SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

Formulace:

Je dána čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n, sloupcový vektor $\mathbf{b}$ o n složkách. Hledáme sloupcový vektor $\mathbf{x}$ o n složkách tak, aby platilo

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

rozepsáno po složkách

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Předpokládáme, že je matice $\mathbf{A}$ regulární.
(tj. soustava má právě jedno řešení)

Máme dva základní typy soustav:

- soustavy s obecnou maticí
- soustavy se speciální maticí
  (symetrická, pozitivně definitní, řídká, pásová apod.)

Pro první skupinu se většinou používají přímé metody, pro druhou skupinu metody iterační nebo speciální modifikace přímých metod.

$\boxed{\text{PRÍMÉ METODY}}$

Cramerovo pravidlo

neznámá $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$

- počet operací: je nutné vypočítat $(n+1)$ determinantů. Pro výpočet determinantu je třeba $n!$ sčítání a v každém sčítanci je $(n-1)$ násobení. Dostáváme:

$$(n+1)\cdot\left[(n-1)(n!)+n!\right] = n\cdot(n+1)!$$

př: pro $n=30$, 10^6 operací za sekundu → výpočet trval $7{,}82\cdot 10^{21}$ let

Další přímé metody vycházejí z faktu, že soustavy

$$\boxed{Ax=b} \quad \text{a} \quad \boxed{TAx=Tb},$$

kde T je regulární matice, mají totéž řešení, tj. jsou ekvivalentní.
Touto transformací lze získat trojúhelníkovou soustavu

$$Ux=y \quad : \quad U=TA, \quad y=Tb$$

př:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Trojúhelníkovou soustavu lze velmi snadno řešit zpětnou substitucí. Realizovaný proces se nazývá zpětný chod.

GAUSSOVA ELIMINAČNÍ METODA

$Ax = b$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

Definujeme multiplikátory $\boxed{m_{21} = -\dfrac{a_{21}}{a_{11}}}$, $\boxed{m_{31} = -\dfrac{a_{31}}{a_{11}}}$

$$\breve{r}_1^{(1)} = \breve{r}_1 \qquad b_1^{(1)} = b_1$$
$$\breve{r}_2^{(1)} = \breve{r}_2 + m_{21} \cdot \breve{r}_1 \qquad b_2^{(1)} = b_2 + m_{21} b_1$$
$$\breve{r}_3^{(1)} = \breve{r}_3 + m_{31} \breve{r}_1 \qquad b_3^{(1)} = b_3 + m_{31} b_1$$

Získáme novou soustavu

$$\left.\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right]\right\} \text{1. fáze eliminace}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A^{(1)}} \quad \underbrace{\quad}_{b^{(1)}}$$

Definujeme multiplikátor $\boxed{m_{32} = -\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}$

$$\breve{r}_1^{(2)} = \breve{r}_1^{(1)} \qquad b_1^{(2)} = b_1^{(1)}$$
$$\breve{r}_2^{(2)} = \breve{r}_2^{(1)} \qquad b_2^{(2)} = b_2^{(1)}$$
$$\breve{r}_3^{(2)} = \breve{r}_3^{(1)} + m_{31} \cdot \breve{r}_2^{(1)} \qquad b_3^{(2)} = b_3^{(1)} + m_{31} b_2^{(1)}$$

Získáme soustavu

$$\left.\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{array}\right]\right\} \text{2. fáze eliminace}$$

Celý postup se nazývá <u>přímý chod</u>
Trojúhelníkovou soustavu řešíme <u>zpětným</u> chodem.

EFEKTIVNOST ALGORITMU:

Budeme brát v úvahu pouze operace násobení a dělení.
(počet operací sčítání je přibližně stejný!)

- Celkem je $N-1$ fází eliminace. V k-té fázi počítáme $N-k$ multiplikátorů (tj. $N-k$ dělení)

$$\sum_{k=1}^{N-1}(N-k) = (N-1).N - \sum_{k=1}^{N-1} k = (N-1)N - \frac{1}{2}(N-1)N =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}(N-1)N}}$$

- Každým multiplikátorem vynásobíme $(N-k+1)$ prvků rozšířené matice (jeden rozšířený řádek), tj. $(N-k)(N-k+1)$ v k-té fázi

$$\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)(N-k+1) = \sum_{k=1}^{N-1}\left[(N^2+N) - k.(2N+1) + k^2\right] =$$

$$= (N-1)(N^2+N) - \frac{1}{2}N\underbrace{(N-1)(2N+1)}_{2N^2+N-2N-1} + \frac{1}{6}\underbrace{(N-1)N(2N-1)}_{(2N^2-2N-N+1)} =$$

$$= N^3 - N^2 + N^2 - \underline{N} - N^3 + \frac{1}{2}N^2 + \underline{\frac{1}{2}N} + \underline{\frac{1}{3}N^3} - \frac{1}{2}N^2 + \underline{\frac{1}{6}N} =$$

$$= \frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{3}N$$

- Zpětný chod: $1 + (\overset{\text{dělení}}{1} + \overset{\text{násobení}}{1}) + (1+2) + \ldots + (1 + N-1) = \sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$

Celkem: $\underbrace{\frac{1}{2}N(N-1)}_{\text{výpočet multiplikátorů}} + \underbrace{\frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{3}N}_{\text{přímý chod}} + \underbrace{\frac{1}{2}N(N+1)}_{\text{zpětný chod}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}N^3 + N^2 - \frac{1}{3}N}}$

Příklad:

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 14 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = & 25 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 50 \end{array}, \qquad \text{tj.} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Řešení:

Pro zápis budeme z důvodu přehlednosti používat tvar *matice rozšířené*:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 4 & 5 & 25 \\ 7 & 8 & 9 & 50 \end{array}\right) \quad / \cdot \left(-\frac{2}{1}\right) + \qquad / \cdot \left(-\frac{7}{1}\right) +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & -48 \end{array}\right) \quad / \cdot \left(-\frac{6}{0}\right) + \qquad !!! \ \text{dělíme } 0$$

- Algoritmus **Gaussovy eliminační metody** není pro tento příklad realizovatelný.
- Snadno se přesvědčíme, že má daná soustava řešení

$$x = 1, y = 2 \text{ a } z = 3.$$

ale Gaussova eliminační metoda selhala.

Otázky:

1. Pro jaké matice $\mathbf{A}$ má soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení?

   → Matice $\mathbf{A}$ musí být **regulární**, tj. všechna vlastní čísla musí být různá od nuly.

   Poznámka: Vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ je číslo λ splňující rovnici $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$, kde $\mathbf{v}$ je vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ. Číslo λ tedy určitým způsobem charakterizuje matici $\mathbf{A}$.

2. Pro jaké matice $\mathbf{A}$ je algoritmus Gaussovy eliminační metody realizovatelný?

   → *Věta:* Je-li matice $\mathbf{A}$ **ostře diagonálně dominantní**, pak je algoritmus Gaussovy eliminační metody realizovatelný.

   Poznámka: Matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ je ostře diagonálně dominantní, platí-li
   $|a_{ii}| > \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, tj. absolutní hodnota diagonálního prvku je větší než součet absolutních hodnot ostatních prvků v řádku.

   → *Věta:* Je-li matice $\mathbf{A}$ **symetrická** a **pozitivně definitní**, pak je algoritmus Gaussovy eliminační metody realizovatelný.

   Poznámka: Matice $\mathbf{A}$ je symetrická, platí-li pro její prvky

   $$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

   Poznámka: Matice $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní, má-li všechna vlastní čísla kladná.

Poznámka: Pro soustavu s maticí, která splňuje předpoklady některé z uvedených vět, je možné dopředu říci, že půjde řešit pomocí Gaussovy eliminační metody. Obráceně to ovšem neplatí, tj. není-li např. matice soustavy ostře diagonálně dominantní, ještě to obecně neznamená, že nepůjde pomocí Gaussovy eliminační metody řešit.

Např. je-li $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, tj. diagonální prvky jsou vždy větší než součet zbylých prvků v řádku, pak půjde soustava s touto maticí řešit pomocí Gaussovy eliminační metody.

Abychom zaručili, že soustava půjde vyřešit pro libovolnou regulární matici, musíme algoritmus Gaussovy eliminační metody upravit. Zavedeme tzv. **výběr hlavního prvku (pivotaci)**.

Poznámka: pivot (hlavní prvek) ... první nenulový prvek v daném řádku matice.

Příklad: Pomocí **GEM se sloupcovou pivotací** vyřešte soustavu rovnic z předcházejícího příkladu, kde selhala klasická GEM, tj. řešíme soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

1. sloupec

$$\text{vyměň} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 4 & 5 & 25 \\ 7 & 8 & 9 & 50 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 9 & 50 \\ 2 & 4 & 5 & 25 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right) \quad / \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \quad / \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$$

2. sloupec

$$\text{není třeba měnit} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 9 & 50 \\ 0 & \frac{12}{7} & \frac{17}{7} & \frac{75}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{12}{7} & \frac{48}{7} \end{array}\right) \quad / \cdot \left(-\frac{\frac{6}{7}}{\frac{12}{7}}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 9 & 50 \\ 0 & \frac{12}{7} & \frac{17}{7} & \frac{75}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \implies \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

□

Poznámky:

- Při sloupcové pivotaci jsme postupně v každém sloupci (resp. jeho části pod diagonálou včetně) vybírali číslo, které bylo maximální v absolutní hodnotě a v případě, že toto číslo neleželo na diagonále, vyměnili jsme příslušné 2 rovnice. Dále jsme pokračovali jako v GEM bez pivotace, tj. nulovali jsme koeficienty pod diagonálou.

- Sloupcová pivotace není jediná možnost. Podobně můžeme vybírat i maximální prvek v absolutní hodnotě z příslušného řádku (resp. jeho části) a poté vyměnit příslušné sloupce. Pozor! Je ovšem třeba zaměnit i příslušné složky řešení $\mathbf{x}$. V tomto případě hovoříme o **řádkové pivotaci**.

- Další možností je vybírat maximální prvek v absolutní hodnotě z celé matice $\mathbf{A}$ (resp. příslušné podmatice). V tomto případě hovoříme o **úplné pivotaci**. Opět je třeba mít na paměti, že je třeba zaměnit složky ve vektoru řešení. Nevýhodou úplné pivotace je pomalejší výpočet neboť hlavní prvek vyhledáváme z celé dosud neupravené části.

úplná pivotace:

výměna

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 8 & 7 & 22 \\ 5 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \quad /\cdot\left(-\frac{5}{9}\right) + \quad /\cdot\left(-\frac{3}{9}\right) +$$

výměna

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 8 & 7 & 22 \\ 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{17}{9} & -\frac{38}{9} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{10}{3} \end{array}\right)$$

řádky není třeba měnit

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 7 & 8 & 22 \\ 0 & -\frac{17}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{38}{9} \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{array}\right) \quad /\cdot\left(-\frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{17}{9}}\right) = \left(-\frac{12}{17}\right) +$$

výměna

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 7 & 8 & 22 \\ 0 & -\frac{17}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{38}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{18}{51} & -\frac{18}{51} \end{array}\right) \Rightarrow \hat{x} = [0, 2, 1]^T$$

Při výměně sloupců se změnily složky řešení
opět je vyměníme (v opačném pořadí)

$$\hat{x} = [0, 2, 1]^T$$

$$\tilde{x} = [0, 1, 2]^T$$

$$x = [2, 1, 0]^T$$

Pozn: Libovolnou pivotací dosáhneme realizovatelnosti GEM pro libovolnou regulární matici

$\boxed{\text{Metoda LU-rozkladu}}$

Opět uvažujeme regulární matici A řádu N
Matici A lze rozložit na součin $\boxed{A = L \cdot U}$,
kde L je dolní trojúhelníková matice řádu N a
U je horní trojúhelníková matice řádu N.

<u>Př</u>:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{l_{11}}\,1 & 0 & 0 \\ l_{21} & \cancel{l_{22}}\,1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \cancel{l_{33}}\,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Tento rozklad není dán jednoznačně (12 neznámých a 9 podmínek)
jednoznačnost dosáhneme např. tím, že položíme $\boxed{l_{ii} = 1,\; i = 1, 2 \dots N}$

ALGORITMUS: (viz skripta)

je odvozen z postupného násobení řádků matice L a
sloupců matice U

(1,1)	$u_{11} = a_{11}$	(2,1)	$a_{21} = l_{21} u_{11}$	(3,1)	...
(1,2)	$u_{12} = a_{12}$	(2,2)	$a_{22} = l_{21} u_{12} + u_{22}$	(3,2)	...
(1,3)	$u_{13} = a_{13}$	(2,3)	$a_{23} = l_{21} u_{13} + u_{23}$	(3,3)	...

Řešení soustavy $Ax = b$ metodou LU rozkladu:

1/ Realizace LU rozkladu: $A = LU$
2/ Řešení trojúhelníkové soustavy $Ly = b$
3/ Řešení trojúhelníkové soustavy $Ux = y$

$$\overbrace{L\underbrace{U x}_{y}}^{A} = b$$

SOUVISLOST GEM A LU-ROZKLADU

Gaussovu eliminaci lze popsat pomocí násobení regulárními maticemi

$$\boxed{A^{(1)} = M_1 A}, \quad \text{kde} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & & 1 & & \\ m_{41} & & & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots \\ m_{n1} & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & & 1 & & \\ m_{41} & & & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots \\ m_{n1} & & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ m_{21} a_{11} + a_{21} & m_{21} a_{12} + a_{22} & m_{21} a_{13} + a_{23} & \cdots & m_{21} a_{1n} + a_{2n} \\ m_{31} a_{11} + a_{31} & m_{31} a_{12} + a_{32} & m_{31} a_{13} + a_{33} & \cdots & m_{31} a_{1n} + a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}$$

Pro nulování druhého sloupce pod diagonálou:

$$\boxed{A^{(2)} = M_2 \cdot A^{(1)}}, \text{ kde } M_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & m_{32} & 1 & & & \\ & m_{42} & & 1 & & \\ & \vdots & & & \ddots & \\ & m_{n2} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$\vdots$

Až nakonec

$$\boxed{A^{(n-1)} = M_{n-1} A^{(n-2)}}, \text{ kde } M_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Dostali jsme horní trojúhelníkovou matici; označme ji např. V

$$\boxed{V = A^{(n-1)} = \underbrace{M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot M_{n-3} \cdots M_2 \cdot M_1}_{\text{ozn. } M} \cdot A}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = M^{-1} \cdot V}$$

$$\boxed{M^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}}$$

? jak vypadá např. M_2^{-1} ?

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & m_{32} & 1 & & \\ & m_{42} & & 1 & \\ & \vdots & & & \ddots \\ & m_{n2} & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -m_{32} & 1 & & \\ & -m_{42} & & 1 & \\ & \vdots & & & \ddots \\ & -m_{n2} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

protože po vynásobení:

i-tý řádek × j-tý slopec ($j \neq i$)

buď:

$m_{42} \cdot 1 + 1 \cdot (-m_{42}) = \underline{0}$

nebo:

$m_{42} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = \underline{0}$

i-tý řádek × i-tý slopec

$m_{42} \cdot 0 + 1 \cdot 1 = \underline{1}$

$$\underline{M_2 \cdot M_2^{-1} = I}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -m_{21} & 1 & & & & \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & & & \\ -m_{41} & -m_{42} & -m_{43} & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ -m_{n1} & -m_{n2} & -m_{n3} & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

Platilo $\boxed{A = M^{-1} \cdot V}$

M^{-1}: dolní trojúhelníková s 1 na diagonále

V: horní trojúhelníková

$\Rightarrow$ jedná se vlastně o LU rozklad
(rozklad je jednoznačný)

$$L = M^{-1} \quad \text{a} \quad U = V$$

```
function pr1(n);
%-------------------------------------------
%       Souvislost GEM a LU-rozkladu
%-------------------------------------------
%
%  n ... rad matice

if ~exist('n'), n=4; end;

 clc;
 syms A;
 for i=1:n, for j=1:n
   ii=sprintf('%d',i);
   jj=sprintf('%d',j);
   eval(sprintf('syms a_%s_%s;',ii,jj));
   eval(sprintf('A(i,j)=a_%s_%s;',ii,jj));
 end, end;

 for i=1:n-1,
   ii=sprintf('%d',i);
   eval(sprintf('M_%s=sym(eye(n));',ii));
 end;

 for i=1:n-1, for j=i+1:n
  ii=sprintf('%d',i);
  jj=sprintf('%d',j);
  eval(sprintf('syms m_%s_%s;',jj,ii));
 end, end;

 for i=1:n-1, for j=i+1:n
  ii=sprintf('%d',i);
  jj=sprintf('%d',j);
  eval(sprintf('syms m_%s_%s;',jj,ii));
  eval(sprintf('M_%s(j,i)=m_%s_%s;',ii,jj,ii));
 end, end;

%-----------------------------------------------
disp('   Matice soustavy ')
disp('----------------------')
 A
 pause;
disp('   Matice transformaci ')
disp('-------------------------')
 for i=1:n-1,
   ii=sprintf('%d',i);
   eval(sprintf('M_%s',ii));
   pause;
 end;

disp('   Soucin  M_1 * A  ')
disp('-------------------------')
M_1*A
pause;

disp('   Inverze k maticim transformaci ')
disp('-------------------------------------')
 for i=1:n-1,
   ii=sprintf('%d',i);
   eval(sprintf('invM_%s=inv(M_%s)',ii,ii))
   pause;
 end;

disp('   Soucin inverzi k maticim transformaci ')
disp('            (postupne nasobeni)   ')
disp('--------------------------------------------')
 invM=sym(eye(n));
 for i=1:n-1,
    ii=sprintf('%d',i);
    eval(sprintf('invM=invM*invM_%s',ii))
    pause;
  end;
```

```
   Matice soustavy
---------------------

A =

[ a_1_1, a_1_2, a_1_3, a_1_4]
[ a_2_1, a_2_2, a_2_3, a_2_4]
[ a_3_1, a_3_2, a_3_3, a_3_4]
[ a_4_1, a_4_2, a_4_3, a_4_4]

   Matice transformaci
-------------------------

M_1 =

[      1,      0,      0,      0]
[ m_2_1,      1,      0,      0]
[ m_3_1,      0,      1,      0]
[ m_4_1,      0,      0,      1]

M_2 =

[      1,      0,      0,      0]
[      0,      1,      0,      0]
[      0, m_3_2,      1,      0]
[      0, m_4_2,      0,      1]

M_3 =

[      1,      0,      0,      0]
[      0,      1,      0,      0]
[      0,      0,      1,      0]
[      0,      0, m_4_3,      1]


  Soucin  M_1 * A
-------------------------

[             a_1_1,             a_1_2,             a_1_3,             a_1_4]
[ m_2_1*a_1_1+a_2_1, m_2_1*a_1_2+a_2_2, m_2_1*a_1_3+a_2_3, m_2_1*a_1_4+a_2_4]
[ m_3_1*a_1_1+a_3_1, m_3_1*a_1_2+a_3_2, m_3_1*a_1_3+a_3_3, m_3_1*a_1_4+a_3_4]
[ m_4_1*a_1_1+a_4_1, m_4_1*a_1_2+a_4_2, m_4_1*a_1_3+a_4_3, m_4_1*a_1_4+a_4_4]
```

```
    Inverze k maticim transformaci
-------------------------------------

invM_1 =

[        1,        0,        0,        0]
[ -m_2_1,        1,        0,        0]
[ -m_3_1,        0,        1,        0]
[ -m_4_1,        0,        0,        1]


invM_2 =

[        1,        0,        0,        0]
[        0,        1,        0,        0]
[        0, -m_3_2,        1,        0]
[        0, -m_4_2,        0,        1]


invM_3 =

[        1,        0,        0,        0]
[        0,        1,        0,        0]
[        0,        0,        1,        0]
[        0,        0, -m_4_3,        1]

    Soucin inverzi k maticim transformaci
             (postupne nasobeni)
--------------------------------------------

invM =

[        1,        0,        0,        0]
[ -m_2_1,        1,        0,        0]
[ -m_3_1,        0,        1,        0]
[ -m_4_1,        0,        0,        1]

[        1,        0,        0,        0]
[ -m_2_1,        1,        0,        0]
[ -m_3_1, -m_3_2,        1,        0]
[ -m_4_1, -m_4_2,        0,        1]

[        1,        0,        0,        0]
[ -m_2_1,        1,        0,        0]
[ -m_3_1, -m_3_2,        1,        0]
[ -m_4_1, -m_4_2, -m_4_3,        1]
```

```
function pr2(n);
%-------------------------------------------------------------
%   Priklad ukazujici souvislost GEM a metody LU-rozkladu
%-------------------------------------------------------------
%
%  n ... rad matice

if ~exist('n'), n=4; end;
clc;
d=0;
while abs(d)<.1, A=rand(n); d=det(A); end;

disp('   Zadana matice soustavy')
disp('---------------------------')
A

disp('   Determinant matice soustavy')
disp('--------------------------------')
d
pause;

disp('   Pomoci GEM jsme ziskali tuto trojuhelnikovou matici ')
disp('------------------------------------------------------')
[x,gemU]=gem(A,ones(n,1));
gemU
pause;

disp('   LU-rozklad matice A ')
disp('-----------------------')
[L,U]=lu_rozklad(A);
L
U
pause;

disp('   Rozdil matic gemU a U ')
disp('-------------------------')
gemU-U
```

```
   Zadana matice soustavy
----------------------------

A =

    0.7023    0.5534    0.4609    0.9851
    0.3214    0.0677    0.7800    0.3532
    0.0485    0.4962    0.4917    0.6220
    0.7775    0.8361    0.6957    0.5159

   Determinant matice soustavy
---------------------------------

d =

    0.2037


   Pomoci GEM jsme ziskali tuto trojuhelnikovou matici
---------------------------------------------------------

gemU =

    0.7023    0.5534    0.4609    0.9851
         0   -0.1855    0.5691   -0.0976
         0         0    1.8652    0.3131
         0         0         0   -0.8384


   LU-rozklad matice A
-------------------------

L =

    1.0000         0         0         0
    0.4576    1.0000         0         0
    0.0690   -2.4692    1.0000         0
    1.1071   -1.2047    0.4670    1.0000


U =

    0.7023    0.5534    0.4609    0.9851
         0   -0.1855    0.5691   -0.0976
         0         0    1.8652    0.3131
         0         0         0   -0.8384


   Rozdil matic gemU a U
---------------------------

ans =

   1.0e-15 *

         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0   -0.2220         0
         0         0         0   -0.1110
```

Výpočet determinantů a inverze matic

DETERMINANTY

1/ užití GEM $\quad \cancel{A} \cdot U = M_{N-1} M_{N-2} \cdots M_2 \cdot M_1 \cdot A$

$$\det(U) = \underbrace{\det(M_{N-1})}_{=1} \cdot \underbrace{\det(M_{N-2})}_{=1} \cdots \underbrace{\det(M_2)}_{=1} \cdot \underbrace{\det(M_1)}_{=1} \det(A)$$

$$\det(A) = \det(U) = \prod_{i=1}^{N} u_{ii}$$

2/ užití LU rozkladu

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U) = \prod_{i=1}^{N} u_{ii}$$

INVERZNÍ MATICE

1/ užití GEM $\quad A \cdot X = I \quad X = A^{-1}$ (maticová soustava)

↓ vypočet N

2/ užití LU rozkladu $\quad A = L \cdot U \quad A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$

Numerické aspekty GEM a LU-rozkladu

Při numerické realizaci neobdržíme přesné matice L a U ale „přibližné" matice $\tilde{L}$ a $\tilde{U}$. Platí $A = \tilde{L} \cdot \tilde{U}$.

Označme $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$ ... teoreticky vypočtené $\tilde{A}$.

Budeme zkoumat rozdíl $\tilde{A} - A$.

Označme E a F matice chyb takové, že platí:

$$\tilde{L} = L + E \,, \quad \tilde{U} = U + F.$$

Potom:
$$\tilde{A} - A = \tilde{L}\tilde{U} - LU = (L+E)(U+F) - LU =$$
$$= EU + LF + EF$$

Odtud plyne závěr: Pokud jsou multiplikátory v absolutní hodnotě velké, pak prvky L jsou v abs. hodnotě velké $\Rightarrow$ chyba může být velká. Toto je jeden z důvodů realizace pivotace.

Presne matice A

A =

1	1	1	1
1000	1001	1001	1001
1001	2003	2004	2004
1003	2007	3012	3013

Matice A je regularni (det(A)=1)

Presny LU-rozklad matice A

L =

1	0	0	0
1000	1	0	0
1001	1002	1	0
1003	1004	1005	1

U =

1	1	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Matice chyb pro matice L a U

E =
1.0e-03 *

0	0	0	0
1.0000	0	0	0
1.0000	1.0000	0	0
1.0000	1.0000	1.0000	0

F =
1.0e-03 *

0	1.0000	1.0000	1.0000
0	0	1.0000	1.0000
0	0	0	1.0000
0	0	0	0

Nepresny (vypocteny) LU-rozklad matice A

LL =
1.0e+03 *

0.0010	0	0	0
1.0000	0.0010	0	0
1.0010	1.0020	0.0010	0
1.0030	1.0040	1.0050	0.0010

UU =

1.0000	1.0010	1.0010	1.0010
0	1.0000	1.0010	1.0010
0	0	1.0000	1.0010
0	0	0	1.0000

Nepresny LU-rozklad odpovida matici AA

AA =

1.0e+03 *

0.0010	0.0010	0.0010	0.0010
1.0000	1.0020	1.0020	1.0020
1.0010	2.0040	2.0060	2.0060
1.0030	2.0080	3.0140	3.0160

Chyba A - AA

0	0.0010	0.0010	0.0010
0.0010	1.0010	1.0020	1.0020
0.0010	1.0030	2.0050	2.0060
0.0010	1.0050	2.0100	3.0150

Cast chyby E*U

0	0	0	0
0.0010	0.0010	0.0010	0.0010
0.0010	0.0020	0.0020	0.0020
0.0010	0.0020	0.0030	0.0030

Cast chyby L*F

0	0.0010	0.0010	0.0010
0	1.0000	1.0010	1.0010
0	1.0010	2.0030	2.0040
0	1.0030	2.0070	3.0120

Cast chyby E*F

1.0e-05 *

0	0	0	0
0	0.1000	0.1000	0.1000
0	0.1000	0.2000	0.2000
0	0.1000	0.2000	0.3000

Kontrola

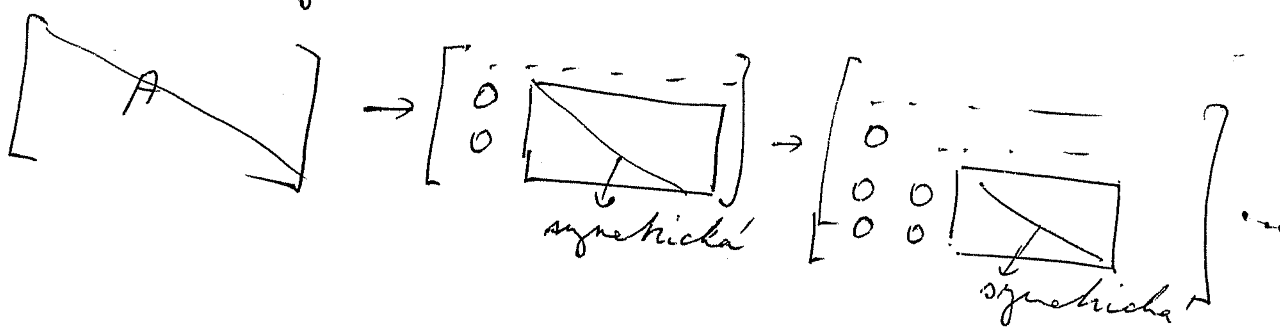
1.0e-12 *

0	0.0001	0.0001	0.0001
0.0236	0.1397	0.1632	0.1632
0.0236	0.1872	0.3504	0.3739
0.0236	0.0071	0.0142	0.4765

Přímé metody pro soustavy se speciální maticí

<u>Matice</u>:
- symetrická
- symetrická a pozitivně definitní
- diagonálně dominantní
- pásové

<u>Platí</u>: Je-li matice A <u>symetrická</u> a $A^{(k)}$ jsou matice získané GEM v základní verzi, pak podmatice $A^{(k)}$ jsou také symetrické.



Lze pak použít <u>symetrickou verzi GEM a LU rozkladu</u>.

Je-li matice A navíc <u>pozitivně definitní</u>, pak lze realizovat <u>Choleského metodu</u> rozkladu

$$A = U^T U$$

<u>Pozor!</u> V algoritmu je potřeba realizovat výpočet odmocnin. To lze pouze pro pozitivně definitní matice.

<u>Př</u>:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} = \overset{U^T}{\begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{bmatrix}} \cdot \overset{U}{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}}$$

$(1,1)$: $a_{11} = u_{11}^2$ $\qquad$ $(2,1)$: $a_{21} = u_{12} \cdot u_{11}$

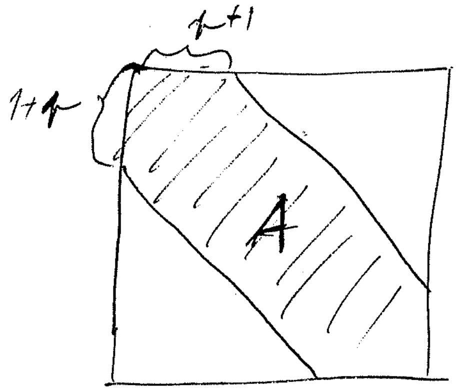
$(1,2)$: $a_{12} = u_{11} \cdot u_{12}$ $\qquad$ $(2,2)$: $a_{22} = u_{12}^2 + u_{22}^2$

$(1,3)$: $a_{13} = u_{11} \cdot u_{13}$

$\vdots$

Metoda LU-rozkladu pro pásové matice

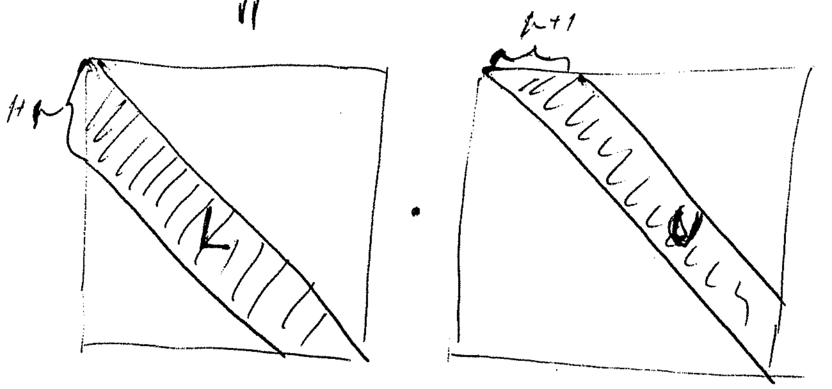
Uvažujeme matici A takovou, že $\boxed{a_{ij} = 0}$, když $\boxed{|i-j| > p}$



šířka pásu $= 2p+1$

Pokud lze realizovat LU-rozklad, pak $l_{ij} = 0$, když $j > i$ a $\underline{j < i-p}$

$u_{ij} = 0$, když $j < i$ a $\underline{j > i+p}$



Pozor! V obecném případě však nelze čekat, že matice L a U bude mít nulový prvek v téže pozici jako A.

Pro pásové symetrické pozitivně definitní matice používáme speciální ~~xxx~~ verzi Choleského rozkladu.

Metoda faktorizace pro třídiagonální matici

Uvažujme soustavu lin. alg. rovnic $\boxed{AY = F}$ ve tvaru:
(řád je $n+1$)

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
c_0 & -b_0 & & & & & & & f_0 \\
-a_1 & c_1 & -b_1 & & & & & & f_1 \\
 & -a_2 & c_2 & -b_2 & & & & & f_2 \\
 & & -a_3 & c_3 & -b_3 & & & & f_3 \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & & -a_{n-1} & c_{n-1} & -b_{n-1} & f_{n-1} \\
 & & & & & & -a_n & c_n & f_n
\end{array}\right)$$

Označme: $\boxed{\alpha_1 = \dfrac{b_0}{c_0}}$, $\boxed{\beta_1 = \dfrac{f_0}{c_0}}$

První 2 rovnice lze psát ve tvaru:

$$\begin{aligned}
\boxed{y_0 - \alpha_1 y_1 = \beta_1} \quad & /\cdot a_1 \\
-a_1 y_0 + c_1 y_1 \boxed{- b_1 y_2} = f_1 \quad & \\
\hline
(c_1 - a_1 \alpha_1) y_1 - b_1 y_2 = f_1 + a_1 \beta_1 &
\end{aligned}$$

Opět přepíšeme na tvar:

$$\boxed{y_1 - \alpha_2 y_2 = \beta_2}$$

kde $\boxed{\alpha_2 = \dfrac{b_1}{c_1 - a_1 \alpha_1}}$, $\boxed{\beta_2 = \dfrac{f_1 + a_1 \beta_1}{c_1 - a_1 \alpha_1}}$

Po zobecnění:

PŘÍMÝ CHOD

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}} \qquad \boxed{\beta_1 = \frac{f_0}{c_0}}$$

$$\boxed{\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}} \qquad \boxed{\beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - a_i \alpha_i}}$$

$$(i = 1, 2, \dots n-1) \qquad\qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

Pro poslední 2 rovnice získáme:

$$\begin{aligned} y_{n-1} - \alpha_n y_n &= \beta_n \quad / \cdot a_n \\ -a_n y_{n-1} + c_n y_n \; \square &= f_n \quad + \end{aligned}$$

zde již není člen $\boxed{-b_n y_{n+1}}$

ZPĚTNÝ CHOD

$$(c_n - a_n \alpha_n)\, y_n = f_n + a_n \beta_n$$

$$\boxed{y_n = \frac{f_n + a_n \beta_n}{c_n - a_n \alpha_n} \overset{\text{ozn}}{=} \beta_{n+1}}$$

$$\boxed{y_{i-1} = \beta_i + \alpha_i \cdot y_i} \qquad (*)$$

$$i = N, N-1, \dots 1$$

EFEKTIVNOST ALGORITMU :

- násobení $\quad 3N \quad (N+N+N)$
- dělení $\quad 2N+1 \quad (1+\underline{N-1}+1+\underline{N})$
- sčítání a odčítání $\quad 3N \quad (N+N+N)$

---

celkem $\quad (8N+1)$ operací

<u>Poznámka</u> Pokud budeme řešit tuto soustavu pro různé pravé strany $\mathbb{F}$, nemusíme již znovu vyjadřovat koeficienty α_i, protože nezávisí na $\mathbb{F}$. Stačí tedy přepočítat β_i.

Zatím jsme neuvedli předpoklady pro metodu faktorizace

- je třeba zajistit, aby jmenovatel $c_i - a_i \alpha_i$
  byl nenulový pro $i = 1, 2, \ldots n$

- y_i se vrácejí z rekurentní formule (*)
  přitom může dojít k akumulaci zaokrouhlovacích chyb

  nechť α_i, β_i jsou dokonce přesně vypočítané
  a nechť máme $\tilde{y}_n = y_n + \varepsilon_n$ (s chybou ε_n)
  Potom postupně vypočítáme podle (*)

$$\boxed{\tilde{y}_{i-1} = \beta_i + \alpha_i \tilde{y}_i \qquad i = n, n-1, \ldots 1}$$

označíme-li $\boxed{\varepsilon_i = \tilde{y}_i - y_i}$ chybu, bude jistě

splňovat homogenní rovnici

$$\boxed{\varepsilon_{i-1} = \alpha_i \varepsilon_i \qquad i = n, n-1, \ldots 1}$$

(protože přesné hodnoty y_i splňují

$$y_{i-1} = \beta_i + \alpha_i y_i \quad)$$

$\Rightarrow$ Pokud by byly koeficienty $|\alpha_i| > 1$
dojde k velkému nárůstu chyby $\underline{\varepsilon_0}$!!!

Pro $\boxed{|\alpha_i| \le 1, \quad i = 1,2,\dots n}$ je algoritmus stabilní.

(•)

Postačující podmínky pro zajištění (•):

Matice soustavy je ostře diagonálně dominantní

Důkaz viz literatura

Příklady aplikací, které vedou na soustavu s třídiagonální maticí

1) Řešení okrajové úlohy

$$(k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x) \qquad x \in (0,l)$$
$$u(0) = u(l) = 0$$
$$k(x) > 0$$
$$q(x) \ge 0$$

x na $\langle 0,l \rangle$ diskretizujeme .... síť x_i

$x_0 = 0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_n = l$

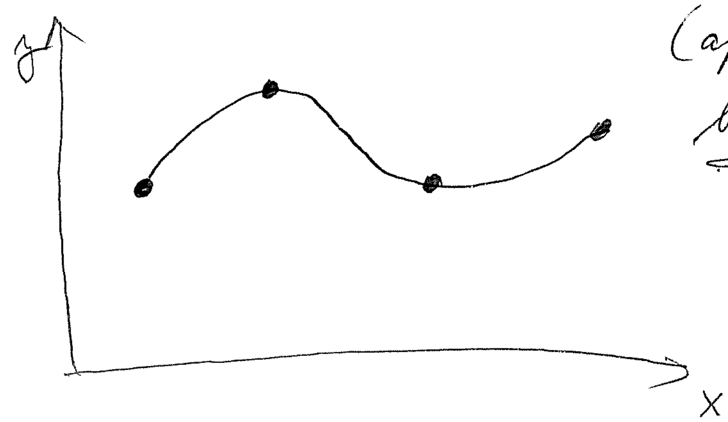
původní úlohu nahradíme úlohou s diferenční rovnicí a ~~..~~ použijeme vzorec pro poměrnou diferenci

2) Diferenční schémata pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x \in (0,l) \quad t > 0$$
$$u(0,t) = \mu_1(t)$$
$$u(l,t) = \mu_2(t)$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

3) Soustava pro koeficienty kubického spline

(aproximace funkce) budeme probírat



$\boxed{\text{Podmíněnost úloh pro SLAR}}$

Uvažujme opět soustavu $Ax = b$, A.. $N\times N$ regulární, $b \in \mathbb{R}^N$.

Označení:

ΔA ... malá změna matice A

Δb ... malá změna vektoru b

Δx ... odpovídající změna vektoru neznámých

x^* ... přesné řešení soustavy $Ax = b$

Platí: $\boxed{(A + \Delta A)(x^* + \Delta x) = b + \Delta b}$

(1) uvažujme situaci $\Delta A = 0$ ... A je zadána přesně

Otázka: Jakou změnu řešení vyvolá změna pravé strany?

$$\underline{Ax^*} + A\Delta x = \underline{b} + \Delta b$$

$$A\Delta x = \Delta b$$

$$\Delta x = A^{-1}\Delta b$$

Z vlastností maticové normy plyne:

$$Ax^* = b \Longrightarrow \|b\| \leq \|A\| . \|x^*\| \Longrightarrow \underline{\frac{1}{\|x^*\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}}$$

$$\Delta x = A^{-1}\Delta b \Longrightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| . \|\Delta b\|$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| . \|\Delta b\| . \underline{\|A\|}}{\underline{\|b\|}}$$

$$\boxed{C_P = \frac{\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|}}{\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}} \leq \|A^{-1}\| . \|A\|}$$

(ii) $\underline{\Delta b = 0}$ ... b je zadána přesně

$$(A+\Delta A)(x^* + \Delta x) = b$$

$$\underline{Ax^*} + \Delta A x^* + A\Delta x + \Delta A \Delta x = \underline{b}$$

$$A\Delta x = -\Delta A(x^* + \Delta x)$$

$$\Delta x = -A^{-1}\Delta A(x^* + \Delta x)$$

$$\|\Delta x\| \leq \underline{\|A^{-1}\|} \cdot \|\Delta A\| \cdot \|x^* + \Delta x\| \quad \cdot \frac{\|A\|}{\|A\|}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|\Delta x + x^*\|} \leq \underbrace{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}_{\substack{\shortparallel \\ C_p}} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

(iii) obecný případ $\Delta b \neq 0$, $\Delta A \neq 0$ viz skripta (Dcv)

Pozn.: Pro symetrické matice je číslo podmíněnosti podíl největší a nejmenší absolutní hodnoty vlastního čísla.

$$C_p = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$$

$$\|A^{-1}\| \to \frac{1}{\lambda_{min}}, \qquad \|A\| \to \lambda_{max}$$

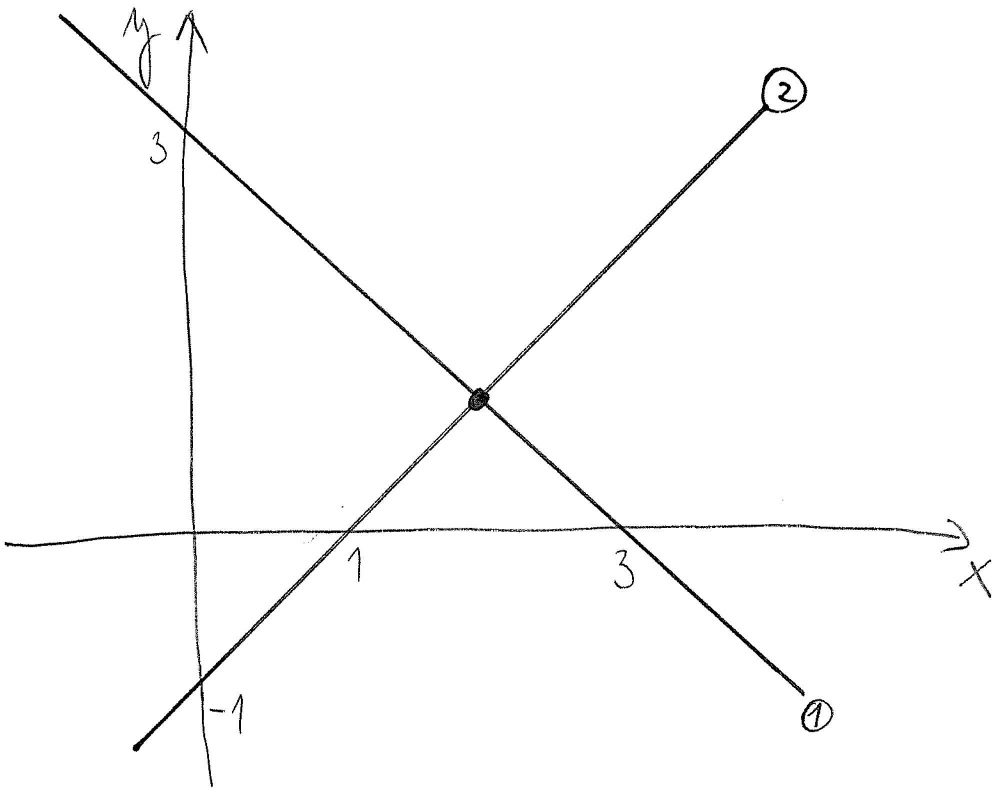
Pro symetrické matice platí, že mají reálná vl. čísla

Geometrická interpretace podmíněnosti (2D)

1 příklad

$$\boxed{\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} y &= 3 - x \\ y &= x - 1 \end{aligned}$$

řešení $x = 2$, $y = 1$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dobře podmíněná úloha

– malá změna vstupních dat vyvolá malou změnu výstupních dat

$$C_p = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

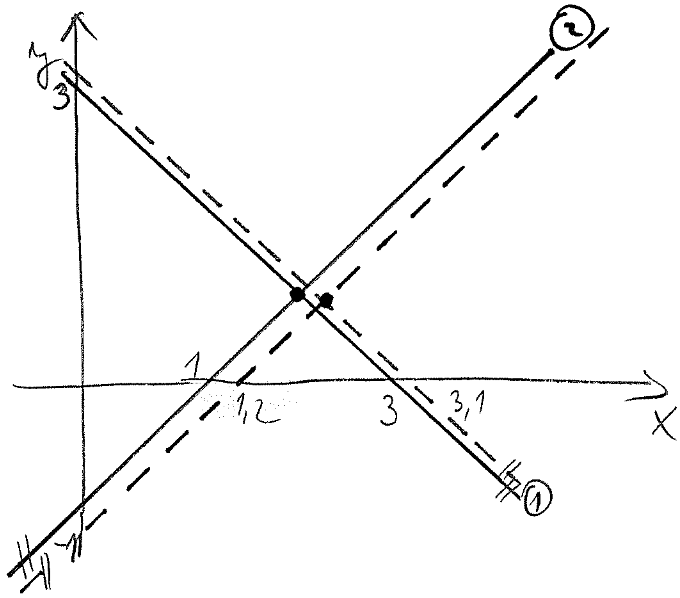
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix} = 0{,}5 \cdot A$$

$$C_p = \begin{cases} 1 \cdot 2 = 2 & \text{(řádková/sloupcová norma)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1 & \text{(spektrální norma)} \end{cases}$$

(i) změna pravé strany (změna matice $\Delta A = 0$)

$$\Delta b = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$$

$$b + \Delta b = \begin{bmatrix} 3{,}1 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$$



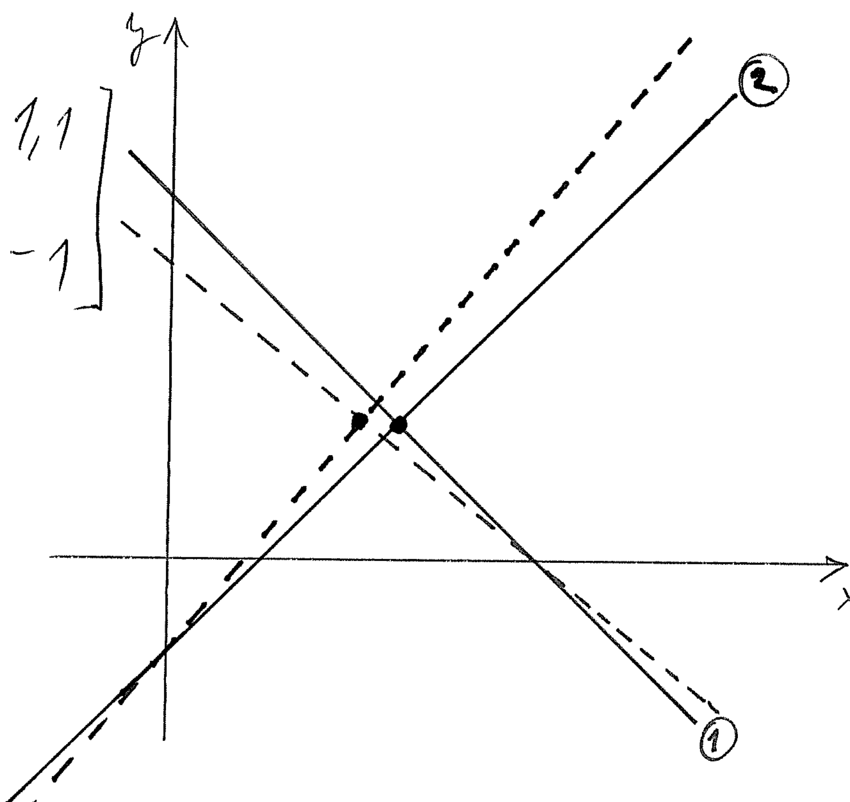
(ii) změna matice soustavy (změna pravé strany $\Delta b = 0$)

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + \Delta A = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}1 \\ 1{,}2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{1}{1{,}1}(3 - x)$$

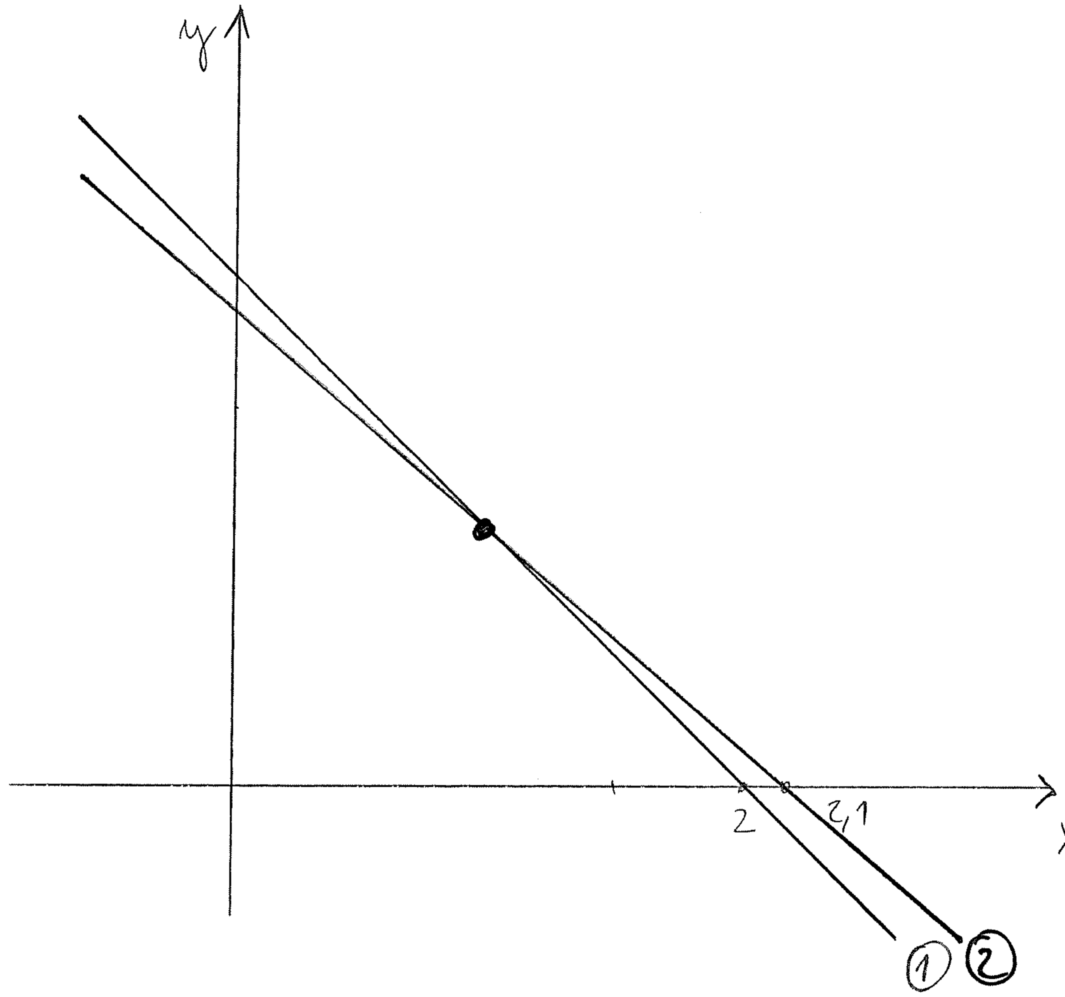
$$y = 1{,}2x - 1$$



2 příklad

$$\boxed{\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + 1{,}1y &= 2{,}1 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} y &= 2 - x \\ y &= \frac{1}{1{,}1}(2{,}1 - x) \end{aligned}$$

řešení:
$x = 1$
$y = 1$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1{,}1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2{,}1 \end{bmatrix}$$

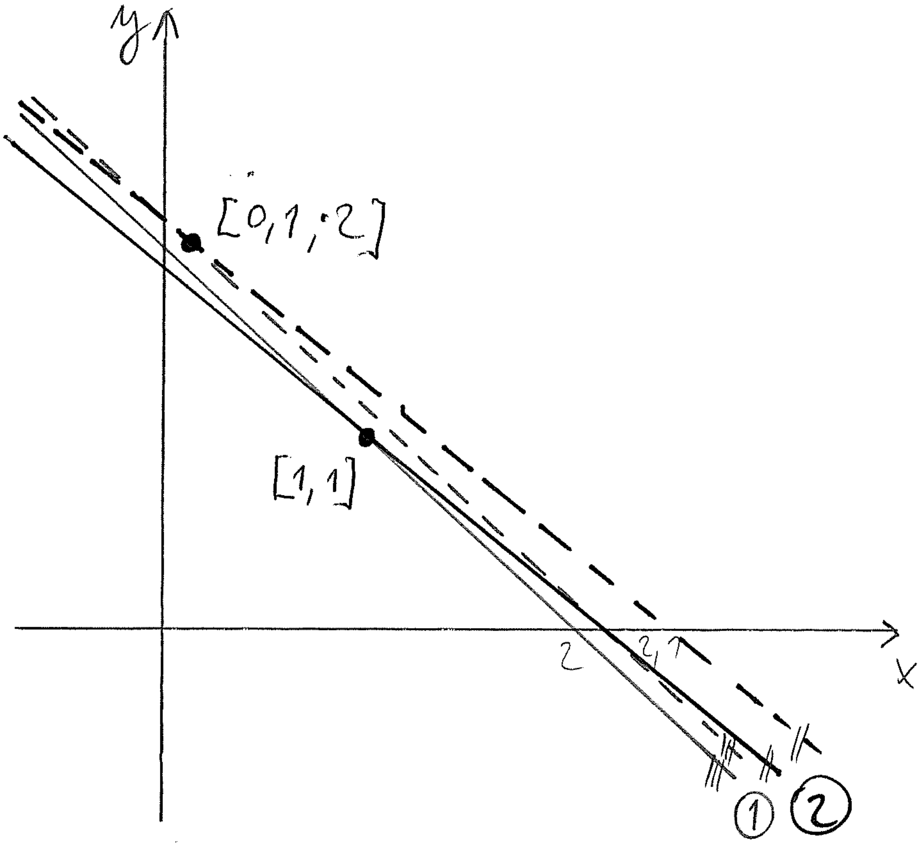
Špatně podmíněná úloha
- malá změna vstupních dat vyvolá velkou změnu výstupních dat

$$\left.\begin{aligned} C_p &= \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \\ A^{-1} &= \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \quad C_p = \begin{cases} 2{,}1 \cdot 21 = 44{,}1 & \text{(řádková/sloupcová)} \\ 2{,}0512 \cdot 20{,}5125 = 42{,}07 & \text{(spektrální)} \end{cases}$$

(i) změna pravé strany (změna matice $\Delta A = 0$)

$$\Delta b = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

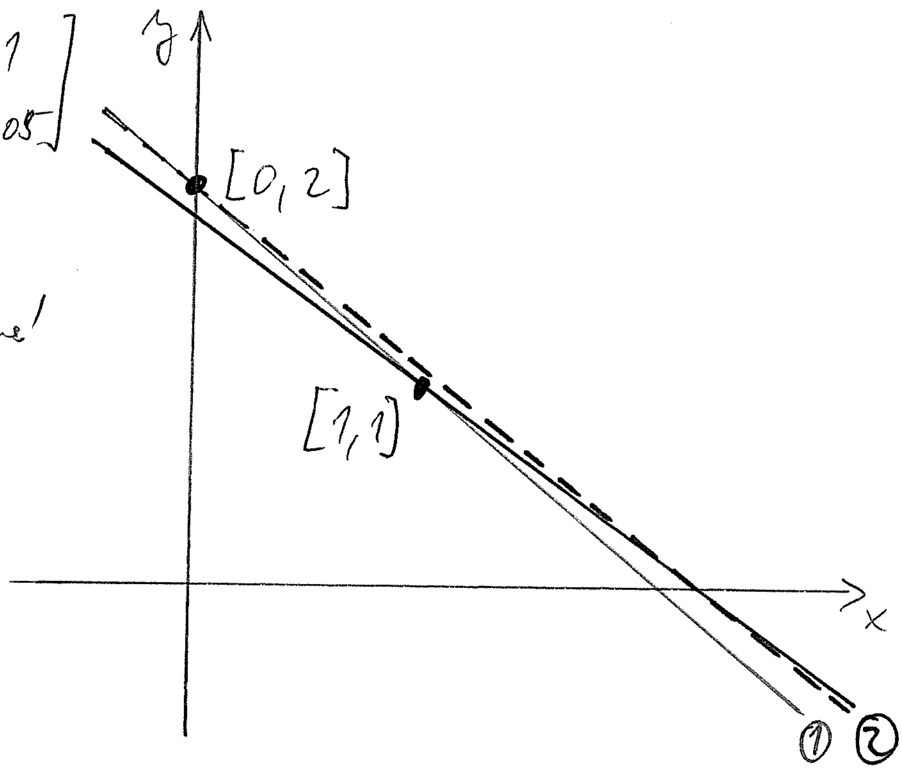
$$b + \Delta b = \begin{bmatrix} 2,1 \\ 2,3 \end{bmatrix}$$



(ii) změna matice soustavy ($\Delta b = 0$)

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0,05 \end{bmatrix}$$

$$A + \Delta A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,05 \end{bmatrix}$$



$y = 2 - x$ ... stejné!

$y = \frac{1}{1,05}(2,1 - x)$

3. příklad

$$\boxed{\begin{aligned} 50x - 100y &= 0 \\ 50x - 101y &= -1 \end{aligned}}$$

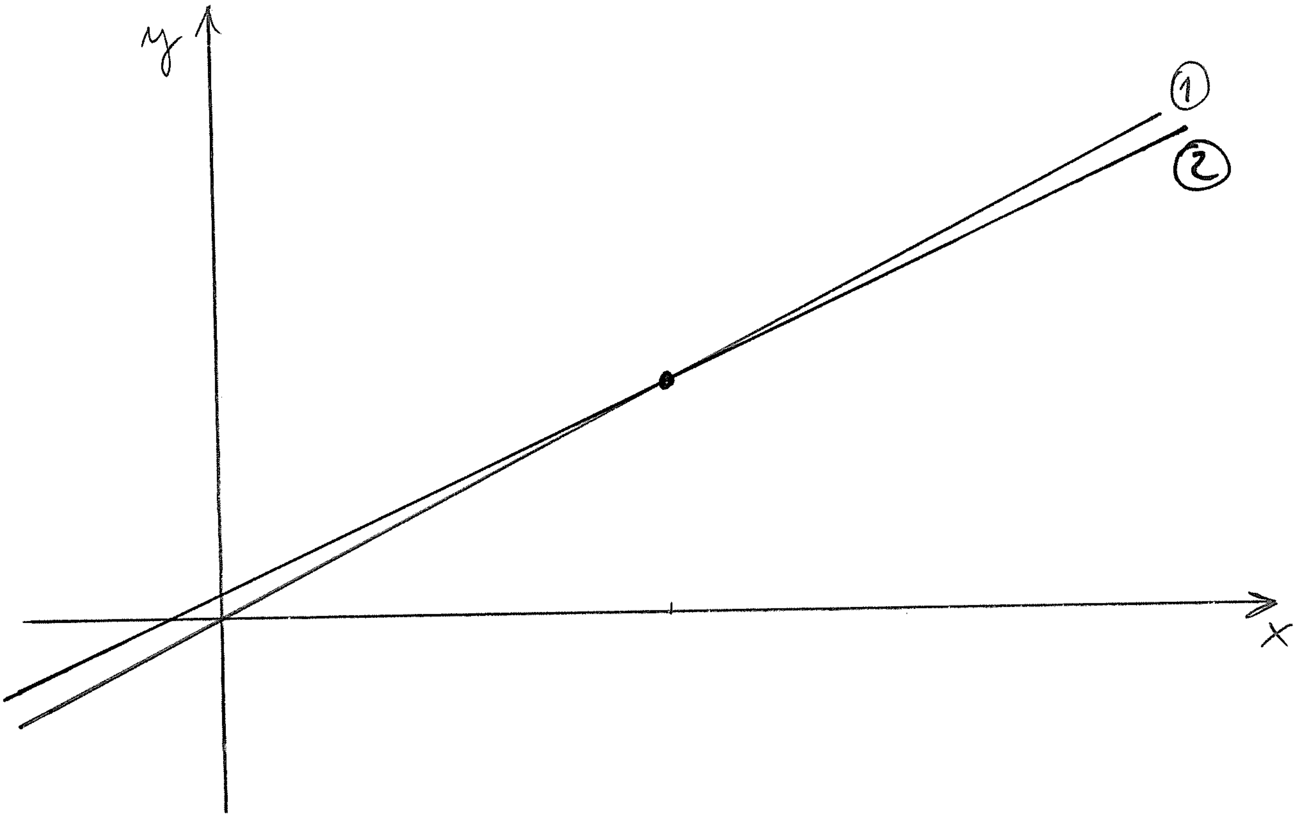
$$y = \frac{1}{100}\cdot(50x) = \frac{x}{2}$$

$$y = \frac{1}{101}(50x+1)$$

řešení

$x = 2$

$y = 1$



$$A = \begin{bmatrix} 50 & -100 \\ 50 & -101 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Špatně podmíněná úloha

– malá změna vstupních dat vyvolá velkou změnu výstupních dat

$$C_p = \|A^{-1}\|\cdot\|A\|$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}02 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$C_p =$

- $151 \cdot 4{,}02 = 607{,}02$ (řádková $\|.\|$)
- $201 \cdot 3{,}02 = 607{,}02$ (sloupcová $\|.\|$)
- $158{,}7479 \cdot 3{,}1750 \doteq 504{,}03$ (spektrální)

$\max\{\sqrt{\lambda(A^H A)}\}$

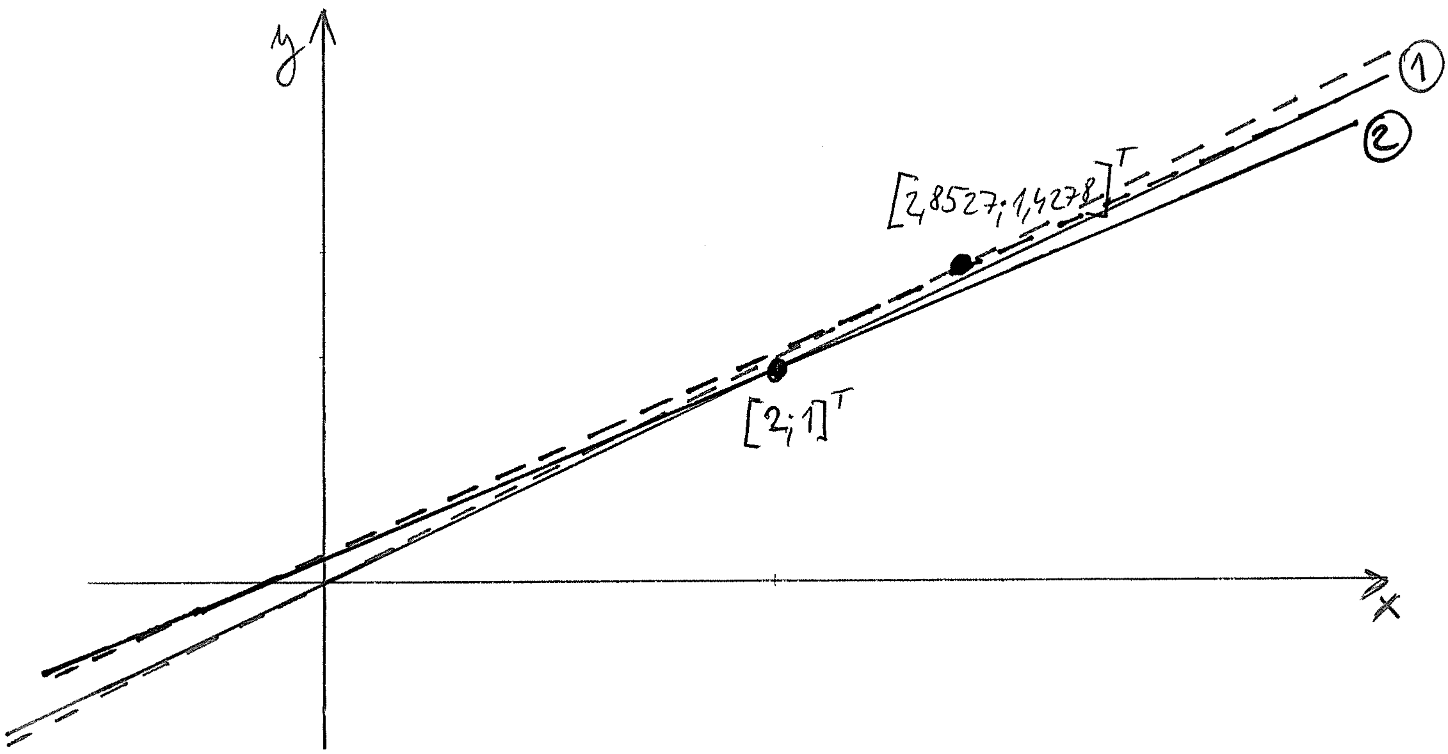
(ii) ~~zmena~~ matice soustavy $(\Delta b = 0)$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{1}{99{,}9} 50x$$

$$y = \frac{1}{101}(50{,}2x + 1)$$

$$\tilde{A} = A + \Delta A = \begin{bmatrix} 50 & -99{,}9 \\ 50{,}2 & -101 \end{bmatrix}$$



$$\tilde{x} = \tilde{A}^{-1} b = \begin{bmatrix} 2{,}8527 \\ 1{,}4278 \end{bmatrix}$$

$$\Delta x = x - \tilde{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2{,}8527 \\ 1{,}4278 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}8527 \\ -0{,}4278 \end{bmatrix}$$

$\|\cdot\|$ < vektorová / maticová	1. vektorová / sloupcová	maximová / řádková	euklidovská / spektrální
$\Delta x = \begin{bmatrix} -0{,}8527 \\ -0{,}4278 \end{bmatrix}$	1,2805	0,8527	0,9539
$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	3	2	2,2361
$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}$	0,2	0,2	0,2
$A = \begin{bmatrix} 50 & -100 \\ 50 & -101 \end{bmatrix}$	201	151	158,7479
$\dfrac{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}}{\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}$	428,97	321,89	338,6

$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ $\qquad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ $\qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$

$\|A\|_S = \max_k \sum_i |a_{ik}|$ $\qquad \|A\|_R = \max_i \sum_k |a_{ik}|$ $\qquad \|A\|_{SP} = \max_k \lambda_k^{\frac{1}{2}}(A^H A)$

Poznámky k podmíněnosti

- Stále předpokládáme, že A je regulární matice. Soustava $Ax = b$ má potom právě 1 řešení.

Předpokládejme, že je matice A normalizovaná tak, že její max. prvek v abs. hodnotě $= 1$.

Je-li soustava špatně podmíněná, potom matice A^{-1} musí obsahovat velké prvky.

<u>Př</u>:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0{,}99999 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -99999 & 100000 \\ 100000 & -100000 \end{bmatrix}$$

a norma $\|A^{-1}\|$ je velká.

To odpovídá faktu, že číslo podmíněnosti je velké

$$\boxed{C_p = \underbrace{\|A\|}_{\text{normalizovaná}} \cdot \underbrace{\|A^{-1}\|}_{\text{velká}} \quad \ldots \quad \text{velké}}$$

• Rozbor chyb $\quad \boxed{Ax=b} \quad x^*$ ... přesné, x_c ... vypočtené

→ chybu můžeme měřit pomocí rezidua

$$\boxed{r = Ax_c - b}$$

(pro přesné řešení $r = Ax^* - b = 0$)

Je-li x_c blízko x^* $\Longrightarrow$ reziduum je malé

Bohužel to neplatí obráceně!

Pro přesné řešení: $Ax^* = b$

$$r = A(x_c - x^*)$$

$$\boxed{x_c - x^* = A^{-1} r}$$

Pro špatně podmíněnou úlohu obsahuje velké prvky, které i pro malé hodnoty r mohou znamenat velkou chybu

Př:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0{,}99999 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1{,}99999 \end{bmatrix}$$

přesné řešení: $x^* = [1,1]^T$

vypočtené řešení bylo: $x_c = [-98; 100]^T$

$$r = Ax_c - b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1{,}999 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1{,}99999 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}0099 \end{bmatrix}$$

⇒ je lepší pokoušet se odhadovat

$\| x_c - x^* \|$

Bohužel se v odhadech vždy vyskytuje norma $\|A^{-1}\|$!

Podrobněji viz literatura

STABILITA ALGORITMŮ

(1) <u>Přímé metody</u>

Problematika vlivu zaokrouhlovacích chyb a pivotací jsme již probírali.

<u>Experimentální stability ověření</u>

a) metodou experimentálních perturbací

b) řešením pomocné soustavy $Ay = d$

kde $d_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}$ $\Rightarrow$ Teoretické řešení je $y = [1, 1, \dots 1]^T$. Rozdíl mezi vypočtenými a teoretickými řešeními ukazuje vliv zaokrouhlovacích chyb.