi nevíme, zda jsou splněny předpo-
6 $\Leftarrow$ 3 klady mocninné metody)
- volba $\mathbf{y}^{(0)}$ (bude-li vektor $\mathbf{y}^{(0)}$ takovou lineární kombinací vlast-
4 ních vektorů, že koeficient u vlastního vektoru odpovídajícího dominantnímu vlastnímu číslu bude roven 0, potom mocninná metoda nevypočte dominantní vlastní číslo)

1

PŘETEČENÍ $y^{(k)}$

$$\boxed{\hat{y}^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{\|y^{(k)}\|}}$$

normalizace

A =

$$\begin{bmatrix} 23 & 3 & 1 \\ 3 & 37 & 2 \\ 2 & 3 & 47 \end{bmatrix}$$

v =

$$\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1.0000 \\ -0.1970 \\ -0.0572 \end{matrix}}}_{v_1} \quad \underbrace{\boxed{\begin{matrix} -0.0652 \\ -0.2044 \\ -1.0000 \end{matrix}}}_{v_2} \quad \underbrace{\boxed{\begin{matrix} -0.1917 \\ -1.0000 \\ 0.3351 \end{matrix}}}_{v_3}$$

c =

$$\begin{matrix} \lambda_1 = 22.3518 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 = 47.7435 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 = 36.9047 \end{matrix}$$

alfa =

1 1 1

y =

$$y = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$$

0.7432
-1.4014
-0.7220

Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

A =

23	3	1
3	37	2
2	3	47

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	lambda_k
0	7.431552e-01	-1.401363e+00	-7.220286e-01	
1	1.216645e+01	-5.106501e+01	-3.665312e+01	36.4395395
2	8.998026e+01	-1.926212e+03	-1.851559e+03	37.7207848
3	-5.560650e+03	-7.470303e+04	-9.262194e+04	50.0237637
4	-4.446260e+05	-2.965938e+06	-4.588461e+06	49.5396833
5	-2.371267e+07	-1.202505e+08	-2.254448e+08	49.1329733
6	-1.131588e+09	-4.971296e+09	-1.100408e+10	48.8105405
7	-5.194449e+10	-2.093409e+11	-5.343688e+11	48.5609722
8	-2.357115e+12	-8.970184e+12	-2.584725e+13	48.3696750
9	-1.069714e+14	-3.906626e+14	-1.246445e+15	48.2235261
10	-4.878776e+15	-1.726832e+16	-5.996886e+16	48.1119065
11	-2.239857e+17	-7.735020e+17	-2.880099e+18	48.0265747
12	-1.035228e+19	-3.505173e+19	-1.381331e+20	47.9612438
13	-4.813907e+20	-1.604237e+21	-6.618117e+21	47.9111481
14	-2.250281e+22	-7.403718e+22	-3.168270e+23	47.8726791
15	-1.056503e+24	-3.440538e+24	-1.515799e+25	47.8431010
16	-4.977918e+25	-1.607854e+26	-7.248600e+26	47.8203346
17	-2.352137e+27	-7.548117e+27	-3.465033e+28	47.8027958
18	-1.113938e+29	-3.556374e+29	-1.655914e+30	47.7892745
19	-5.284885e+30	-1.680459e+31	-7.911767e+31	47.7788446
20	-2.510838e+32	-7.958600e+32	-3.779514e+33	47.7707956

ans =

(1)

PODTEČENÍ $y^{(k)}$

$$\boxed{\hat{y}^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{\|y^{(k)}\|}}$$

normalizace

```
A =

    0.0440   -0.0035   -0.0008
   -0.0035    0.0274   -0.0011
   -0.0017   -0.0016    0.0214


v =

    1.0000   -0.1917    0.0652
   -0.1970   -1.0000    0.2044
   -0.0572    0.3351    1.0000


c =

    0.0447         0         0
         0    0.0271         0
         0         0    0.0209


alfa =

     1     1     1


y =

    0.8735
   -0.9926
    1.2780
```

Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

```
A =

    0.0440   -0.0035   -0.0008
   -0.0035    0.0274   -0.0011
   -0.0017   -0.0016    0.0214
```

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	lambda_k
0	8.735404e-01	-9.926350e-01	1.277971e+00	
1	4.091136e-02	-3.162992e-02	2.746890e-02	0.0468340
2	1.889464e-03	-1.038892e-03	5.703543e-04	0.0461843
3	8.633491e-05	-3.565870e-05	1.073746e-05	0.0456928
4	3.915559e-06	-1.289016e-06	1.441147e-07	0.0453531
5	1.767026e-07	-4.909421e-08	-1.319317e-09	0.0451283
6	7.948647e-09	-1.958311e-09	-2.413123e-10	0.0449832
7	3.568223e-10	-8.104020e-11	-1.514545e-11	0.0448909
8	1.599741e-11	-3.445034e-12	-7.830888e-13	0.0448330
9	7.166342e-13	-1.491802e-13	-3.763440e-14	0.0447969
10	3.208696e-14	-6.539016e-15	-1.748750e-15	0.0447745
11	1.436236e-15	-2.888636e-16	-7.988579e-17	0.0447607
12	6.427487e-17	-1.282312e-17	-3.616301e-18	0.0447523
13	2.876115e-18	-5.709648e-19	-1.628859e-19	0.0447471
14	1.286888e-19	-2.547025e-20	-7.316015e-21	0.0447440
15	5.757798e-21	-1.137500e-21	-3.280662e-22	0.0447420
16	2.576088e-22	-5.083600e-23	-1.469736e-23	0.0447409
17	1.152546e-23	-2.272871e-24	-6.580779e-25	0.0447401

```
ans =

    0.0447
```

2

NELZE OBECNĚ POUŽÍT LIBOVOLNOU SLOŽKU $y^{(k)}$

```
A =

     1     1     0
     0     2     0
     0     0     3


v =

     1     1     0
     0     1     0
     0     0     1


c =

     1     0     0
     0     2     0
     0     0     3


alfa =

     1     1     1


y =

     2
     1
     1
```

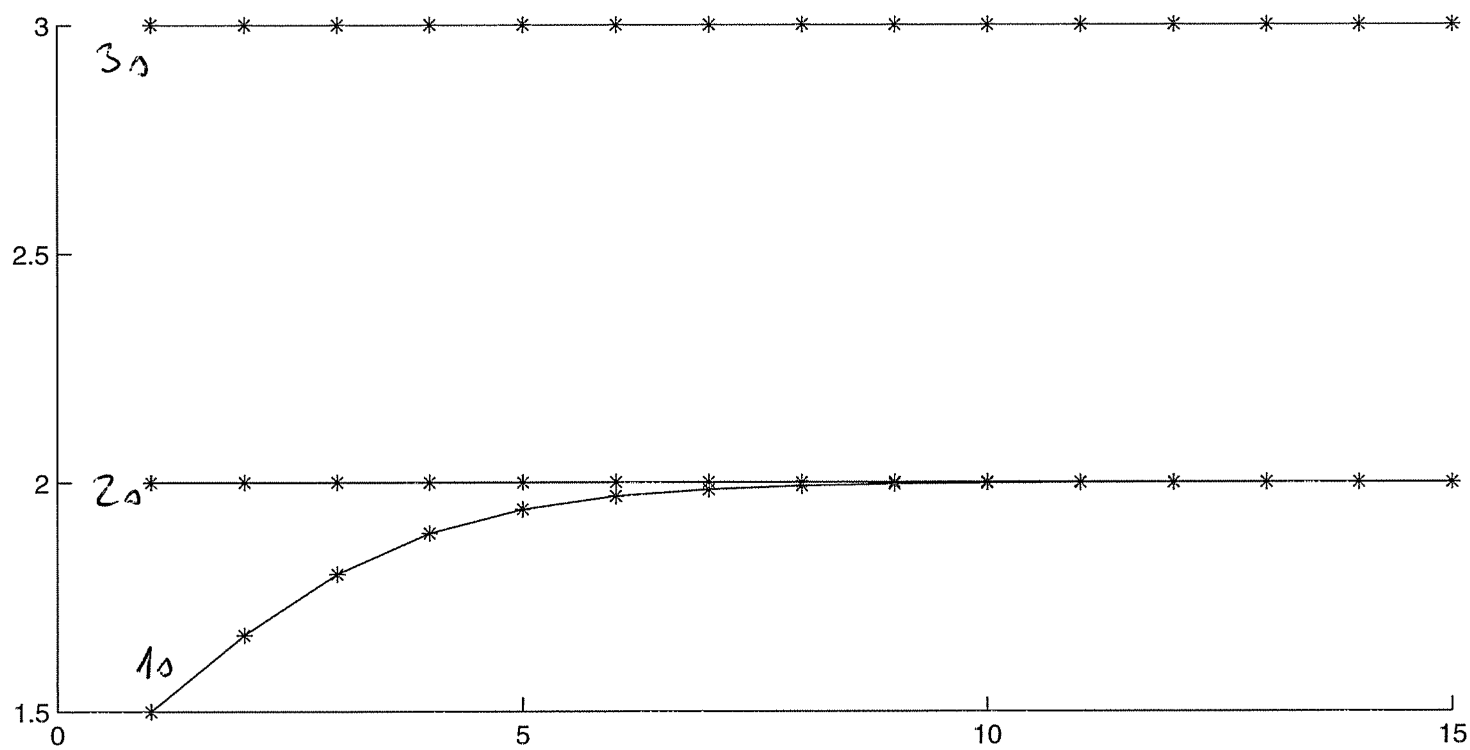
Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

```
A =

     1     1     0
     0     2     0
     0     0     3
```

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	lambda_k 1s	2s	3s
0	2.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00			
1	3.000000e+00	2.000000e+00	3.000000e+00	1.5000000	2	3
2	5.000000e+00	4.000000e+00	9.000000e+00	1.6666667	2	3
3	9.000000e+00	8.000000e+00	2.700000e+01	1.8000000	2	3
4	1.700000e+01	1.600000e+01	8.100000e+01	1.8888889	2	3
5	3.300000e+01	3.200000e+01	2.430000e+02	1.9411765	2	3
6	6.500000e+01	6.400000e+01	7.290000e+02	1.9696970	2	3
7	1.290000e+02	1.280000e+02	2.187000e+03	1.9846154	2	3
8	2.570000e+02	2.560000e+02	6.561000e+03	1.9922481	2	3
9	5.130000e+02	5.120000e+02	1.968300e+04	1.9961089	2	3
10	1.025000e+03	1.024000e+03	5.904900e+04	1.9980507	2	3
11	2.049000e+03	2.048000e+03	1.771470e+05	1.9990244	2	3
12	4.097000e+03	4.096000e+03	5.314410e+05	1.9995120	2	3
13	8.193000e+03	8.192000e+03	1.594323e+06	1.9997559	2	3
14	1.638500e+04	1.638400e+04	4.782969e+06	1.9998779	2	3
15	3.276900e+04	3.276800e+04	1.434891e+07	1.9999390	2	3

```
ans =

    1.9999    2.0000    3.0000
```

2



2

```
A =

     4     3     1
     3     7     2
     2     3     7


v =

   -0.5509   -1.0000   -0.3603
   -0.9350    0.6025   -0.4463
   -1.0000    0.0397    1.0000


c =

   10.9067         0         0
         0    2.1527         0
         0         0    4.9405


alfa =

     1     1     1


y =

   -1.9112
   -0.7787
    0.0397
```

Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

```
A =

     4     3     1
     3     7     2
     2     3     7
```

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	lambda_k 1	lambda_k 2	lambda_k 3
0	-1.911196e+00	-7.787418e-01	3.969734e-02			
1	-9.941311e+00	-1.110539e+01	-5.880736e+00	5.2016183	14.2606776	-148.1393007
2	-7.896214e+01	-1.193231e+02	-9.436393e+01	7.9428291	10.7446162	16.0462795
3	-7.681818e+02	-1.260876e+03	-1.176441e+03	9.7284827	10.5669058	12.4670634
4	-8.031796e+03	-1.348356e+04	-1.355408e+04	10.4555931	10.6938030	11.5212562
5	-8.613194e+04	-1.455885e+05	-1.513928e+05	10.7238705	10.7974800	11.1695397
6	-9.326860e+05	-1.580301e+06	-1.668779e+06	10.8285725	10.8545738	11.0228411
7	-1.014042e+07	-1.719772e+07	-1.828773e+07	10.8722821	10.8825623	10.9587470
8	-1.104426e+08	-1.873808e+08	-1.998881e+08	10.8913176	10.8956749	10.9301774
9	-1.203801e+09	-2.042769e+09	-2.182244e+09	10.8997878	10.9017022	10.9173292
10	-1.312576e+10	-2.227528e+10	-2.381162e+10	10.9035944	10.9044499	10.9115282

```
|11 | -1.431405e+11 | -2.429274e+11 | -2.597587e+11 || 10.9053129 || 10.9056981
| 10.9089043 |
|12 | -1.561103e+12 | -2.649431e+12 | -2.833374e+12 || 10.9060902 || 10.9062642
| 10.9077165 |
|13 | -1.702608e+13 | -2.889607e+13 | -3.090412e+13 || 10.9064420 || 10.9065208
| 10.9071786 |
|14 | -1.856966e+14 | -3.151590e+14 | -3.370692e+14 || 10.9066014 || 10.9066370
| 10.9069350 |
|15 | -2.025333e+15 | -3.437341e+15 | -3.676355e+15 || 10.9066735 || 10.9066897
|| 10.9068247 |

ans =

   10.9067   10.9067   10.9068
```

3

NEJEDNOZNAČNOST DOMINANTNÍHO VLASTNÍHO ČÍSLA

MENŠÍ POČET LIN. NEZÁVISLÝCH VL. VEKTORŮ

```
A =
     3     1     1
    -1     1     0
     0     0     1

v =
    1.0000   -1.0000    0.0000
   -1.0000    1.0000   -1.0000
         0         0    1.0000

c =
    2.0000         0         0
         0    2.0000         0
         0         0    1.0000

y =
     1
     1
     1
```

Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A
s normovanim vlastniho vektoru v kazde iteraci

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	lambda_k
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	
1	5.0000000	0.0000000	1.0000000	5.000000
	1.0000000	0.0000000	0.2000000	
2	3.2000000	-1.0000000	0.2000000	3.200000
	1.0000000	-0.3125000	0.0625000	
3	2.7500000	-1.3125000	0.0625000	2.750000
	1.0000000	-0.4772727	0.0227273	
4	2.5454545	-1.4772727	0.0227273	2.545455
	1.0000000	-0.5803571	0.0089286	
5	2.4285714	-1.5803571	0.0089286	2.428571
	1.0000000	-0.6507353	0.0036765	
6	2.3529412	-1.6507353	0.0036765	2.352941
	1.0000000	-0.7015625	0.0015625	
7	2.3000000	-1.7015625	0.0015625	2.300000
	1.0000000	-0.7398098	0.0006793	
8	2.2608696	-1.7398098	0.0006793	2.260870
	1.0000000	-0.7695312	0.0003005	
9	2.2307692	-1.7695312	0.0003005	2.230769
	1.0000000	-0.7932381	0.0001347	
10	2.2068966	-1.7932381	0.0001347	2.206897
	1.0000000	-0.8125610	0.0000610	
20	2.1016949	-1.8983051	0.0000001	2.101695
	1.0000000	-0.9032258	0.0000000	
40	2.0504202	-1.9495798	0.0000000	2.050420
	1.0000000	-0.9508197	0.0000000	
60	2.0335196	-1.9664804	0.0000000	2.033520
	1.0000000	-0.9670330	0.0000000	
80	2.0251046	-1.9748954	0.0000000	2.025105
	1.0000000	-0.9752066	0.0000000	
100	2.0200669	-1.9799331	0.0000000	2.020067
	1.0000000	-0.9801325	0.0000000	
150	2.0133630	-1.9866370	0.0000000	2.013363
	1.0000000	-0.9867257	0.0000000	
300	2.0066741	-1.9933259	0.0000000	2.006674
	1.0000000	-0.9933481	0.0000000	

```
|449 |  2.0044577 |  -1.9955423 |  0.0000000 ||  2.004458  |
|    |  1.0000000 |  -0.9955523 |  0.0000000 ||            |

ans =

    2.0045
```

(4)

ŠPATNÁ VOLBA $y^{(0)}$

+ ZAOKROUHLOVACÍ CHYBY

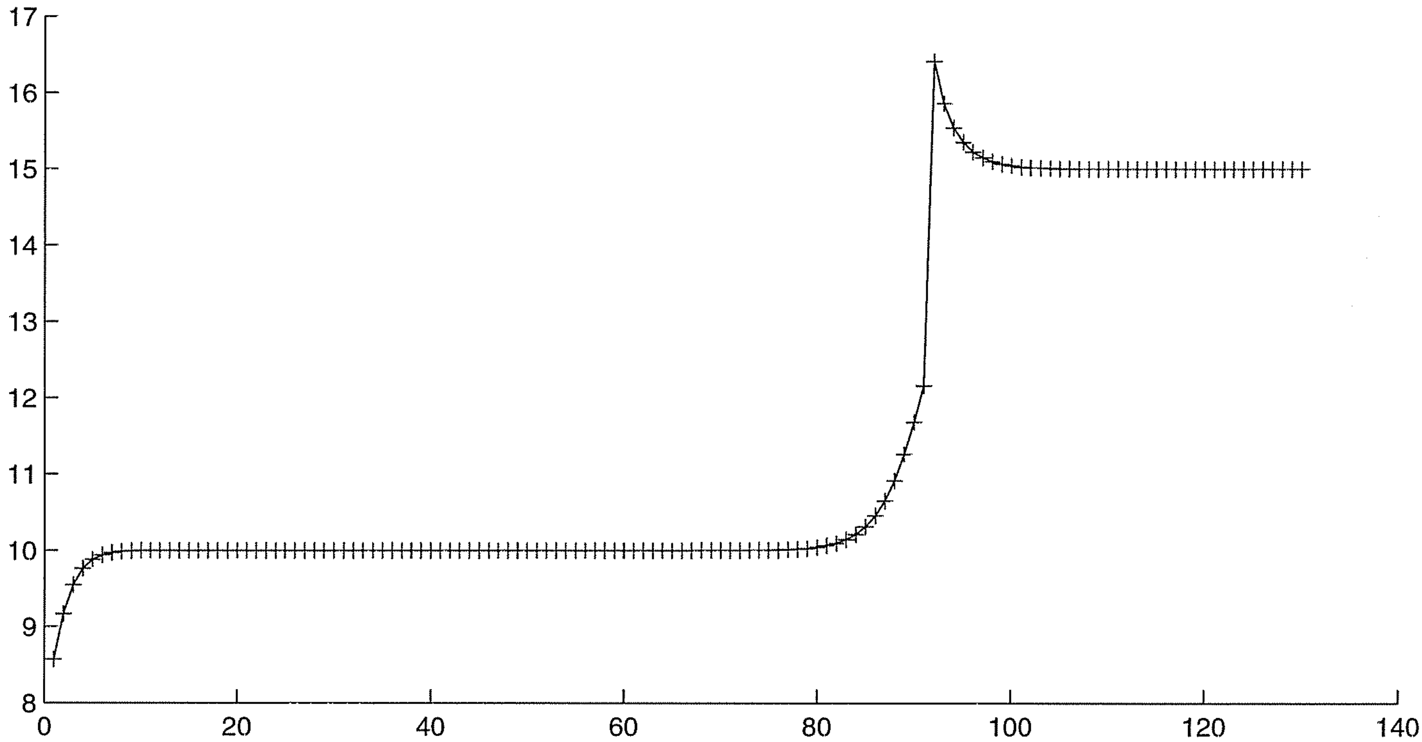
```
A =
     9    -2    -2
    -4     7     2
    -3    -1    14

v =
    0.6667    1.0000   -0.5000
    1.0000   -1.0000    0.5000
    0.3333    0.5000    1.0000

c =
    5.0000         0         0
         0   10.0000         0
         0         0   15.0000

alfa =
     3     5     0

y =
    7.0000
   -2.0000
    3.5000
```

Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A
s normovanim vlastniho vektoru v kazde iteraci

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	lambda_k
0	7.0000000	-2.0000000	3.5000000	
1	60.0000000	-35.0000000	30.0000000	8.571429
	1.0000000	-0.5833333	0.5000000	
2	9.1666667	-7.0833333	4.5833333	9.166667
	1.0000000	-0.7727273	0.5000000	
3	9.5454545	-8.4090909	4.7727273	9.545455
	1.0000000	-0.8809524	0.5000000	
4	9.7619048	-9.1666667	4.8809524	9.761905
	1.0000000	-0.9390244	0.5000000	
5	9.8780488	-9.5731707	4.9390244	9.878049
	1.0000000	-0.9691358	0.5000000	
6	9.9382716	-9.7839506	4.9691358	9.938272
	1.0000000	-0.9844720	0.5000000	
7	9.9689441	-9.8913043	4.9844720	9.968944
	1.0000000	-0.9922118	0.5000000	
8	9.9844237	-9.9454829	4.9922118	9.984424
	1.0000000	-0.9960998	0.5000000	
9	9.9921997	-9.9726989	4.9960998	9.992200
	1.0000000	-0.9980484	0.5000000	
10	9.9960968	-9.9863388	4.9980484	9.996097
	1.0000000	-0.9990238	0.5000000	
11	9.9980476	-9.9931667	4.9990238	9.998048
	1.0000000	-0.9995118	0.5000000	
12	9.9990236	-9.9965827	4.9995118	9.999024
	1.0000000	-0.9997559	0.5000000	
13	9.9995118	-9.9982912	4.9997559	9.999512
	1.0000000	-0.9998779	0.5000000	
14	9.9997559	-9.9991455	4.9998779	9.999756
	1.0000000	-0.9999390	0.5000000	
15	9.9998779	-9.9995728	4.9999390	9.999878
	1.0000000	-0.9999695	0.5000000	
16	9.9999390	-9.9997864	4.9999695	9.999939
	1.0000000	-0.9999847	0.5000000	
17	9.9999695	-9.9998932	4.9999847	9.999969
	1.0000000	-0.9999924	0.5000000	
18	9.9999847	-9.9999466	4.9999924	9.999985
	1.0000000	-0.9999962	0.5000000	
19	9.9999924	-9.9999733	4.9999962	9.999992

	1.0000000	-0.9999981	0.5000000	
20	9.9999962	-9.9999866	4.9999981	9.999996
	1.0000000	-0.9999990	0.5000000	
21	9.9999981	-9.9999933	4.9999990	9.999998
	1.0000000	-0.9999995	0.5000000	
22	9.9999990	-9.9999967	4.9999995	9.999999
	1.0000000	-0.9999998	0.5000000	
23	9.9999995	-9.9999983	4.9999998	10.000000
	1.0000000	-0.9999999	0.5000000	
24	9.9999998	-9.9999992	4.9999999	10.000000
	1.0000000	-0.9999999	0.5000000	
25	9.9999999	-9.9999996	4.9999999	10.000000
.				
.				
.				
50	10.0000002	-10.0000002	4.9999984	10.000000
	1.0000000	-1.0000000	0.4999998	
60	10.0000132	-10.0000132	4.9999078	10.000013
	1.0000000	-1.0000000	0.4999901	
70	10.0007596	-10.0007596	4.9946829	10.000760
	1.0000000	-1.0000000	0.4994304	
80	10.0434279	-10.0434279	4.6960049	10.043428
	1.0000000	-1.0000000	0.4675699	
90	11.6782756	-11.6782756	-6.7479292	11.678276
	1.0000000	-1.0000000	-0.5778190	
100	7.7380143	-7.7380143	-15.0432753	15.043275
	0.5143836	-0.5143836	-1.0000000	
110	7.5040927	-7.5040927	-15.0007441	15.000744
	0.5002480	-0.5002480	-1.0000000	
120	7.5000710	-7.5000710	-15.0000129	15.000013
	0.5000043	-0.5000043	-1.0000000	
130	7.5000012	-7.5000012	-15.0000002	15.000000
	0.5000001	-0.5000001	-1.0000000	

(4)



(5)

SHODA V POSLOUPNOSTI $\lambda^{(k)}$

Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

```
A =
     3     3     0
     0     4     2
     0     0     1
```

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	lambda_k
0	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	
1	6.000000e+00	6.000000e+00	1.000000e+00	6.0000000
2	3.600000e+01	2.600000e+01	1.000000e+00	6.0000000

```
c =
    1.0000    1.0000    1.0000
         0    0.3333   -0.6667
         0         0    1.0000
v =
     3     0     0
     0     4     0
     0     0     1

c\y0 =
    -5
     5
     1
```

****

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	lambda_k
0	1.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	
1	3.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	3.0000000
2	1.500000e+01	1.000000e+01	1.000000e+00	5.0000000
3	7.500000e+01	4.200000e+01	1.000000e+00	5.0000000

```
c\y0 =
    -2
     2
     1
```

****

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	lambda_k
0	3.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	
1	1.500000e+01	1.000000e+01	1.000000e+00	5.0000000
2	7.500000e+01	4.200000e+01	1.000000e+00	5.0000000

```
c\y0 =
    -6
     8
     1
```

****

5

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	lambda_k
0	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	
1	6.000000e+00	6.000000e+00	1.000000e+00	6.0000000
2	3.600000e+01	2.600000e+01	1.000000e+00	6.0000000
3	1.860000e+02	1.060000e+02	1.000000e+00	5.1666667
4	8.760000e+02	4.260000e+02	1.000000e+00	4.7096774
5	3.906000e+03	1.706000e+03	1.000000e+00	4.4589041
6	1.683600e+04	6.826000e+03	1.000000e+00	4.3102919
7	7.098600e+04	2.730600e+04	1.000000e+00	4.2163222
8	2.948760e+05	1.092260e+05	1.000000e+00	4.1540022
9	1.212306e+06	4.369060e+05	1.000000e+00	4.1112400
10	4.947636e+06	1.747626e+06	1.000000e+00	4.0811775
11	2.008579e+07	6.990506e+06	1.000000e+00	4.0596733

****

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	lambda_k
0	1.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	
1	3.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	3.0000000
2	1.500000e+01	1.000000e+01	1.000000e+00	5.0000000
3	7.500000e+01	4.200000e+01	1.000000e+00	5.0000000
4	3.510000e+02	1.700000e+02	1.000000e+00	4.6800000
5	1.563000e+03	6.820000e+02	1.000000e+00	4.4529915
6	6.735000e+03	2.730000e+03	1.000000e+00	4.3090211
7	2.839500e+04	1.092200e+04	1.000000e+00	4.2160356
8	1.179510e+05	4.369000e+04	1.000000e+00	4.1539356
9	4.849230e+05	1.747620e+05	1.000000e+00	4.1112242
10	1.979055e+06	6.990500e+05	1.000000e+00	4.0811737
11	8.034315e+06	2.796202e+06	1.000000e+00	4.0596724

****

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	lambda_k
0	3.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	
1	1.500000e+01	1.000000e+01	1.000000e+00	5.0000000
2	7.500000e+01	4.200000e+01	1.000000e+00	5.0000000
3	3.510000e+02	1.700000e+02	1.000000e+00	4.6800000
4	1.563000e+03	6.820000e+02	1.000000e+00	4.4529915
5	6.735000e+03	2.730000e+03	1.000000e+00	4.3090211
6	2.839500e+04	1.092200e+04	1.000000e+00	4.2160356
7	1.179510e+05	4.369000e+04	1.000000e+00	4.1539356
8	4.849230e+05	1.747620e+05	1.000000e+00	4.1112242
9	1.979055e+06	6.990500e+05	1.000000e+00	4.0811737
10	8.034315e+06	2.796202e+06	1.000000e+00	4.0596724
11	3.249155e+07	1.118481e+07	1.000000e+00	4.0440972

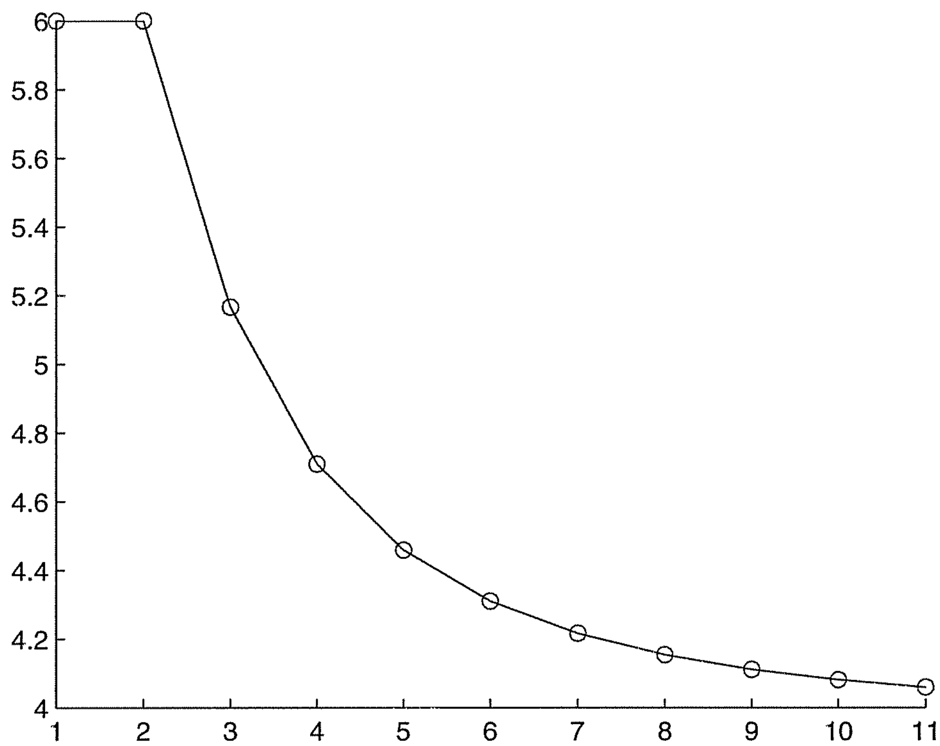
****

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	lambda_k
0	1.000000e+01	4.000000e+00	1.000000e+00	
1	4.200000e+01	1.800000e+01	1.000000e+00	4.2000000
2	1.800000e+02	7.400000e+01	1.000000e+00	4.2857143
3	7.620000e+02	2.980000e+02	1.000000e+00	4.2333333
4	3.180000e+03	1.194000e+03	1.000000e+00	4.1732283
5	1.312200e+04	4.778000e+03	1.000000e+00	4.1264151
6	5.370000e+04	1.911400e+04	1.000000e+00	4.0923640
7	2.184420e+05	7.645800e+04	1.000000e+00	4.0678212
8	8.847000e+05	3.058340e+05	1.000000e+00	4.0500453
9	3.571602e+06	1.223338e+06	1.000000e+00	4.0370770
10	1.438482e+07	4.893354e+06	1.000000e+00	4.0275540

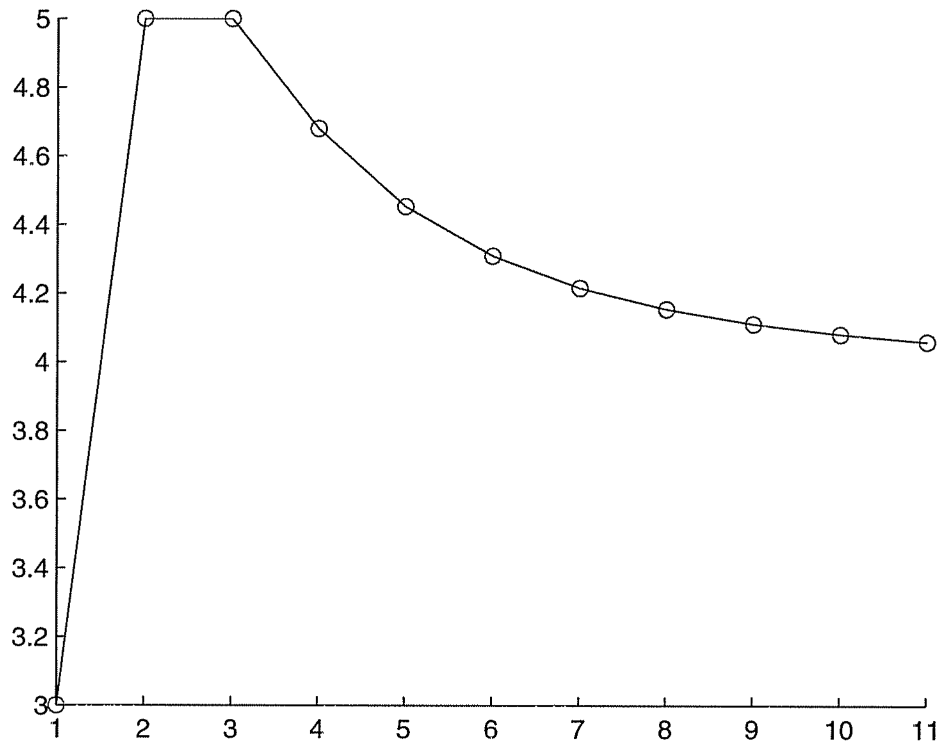
c\y0 =

-5
14
1

5



5



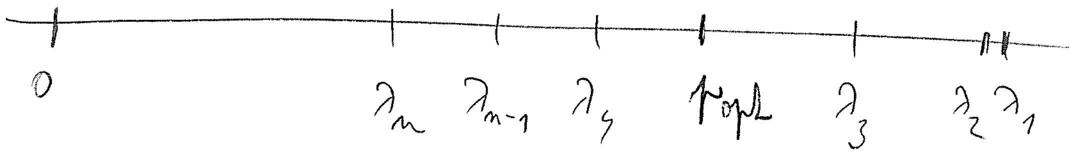
⑥ URYCHLOVÁNÍ KONVERGENCE

- lze použít např. Aitkenův proces
- Pokud platí, že λ_1 a λ_2 jsou si velmi blízká, rychlost konvergence mocninné metody bude malá. Předpokládáme-li např., že jsou všechna vl. čísla reálná lze použít Wilkinsonovu metodu

A ... vl. čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$

$\hat{A} = A - pI$ ... vl. čísla $\lambda_1 - p, \lambda_2 - p, \dots \lambda_n - p$

Uvažujme pro jednoduchost, že jsou všechna $\lambda_i > 0$



Pomalou konvergenci způsobuje podíl $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| \lesssim 1$.

Chci podíl co nejvíce zmenšit: $\frac{\lambda_2 - p}{\lambda_1 - p} < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

? volba p

$$\left(p_{opt} = \frac{\lambda_2 + \lambda_n}{2}\right)$$

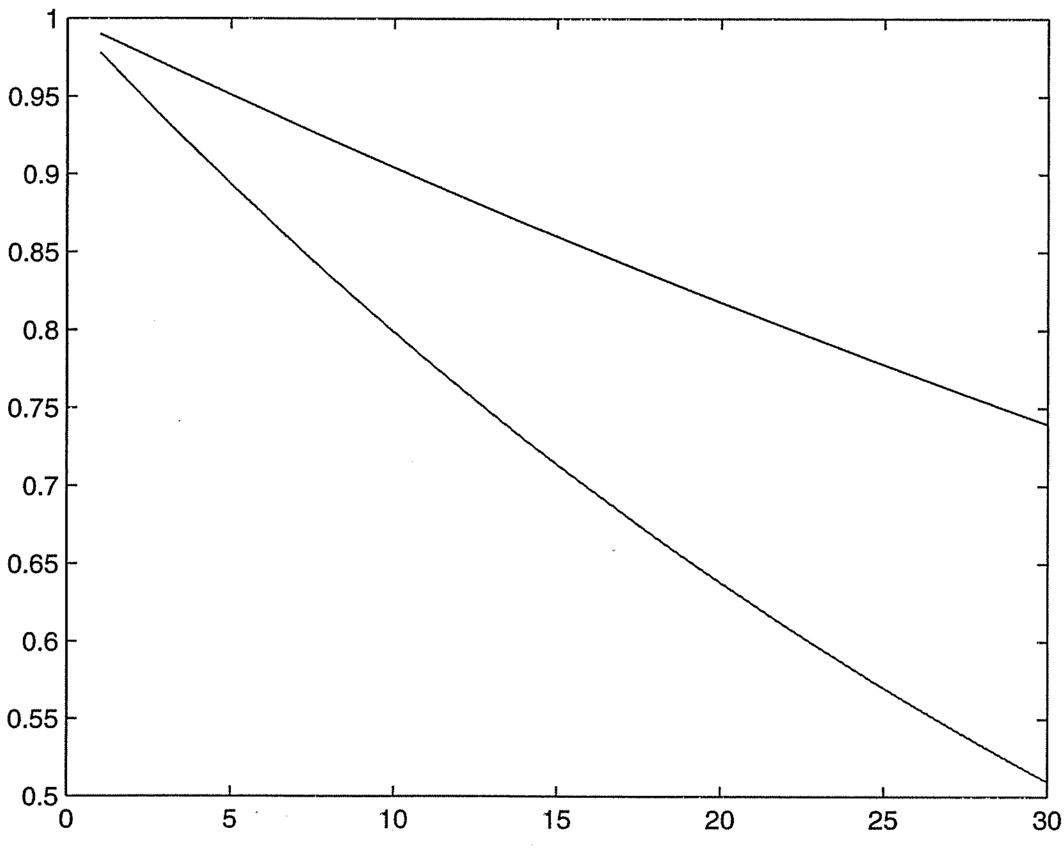
př: $A = \begin{bmatrix} 100 & & \\ & 99 & \\ & & 11 \end{bmatrix}$ ... vl. čísla $\lambda_1 = 100, \lambda_2 = 99, \lambda_3 = 11$

$p_{opt} = \frac{99+11}{2} = 55$

$\hat{A} = A - 55I = \begin{bmatrix} 45 & & \\ & 44 & \\ & & -44 \end{bmatrix}$ ... vl. čísla $\hat{\lambda}_1 = 45, \hat{\lambda}_2 = 44, \hat{\lambda}_3 = -44$

$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{99}{100} = 0{,}99; \quad \frac{\hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_1} = \frac{44}{45} \doteq 0{,}9778$

```
 mocniny cisel a, b

a =
    0.9900

b =
    0.9778


vysl =
    1.0000    0.9900    0.9778
    2.0000    0.9801    0.9560
    3.0000    0.9703    0.9348
    4.0000    0.9606    0.9140
    5.0000    0.9510    0.8937
    6.0000    0.9415    0.8739
    7.0000    0.9321    0.8544
    8.0000    0.9227    0.8355
    9.0000    0.9135    0.8169
   10.0000    0.9044    0.7987
   11.0000    0.8953    0.7810
   12.0000    0.8864    0.7636
   13.0000    0.8775    0.7467
   14.0000    0.8687    0.7301
   15.0000    0.8601    0.7138
   16.0000    0.8515    0.6980
   17.0000    0.8429    0.6825
   18.0000    0.8345    0.6673
   19.0000    0.8262    0.6525
   20.0000    0.8179    0.6380
   21.0000    0.8097    0.6238
   22.0000    0.8016    0.6099
   23.0000    0.7936    0.5964
   24.0000    0.7857    0.5831
   25.0000    0.7778    0.5702
   26.0000    0.7700    0.5575
   27.0000    0.7623    0.5451
   28.0000    0.7547    0.5330
   29.0000    0.7472    0.5212
   30.0000    0.7397    0.5096
```



Metoda Rayleighova podílu

Pro použití metody Rayleighova podílu budeme navíc předpokládat, že matice $\mathbf{A}$ je symetrická (reálná). Potom musí být vlastní vektory ortonormální $\left(\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j = 0 \text{ pro } i \neq j \quad \text{a} \quad \mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i = 1\right)$.

Odvození: 6. krok z odvození mocninné metody nahradíme vyjádřením součinu $\mathbf{y}^{(k)^T}\mathbf{y}^{(k)}$

$$\mathbf{y}^{(k)^T}\mathbf{y}^{(k)} = \lambda_1^k\Big[\alpha_1\mathbf{v}_1^T + \overbrace{\sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_i^T}^{\varepsilon_k^T}\Big] \cdot \lambda_1^k\Big[\alpha_1\mathbf{v}_1 + \overbrace{\sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_i}^{\varepsilon_k}\Big] =$$

$$= \lambda_1^{2k}\Big[\alpha_1^2 + \underbrace{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k}}_{\varepsilon_k^T\varepsilon_k}\Big]$$

a součinu $\mathbf{y}^{(k)^T}\mathbf{y}^{(k+1)^T}$

$$\mathbf{y}^{(k)^T}\mathbf{y}^{(k+1)} = \lambda_1^k\Big[\alpha_1\mathbf{v}_1^T + \overbrace{\sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_i^T}^{\varepsilon_k^T}\Big] \cdot \lambda_1^{k+1}\Big[\alpha_1\mathbf{v}_1 + \overbrace{\sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} \mathbf{v}_i}^{\varepsilon_{k+1}}\Big] =$$

$$= \lambda_1^{2k+1}\Big[\alpha_1^2 + \underbrace{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k+1}}_{\varepsilon_k^T\varepsilon_{k+1}}\Big]$$

Dostáváme:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{y}^{(k)^{\mathrm{T}}}\mathbf{A}\mathbf{y}^{(k)}}{\mathbf{y}^{(k)^{\mathrm{T}}}\mathbf{y}^{(k)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{y}^{(k)^{\mathrm{T}}}\mathbf{y}^{(k+1)}}{\mathbf{y}^{(k)^T}\mathbf{y}^{(k)}} = \frac{\lambda_1^{2k+1}(\alpha_1^2 + \overbrace{\varepsilon_k^T\varepsilon_{k+1}}^{\to 0})}{\lambda_1^{2k}(\alpha_1^2 + \underbrace{\varepsilon_k^T\varepsilon_k}_{\to 0})} = \lambda_1.$$

Poznámka: Součin $\varepsilon_k^T \varepsilon_k$ konverguje k nule (pro $k \to \infty$) zhruba dvakrát rychleji než ε_k k nulovému vektoru $\Rightarrow$ metoda Rayleighova podílu bude rychlejší než mocninná metoda.

Příklad: Metodou Rayleighova podílu určete dominantní vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{y}^{(0)} = [1; 1; 1]^T.$$

Řešení:

$$\mathbf{y}^{(1)} = [2; 3; 2]^T \qquad \lambda_1^{(1)} = \frac{\mathbf{y}^{(0)T}\mathbf{y}^{(1)}}{\mathbf{y}^{(0)T}\mathbf{y}^{(0)}} = \tfrac{7}{3} \approx 2,3333,$$

$$\mathbf{y}^{(2)} = [5; 7; 5]^T \qquad \lambda_1^{(2)} = \tfrac{41}{17} \approx 2,4117,$$

$$\mathbf{y}^{(3)} = [12; 17; 12]^T \quad \lambda_1^{(3)} = \tfrac{60+119+60}{25+49+25} = \tfrac{239}{99} \approx \underline{\underline{2,41417.}}$$

SROVNÁNÍ MOCNINNÉ METODY A METODY RAYLEIGHO-VA PODÍLU

```
A =
     8     1     1     1
     1     7     1     1
     1     1     6     1
     1     1     1     5

v =
   -0.0992    0.1956   -0.6925   -0.6872
   -0.1574    0.5175    0.6714   -0.5066
   -0.3810   -0.8018    0.2261   -0.4011
    0.9057   -0.2259    0.1359   -0.3320

c =
    4.2961         0         0         0
         0    5.3923         0         0
         0         0    6.5077         0
         0         0         0    9.8039

y =
     1
     1
     1
     1

v\y =
    0.2682
   -0.3145
    0.3409
   -1.9269
```

Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A
s normovanim vlastniho vektoru v kazde iteraci

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	y(4)_k	lambda_k
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	
1	11.0000000	10.0000000	9.0000000	8.0000000	11.000000
	1.0000000	0.9090909	0.8181818	0.7272727	
2	10.4545455	8.9090909	7.5454545	6.3636364	10.454545
	1.0000000	0.8521739	0.7217391	0.6086957	
3	10.1826087	8.2956522	6.7913043	5.6173913	10.182609
	1.0000000	0.8146883	0.6669513	0.5516652	
4	10.0333049	7.9214347	6.3680615	5.2399658	10.033305
	1.0000000	0.7895140	0.6346923	0.5222572	
5	9.9464635	7.6835475	6.1199251	5.0354924	9.946464
	1.0000000	0.7724904	0.6152865	0.5062596	
6	9.8940365	7.5289789	5.9704692	4.9190748	9.894037
	1.0000000	0.7609613	0.6034412	0.4971757	
7	9.8615782	7.4273460	5.8787842	4.8502811	9.861578
	1.0000000	0.7531600	0.5961302	0.4918362	
8	9.8411263	7.3600862	5.8217771	4.8084711	9.841126
	1.0000000	0.7478906	0.5915763	0.4886098	
9	9.8280768	7.3154206	5.7859583	4.7825161	9.828077
	1.0000000	0.7443390	0.5887172	0.4866177	
10	9.8196739	7.2857077	5.7632601	4.7661447	9.819674
	1.0000000	0.7419501	0.5869095	0.4853669	
11	9.8142265	7.2659269	5.7487741	4.7556941	9.814226
	1.0000000	0.7403464	0.5857593	0.4845715	
12	9.8106771	7.2527553	5.7394734	4.7489630	9.810677
	1.0000000	0.7392716	0.5850232	0.4840607	
13	9.8083555	7.2439853	5.7334713	4.7445982	9.808355
	1.0000000	0.7385525	0.5845497	0.4837302	
14	9.8068324	7.2381473	5.7295810	4.7417534	9.806832
	1.0000000	0.7380719	0.5842438	0.4835153	
15	9.8058310	7.2342623	5.7270499	4.7398921	9.805831
	1.0000000	0.7377511	0.5840453	0.4833749	
16	9.8051713	7.2316777	5.7253980	4.7386707	9.805171

	1.0000000	0.7375371	0.5839162	0.4832828	
17	9.8047361	7.2299587	5.7243169	4.7378673	9.804736
	1.0000000	0.7373945	0.5838318	0.4832223	
18	9.8044487	7.2288158	5.7236078	4.7373379	9.804449
	1.0000000	0.7372996	0.5837766	0.4831825	
19	9.8042587	7.2280561	5.7231417	4.7369886	9.804259
	1.0000000	0.7372364	0.5837404	0.4831562	
20	9.8041330	7.2275512	5.7228349	4.7367579	9.804133
	1.0000000	0.7371943	0.5837166	0.4831389	
21	9.8040498	7.2272158	5.7226326	4.7366053	9.804050
	1.0000000	0.7371664	0.5837009	0.4831274	
22	9.8039947	7.2269929	5.7224992	4.7365044	9.803995
	1.0000000	0.7371478	0.5836906	0.4831198	
23	9.8039582	7.2268448	5.7224110	4.7364376	9.803958
	1.0000000	0.7371354	0.5836837	0.4831148	
24	9.8039340	7.2267465	5.7223527	4.7363933	9.803934
	1.0000000	0.7371272	0.5836792	0.4831115	
25	9.8039180	7.2266812	5.7223141	4.7363640	9.803918
	1.0000000	0.7371218	0.5836763	0.4831093	
26	9.8039073	7.2266379	5.7222886	4.7363445	9.803907
	1.0000000	0.7371181	0.5836743	0.4831078	
27	9.8039003	7.2266091	5.7222717	4.7363316	9.803900
	1.0000000	0.7371157	0.5836730	0.4831069	

```
ans =

    9.8039
```

Metoda Rayleighova podilu pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A
s normovanim vlastniho vektoru v kazde iteraci

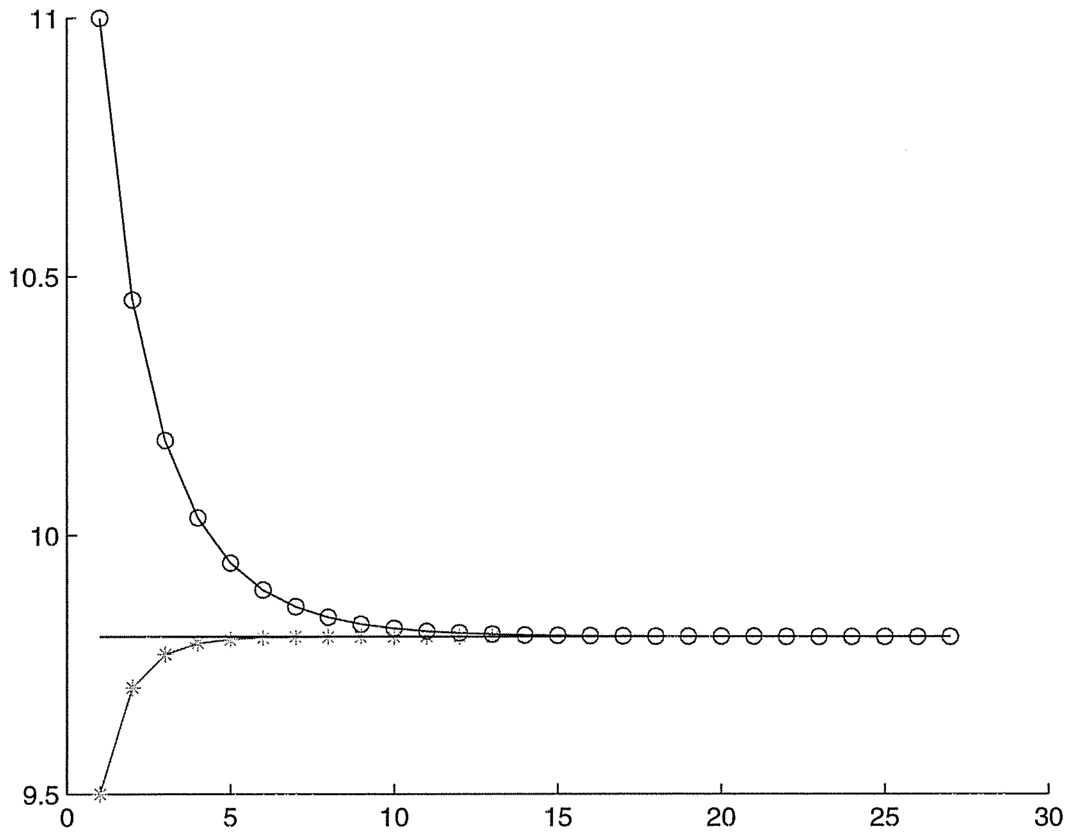
A =

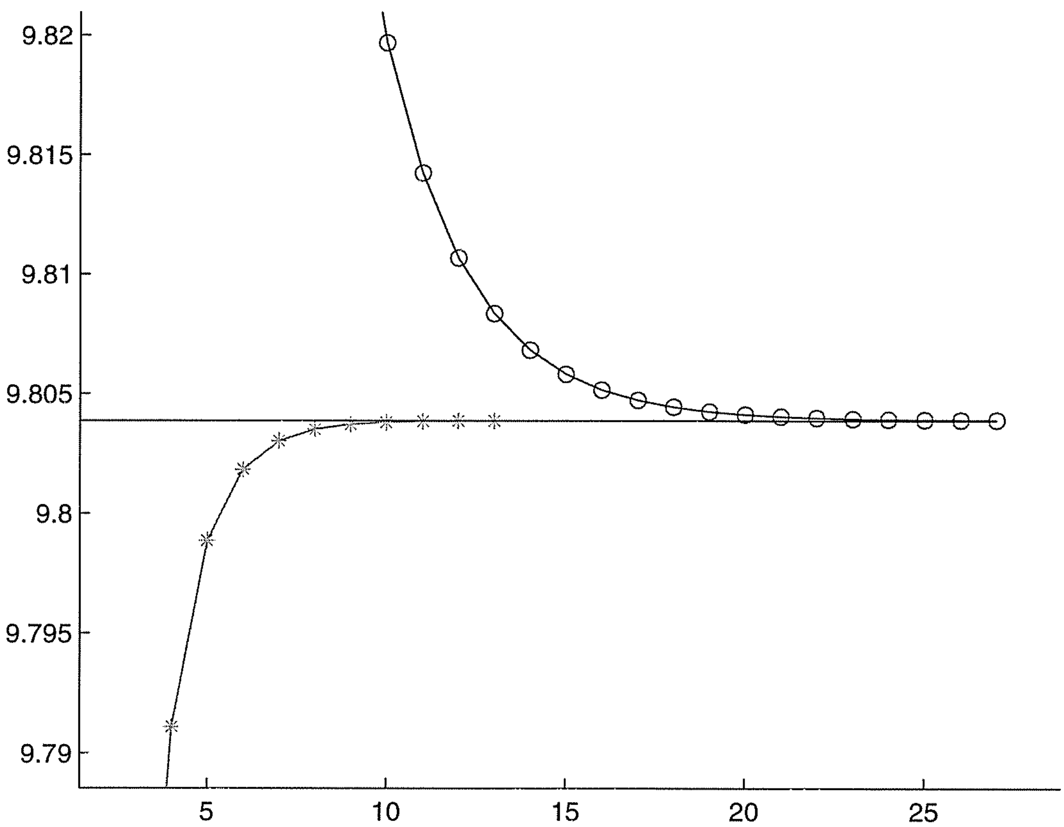
8	1	1	1
1	7	1	1
1	1	6	1
1	1	1	5

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	y(4)_k	lambda_k
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	
1	11.0000000	10.0000000	9.0000000	8.0000000	9.500000
	0.5749792	0.5227084	0.4704375	0.4181667	
2	6.0111463	5.1225421	4.3384795	3.6589586	9.704918
	0.6180831	0.5267143	0.4460947	0.3762245	
3	6.2936981	5.1274022	4.1975903	3.4720145	9.769484
	0.6437727	0.5244741	0.4293650	0.3551470	
4	6.4591674	5.0996031	4.0995839	3.3733468	9.791097
	0.6595354	0.5207125	0.4186021	0.3444471	
5	6.5600452	5.0675719	4.0363075	3.3210857	9.798875
	0.6694068	0.5171103	0.4118770	0.3388936	
6	6.6231351	5.0399495	3.9966725	3.2928620	9.801848
	0.6756777	0.5141646	0.4077317	0.3359305	
7	6.6632482	5.0184918	3.9721632	3.2772266	9.803036
	0.6797024	0.5119246	0.4051911	0.3343022	
8	6.6890372	5.0026682	3.9570759	3.2683293	9.803525
	0.6823050	0.5102895	0.4036355	0.3333809	
9	6.7057461	4.9913482	3.9477884	3.2631347	9.803731
	0.6839975	0.5091260	0.4026811	0.3328453	
10	6.7166326	4.9834060	3.9420557	3.2600312	9.803819
	0.6851029	0.5083121	0.4020934	0.3325263	
11	6.7237548	4.9779075	3.9385017	3.2581397	9.803857
	0.6858272	0.5077496	0.4017296	0.3323323	
12	6.7284288	4.9741365	3.9362867	3.2569677	9.803874
	0.6863029	0.5073643	0.4015031	0.3322123	
13	6.7315032	4.9715684	3.9348982	3.2562317	9.803881
	0.6866161	0.5071020	0.4013613	0.3321370	

ans =

9.8039


11
10.5
10
9.5
0
5
10
15
20
25
30


9.82
9.815
9.81
9.805
9.8
9.795
9.79
5
10
15
20
25

Poznámka Pokud jsem vypočítal λ_1, v_1 a chci
znát další vl. čísla, resp. vektory λ_2, v_2; λ_3, v_3 …
(ovšem ne všechny) mohu použít metody
využívající znalosti λ_1, v_1 atd.

→ MATICOVÁ REDUKCE

Věta Nechť λ_1 je vl. číslo matice A a v_1 jemu odpovídající vl. vektor. Nechť w je libovolný vektor, pro který $w^T v_1 = 1$. Pak matice

$$\boxed{W_1 = A - \lambda_1 v_1 w^T}$$

má stejná vl. čísla jako matice A, s výjimkou vl. čísla λ_1, které je nahrazeno 0. (W_1 … redukovaná matice)

? volba vektoru w ?

1) Hotellingova redukce

w … levý vlastní vektor vl. čísla λ_1 (je normalizován: $w^T v_1 = 1$)

obvykle neznáme a musí být $w^T v_1 = 0$, užijeme tuto metodu pro symetrické mat., protože potom $w = v_1$

2) Wielandtova redukce

3) podobnostní redukce

→ ANIHILAČNÍ POSTUPY

Je-li w lib. vektor a λ_1, v_1 … vl. číslo a vektor matice A, pak vektor

$$u = (A - \lambda_1 I)\, w$$

nemá složku ve směru vektoru v_1.

- Použijeme-li u jako ostup do mocninné metody získáme λ_2, v_2. (Problém se zaokrouhlovacími chybami)
- Abychom odstranili tento problém, odbouráváme stále složku ve směru v_1

$$u = (A - \lambda_1 I)\, w$$

Metody na řešení **úplného problému** - charakteristika:

1) metody založené na výpočtech vlastních čísel

   pomocí charakteristického polynomu

   Nevýhodné pro velká n (řád matice $\mathbf{A}$),

   protože je obtížné vypočítat

   $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ z definice determinantu.

2) metody využívající podobnosti matic

   Tato kategorie metod využívá faktu, že podobné matice mají stejná vlastní čísla.

   Princip: konstruujeme posloupnost navzájem podobných matic, která konverguje k matici, jejíž vlastní čísla se dají jednoduchým způsobem určit.

3) smíšené metody

   založené na převodu obecné matice na matici třídiagonální (např. Givensova, Householderova a Lanczosova metoda) a následný efektivní výpočet kořenů charakteristického polynomu této upravené matice.

EFEKTIVNÍ VÝPOČET CHARAKTERISTICKÉHO POLYNOMU PRO TŘÍDIAGONÁLNÍ MATICI

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

$$f_{-1}(\lambda) = 0$$

$$f_0(\lambda) = 1$$

$$f_k(\lambda) = (a_k - \lambda) f_{k-1}(\lambda) - b_k c_{k-1} f_{k-2}(\lambda)$$

$$k = 1, 2, \dots n$$

$$f_n(\lambda) = p_A(\lambda)$$

$$\underbrace{A-\lambda I}_{=M} = \begin{bmatrix} a_1-\lambda & c_1 & & & & \\ b_2 & a_2-\lambda & c_2 & & & \\ & b_3 & a_3-\lambda & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1}-\lambda & c_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n-\lambda \end{bmatrix}$$

rozvoj podle posl. řádku:

$$\det M = (a_n-\lambda)\cdot \det(M_{n-1}) - b_n\cdot c_{n-1}\cdot \det(M_{n-2})$$

(M_{n-1} .. prvních $n-1$ řádků a sloupců z M)

$M_1 = a_1-\lambda \quad = \det(M_1)$

$M_0 = 1$

$M_{-1} = 0$

Podstata výpočtu vl. čísel třídiagonální matice pomocí jednoduchého vyjadřování hodnoty charakteristického polynomu metodou bisekce:

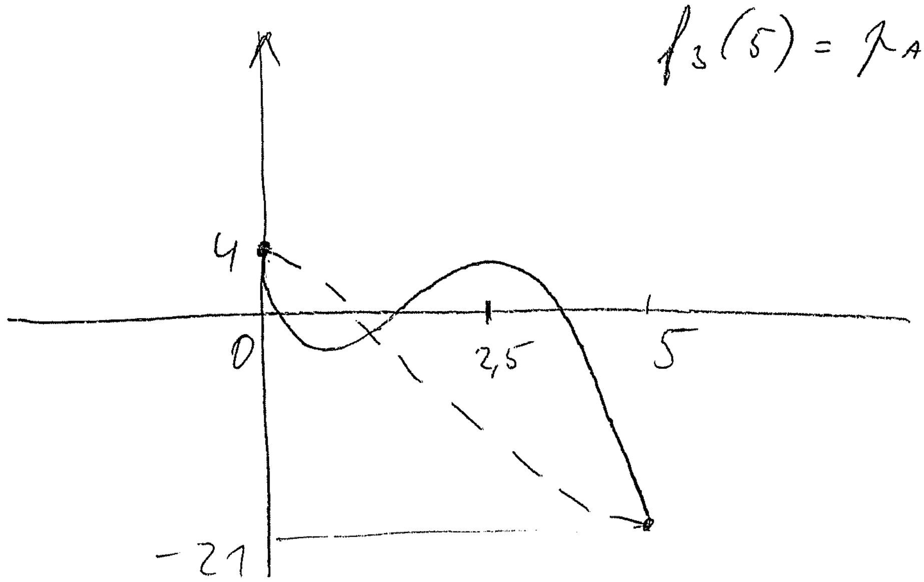
Příklad:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

zvolíme interval $\langle 0,5 \rangle$ ... (v něm očekáváme všechna vlastní čísla)

výpočtem snadno ověříme

$$f_3(0) = p_A(0) = 4$$
$$f_3(5) = p_A(5) = -21$$



Metoda LU-rozkladu
(LR-transformace, LR-algoritmus)

$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ …rozklad matice $\mathbf{A}$ na dolní trojúhelníkovou matici $\mathbf{L}$ a horní trojúhelníkovou matici $\mathbf{U}$, kde na diagonále matice $\mathbf{L}$ jsou pro jednoznačnost rokladu jednotky. Sestrojíme matici $\mathbf{B}$, která bude podobná matici $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{B} = \mathbf{UL} \qquad (\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{UL} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{AL}).$$

<u>Postup:</u>

Sestrojíme posloupnost matic $\mathbf{A}_k$:

(i) $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$, $k = 0$

(ii) provedeme LU rozklad matice $\mathbf{A}_k = \mathbf{L}_k\mathbf{U}_k$

(iii) sestrojíme matici $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{U}_k\mathbf{L}_k$

(iv) je-li matice $\mathbf{A}_{k+1}$ horní trojúhelníková $\Rightarrow$ konec,
jinak $k = k + 1$ a jdi na (ii)

Poznámka: Dá se ukázat, že když matice $\mathbf{B}_k = \mathbf{L}_0\mathbf{L}_1 \dots \mathbf{L}_k$ konvergují k regulární matici, potom matice $\mathbf{A}_k$ také konvergují, a to k horní trojúhelníkové matici s vlastními čísly na diagonále. Platí

$$\mathbf{A}_{k+1} = \underbrace{\mathbf{L}_k^{-1}\mathbf{A}_k}_{\mathbf{U}_k}\mathbf{L}_k$$

a tedy

$$\mathbf{A}_{k+1} = \underbrace{\mathbf{L}_k^{-1}\mathbf{L}_{k-1}^{-1} \dots \mathbf{L}_0^{-1}}_{\mathbf{B}_{k+1}^{-1}}\mathbf{A}_0\underbrace{\mathbf{L}_0\mathbf{L}_1 \dots \mathbf{L}_k}_{\mathbf{B}_{k+1}}$$

<u>Pozn:</u> Matice B_k konvergují k matici, jejíž sloupce tvoří vl. vektory matice A
Pro sym. matici A je důkaz zřejmý

$$B_{k+1} \underset{\substack{\downarrow \\ \Lambda}}{A_{k+1}} = A\, B_{k+1}$$

Poznámka: Je-li matice $\mathbf{A}$ symetrická a pozitivně definitní, provádíme LU-rozklad ve smyslu Choleského rozkladu ($\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$). Potom lze ukázat, že $\mathbf{A}_k$ konverguje k diagonální matici.

Nevýhody:

- pomalá konvergence posloupnosti $\mathbf{A_k}$
- velký počet operací pro matice větších řádů
- nelze realizovat pro obecné matice $\mathbf{A}$

Poznámka: Jestliže pro dostatečně velké k je $\mathbf{A}_k$ horní trojúhelníková matice, potom vlastní vektory jsou (přibližně) sloupce matice $\mathbf{B}_k = \mathbf{L}_0\mathbf{L}_1 \dots \mathbf{L}_{k-1}$.

Metody ortogonálních transformací

Použijeme podobný princip jako v předchozím případě, tj. sestrojíme posloupnost podobných matic $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \ldots$ tak, že

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{Q}_k, \quad k = 0, 1, 2 \ldots.$$

Požadujeme, aby posloupnost $\mathbf{A}_k$ konvergovala k matici, jejíž vlastní čísla lehce určíme. Ortogonální matici $\mathbf{Q}_k$ vybíráme speciálním postupem. Výhodou tohoto algoritmu je *numerická stabilita*.

Poznámka: Pro obecnou matici používáme metodu *QU-rozkladu* (*QR-transformace*).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{QU} \quad & \mathbf{Q} \ldots \text{ ortogonální matice } (\mathbf{QQ}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}, \text{ tj. } \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{-1}) \\ & \mathbf{U} \ldots \text{ horní trojúhelníková matice} \\ \mathbf{B} = \mathbf{UQ} \quad & (\mathbf{U} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{AQ}). \end{aligned}$$

Motivační příklad:
Příkladem ortogonální matice je matice rovinné rotace o úhel α:

$$\mathbf{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \overset{\text{ozn}}{=} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}.$$

Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stanovte matici $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\alpha)\mathbf{A}\mathbf{Q}(\alpha)$ tak, aby $b_{12} = 0$.

Řešení: Rozepíšeme si prvky matice **B**:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2c+s & c+3s \\ -2s+c & -s+3c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2c^2+cs+cs+3s^2 & -2cs-s^2+c^2+3cs \\ -2cs+c^2-s^2+3cs & 2s^2-cs-cs+3c^2 \end{bmatrix}.$$

Pro splnění podmínky $b_{12} = 0$ musí platit

$$-2cs - s^2 + c^2 + 3cs = cs - s^2 + c^2 = 0,$$

tj.

$$\underbrace{\cos\alpha\sin\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} \underbrace{-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{+\cos 2\alpha} = 0.$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$-2 = \tan 2\alpha$$

$$\underline{\alpha \doteq -0,5535}$$

Po dosazení dostaneme, že

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3,6180 & 0 \\ 0 & 1,3819 \end{bmatrix}.$$

B je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále a stejná vlastní čísla má i matice **A**.

$\square$

Poznámka: Podobně jako v předchozí metodě, pro dostatečně velké k je $\mathbf{A}_k$ horní trojúhelníková matice a vlastní vektory jsou (přibližně) sloupce matice $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_{k-1}$.

Poznámka: Pro symetrickou matici $\mathbf{A}$ vede uvedený postup na tzv. *metodu Jacobiovy diagonalizace*.

Speciální případ QR-transformace

Jacobiova diagonalizace

Věta: Je-li $\mathbf{A}$ reálná symetrická matice, potom existuje ortogonální matice $\mathbf{Q}$ tak, že $\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ (diagonální matice s vlastními čísly na diagonále – *spektrální matice*).

Princip: Matici $\mathbf{Q}$ získáme součinem matic $\mathbf{Q}_{p,q}(\alpha)$, kde

$$
\mathbf{Q}_{p,q}(\alpha) = \begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & \cos\alpha & \dots & \dots & \dots & -\sin\alpha & & & \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
 & & & \sin\alpha & \dots & \dots & \dots & \cos\alpha & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow p\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \\ \leftarrow q\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\uparrow & \uparrow \\
p\text{-tý sloupec} & q\text{-tý sloupec}
\end{array}
$$

a α volíme tak, abychom vynulovali prvek v pozici p, q a tedy i v pozici q, p.

Dcv: $Q_{pq}^T(\alpha) \cdot Q_{pq}(\alpha) = I$

První krok:

$$B \overset{\text{ozn}}{=} \boxed{A_1 = Q_{pq}^T(\alpha)\; A\; Q_{pq}(\alpha)}$$

Cílem je zvolit $Q_{pq}(\alpha)$ tak, abychom v matici A vynulovali prvky v pozicích (p,q) a (q,p)

$$b_{p,q} = \underbrace{\Big[\dots \overset{p}{\cos\alpha} \dots \overset{q}{\sin\alpha} \dots\Big]}_{p\text{-tý řádek } Q_{pq}^T} \cdot A \cdot \underbrace{\Big[\dots \overset{p}{-\sin\alpha} \dots \overset{q}{\cos\alpha} \dots\Big]}_{q\text{-tý sloupec } Q_{pq}}$$

$$b_{p,q} = \underbrace{a_{pq}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + \left(a_{qq} - a_{pp}\right)\cos\alpha \sin\alpha}_{=0}$$

požadujeme, aby $b_{pq} = 0$

$$a_{pq} \cdot \cos 2\alpha + (a_{qq} - a_{pp}) \cdot \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha = 0 \quad /\cdot 2$$

$$2 a_{pq} \cos 2\alpha = -(a_{qq} - a_{pp}) \sin 2\alpha \qquad /: \cos 2\alpha \quad /:(a_{qq} - a_{pp})$$

$$\boxed{-\frac{2 a_{pq}}{a_{qq} - a_{pp}} = \operatorname{tg} 2\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = \dots}$$

Poznámka: nám stačí $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ (α nepotřebujeme)
lze odvodit vzorce pro

$\sin\alpha = \dots$

$\cos\alpha = \dots$

$\mathbf{Q} = \Pi_{p,q}\,\mathbf{Q}_{p,q}(\alpha)$ — postupně vynulujeme všechny nediagonální prvky.

Poznámka: Při výpočtech nemusíme určovat úhel α, ale lze odvodit přímé vzorce.

Poznámka: Zbývá zvolit strategii na volbu indexů p a q. Nejjednodušší je postupně nulovat všechny mimodiagonální prvky (podobně jako v Gaussově eliminační metodě pro řešení soustavy lineárních rovnic). Uvědomme si ale, že se získané nuly z předchozího kroku obecně nezachovají. Další možností je nulovat vždy mimodiagonální prvek, který je největší v absolutní hodnotě (zde je třeba v každé iteraci vyhledat tento prvek, což zpomalí výpočet). Iterační proces zastavíme, je-li norma trojúhelníkové matice pod diagonálou menší než zadaná tolerance.

vl. vektory:

$$A_1 = Q_1^T A Q_1$$
$$A_2 = Q_2^T A_1 Q_2$$
$$\vdots$$
$$A_k = Q_k^T A_{k-1} Q_k$$

$$\Rightarrow A_k = \underbrace{Q_k^T Q_{k-1}^T \cdots Q_1^T}_{P_k^T} A \underbrace{Q_1 Q_2 \cdots Q_k}_{P_k}$$

$$P_k A_k = A P_k$$

$$\downarrow \qquad \qquad \searrow$$

Λ $(k \to \infty)$ $\qquad X$ ... jejíž sloupce jsou vlastní vektory A