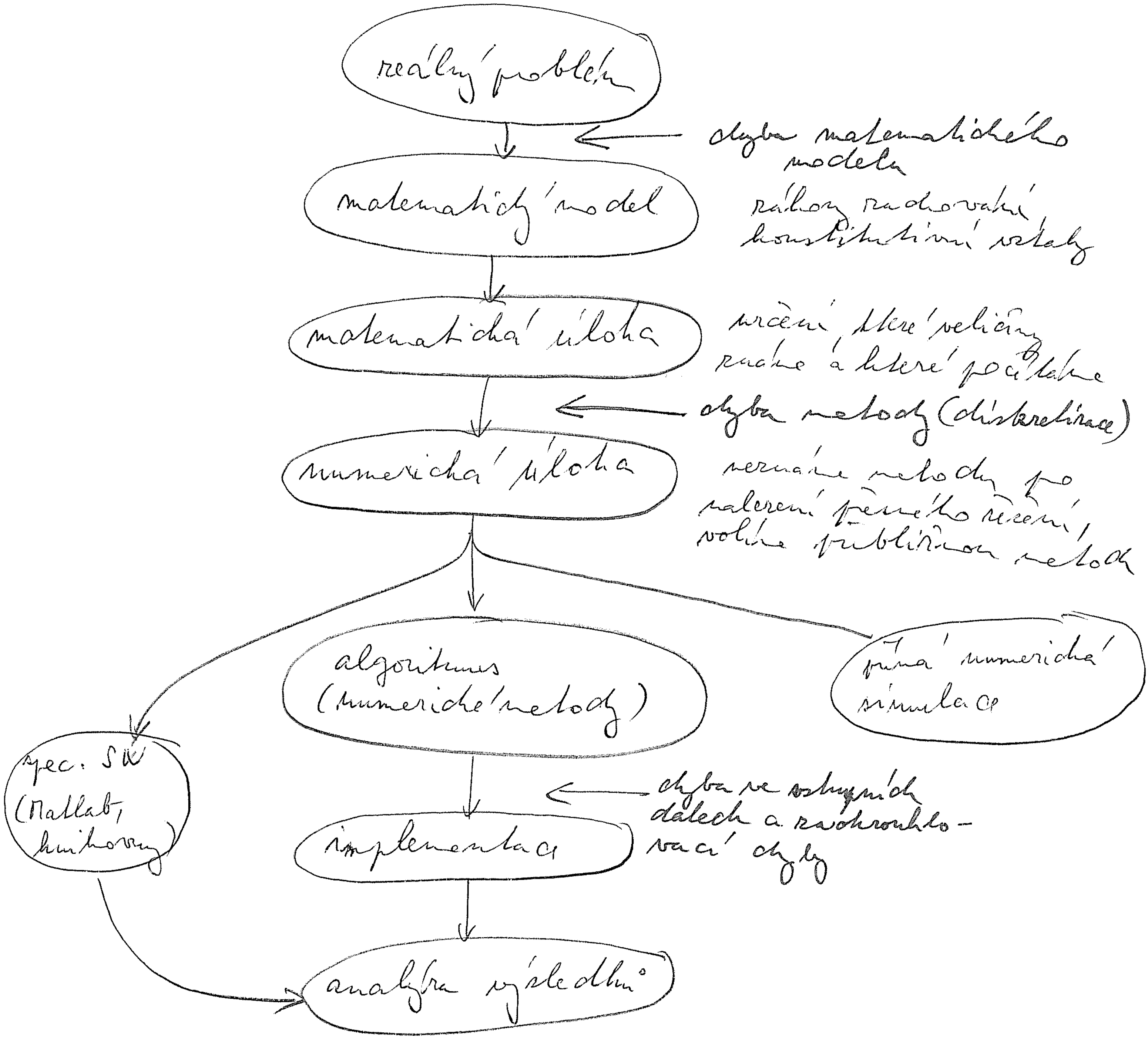
ÚVOD

Numerická matematika = věda, která se zabývá řešením matematicky formulovaných úloh pomocí logických operací a aritmetických operací s čísly o konečné délce



Příklad

Reálný problém ... intravenózní dávkování léku

Matematický model

chyba matematického modelu odpovídá zjednodušujícím předpokladům

- nezávisle proměnná je pouze čas t.
- šíření látky není závislé na prostorových proměnných
- popis pomocí diferenciální rovnice

$$\boxed{\frac{dc}{dt} = -kc}$$

kde c ... koncentrace látky v krvi

$k>0$ ... absorpční koeficient

- počáteční podmínka

$$\boxed{c(0) = c_0}$$

Matematická úloha

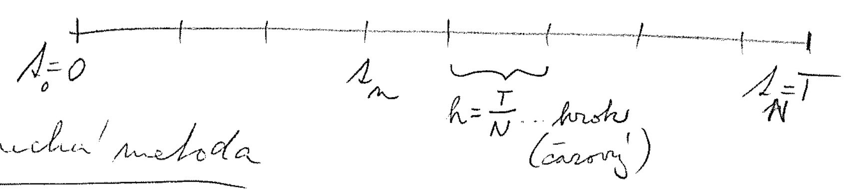
- chceme vypočítat hodnotu koncentrace látky v čase $t \in \langle 0, T \rangle$

Numerická úloha

chyba diskretizace (metody)

- řešení hledáme pouze v konečně mnoha bodech (diskretizujeme čas, $t_0 = 0$, $t_n = n \cdot \frac{T}{N}$, $t_N = T$)

N ... počet dělení intervalu $\langle 0, T \rangle$



Numerická metoda

- derivaci $\frac{dc}{dt}$ aproximujeme poměrnou diferencí

$$\boxed{\frac{c_{n+1}-c_n}{\frac{T}{N}} = -k \cdot c_n}$$

zaokrouhlovací chyby

Výpočet

$$c_{n+1} = \left(1 - \frac{T}{N}k\right) c_n \qquad c_0 \text{ dáno}$$

Analytické řešení

$$\boxed{C(t) = c_0 \cdot e^{-kt}}$$

např.:

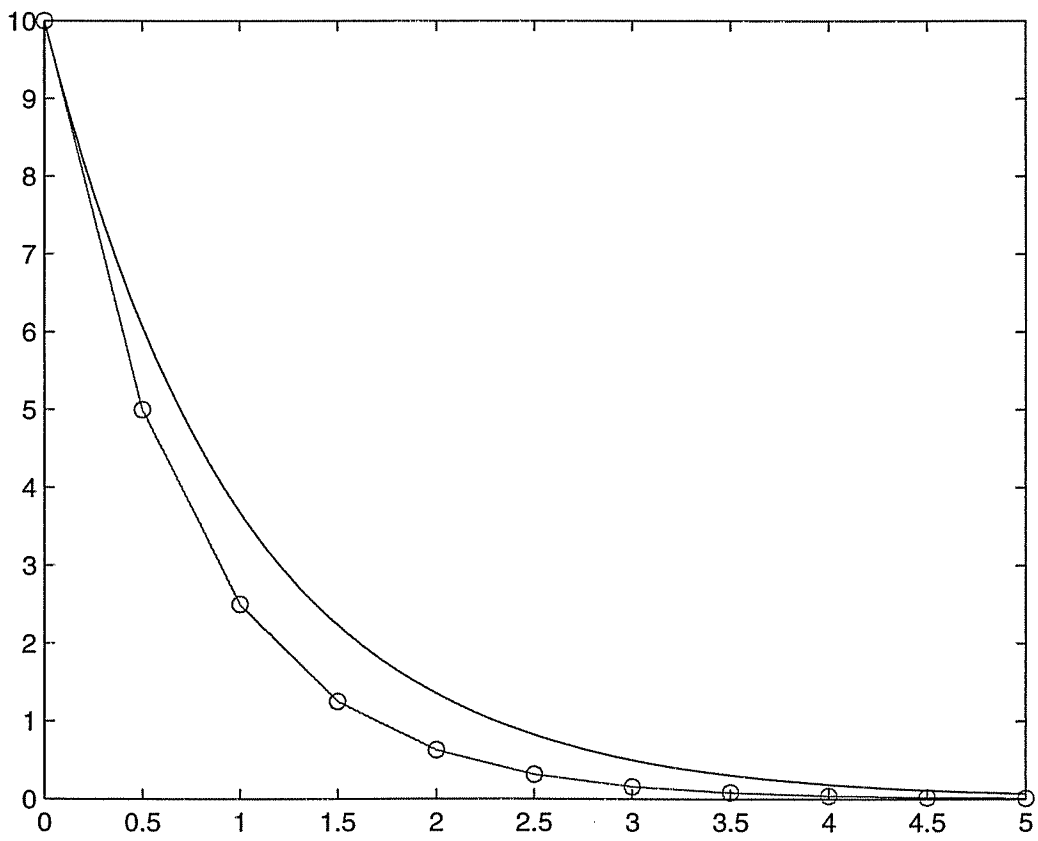
$C(0) = 10$

$k = 1$

$T = 5$

$N = 10$

Reálné hodnoty ???



CHYBY

x … přesná hodnota

$\tilde{x}$ … přibližná hodnota

ABSOLUTNÍ CHYBA $\qquad A(x) = |x - \tilde{x}| \leq \underbrace{a(x)}_{\text{odhad}}$

RELATIVNÍ CHYBA $\qquad R(x) = \dfrac{A(x)}{|x|} \leq \widetilde{r(x)}$

Pozn: Při odčítání „blízkých" čísel roste relativní chyba (ztráta platných číslic)

$$\boxed{a(x \pm y) = a(x) + a(y)}$$

$$|(x \pm y) - (\tilde{x} \pm \tilde{y})| \leq |x - \tilde{x}| + |\tilde{y} - y|$$

$$\boxed{r(x \pm y) = \frac{a(x) + a(y)}{|x \pm y|}} \qquad |x \pm y| \to 0_+ \ !!!$$

Pozn: Násobení a dělení nemohou podstatně zvětšit relativní chybu

$$\boxed{a(x.y) = |x|.a(y) + |y|\,a(x)}$$

$$|xy - \tilde{x}\tilde{y}| = |xy - \tilde{x}y + \tilde{x}y - \tilde{x}\tilde{y}| =$$

$$= |y(x - \tilde{x}) + \tilde{x}(y - \tilde{y})| \leq |y|.|x - \tilde{x}| + |x|.|y - \tilde{y}|$$

$$\boxed{r(x.y) = r(x) + r(y)}$$

$$\frac{|x|\,a(y) + |y|\,a(x)}{|x.y|} = \frac{a(y)}{|y|} + \frac{a(x)}{|x|}$$

$$\boxed{a\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{|x|a(y) + |y|a(x)}{y^2}}$$

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right| = \left|\frac{1}{y\tilde{y}}(x\tilde{y} - \tilde{x}y)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{y\tilde{y}}(x\tilde{y} - xy + xy - \tilde{x}y)\right| =$$

$$\approx y^2$$

$$= \left|\frac{1}{y\tilde{y}}(x(\tilde{y} - y) + y(x - \tilde{x}))\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{y^2}(|x||y - \tilde{y}| + |y||x - \tilde{x}|)$$

$$\boxed{r\left(\frac{x}{y}\right) = r(x) + r(y)}$$

$$\frac{\dfrac{|x|a(y) + |y|a(x)}{y^2}}{\left|\dfrac{x}{y}\right|} = \frac{a(y)}{|y|} + \frac{a(x)}{|x|}$$

Úloha, její korektnost a podmíněnost

Definice Mějme dány dvě množiny X (vstupní data) a Y (výstupní data). Předpokládejme, že X, Y jsou Banachovy prostory. Úlohou rozumíme relaci

$$y = U(x), \quad x \in X, \; y \in Y$$

Definice Řekneme, že úloha je korektní na dvojici prostorů (X, Y), když:

- $\forall x \in X \; \exists! \, y \in Y : \quad y = U(x)$ (existence)
- řešení y spojitě závisí na vstupních datech
  $\forall \{x_n\} : x_n \to x, \; U(x_n) = y_n : y_n \to y = U(x)$

Poznámka Protože X, Y jsou Banachovy prostory, lze spojitost zaručit podmínkou

$$\|y_n - y\|_Y \leq L \, \|x_n - x\|_X$$

Poznámka Nekorektní úlohy jsou úlohy, které nejsou korektní. Někdy je nekorektnost způsobena pouze nevhodnou formulací.

Banachův prostor = úplný + normovaný

normovaný pr. = množina X : a) X je lineární
b) $\forall u \in X \to \|u\|$:
$\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = o$
$\|a u\| = |a| \cdot \|u\| \quad \forall a \in \mathbb{R}$
$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
c) $d(u, v) = \|u - v\|$

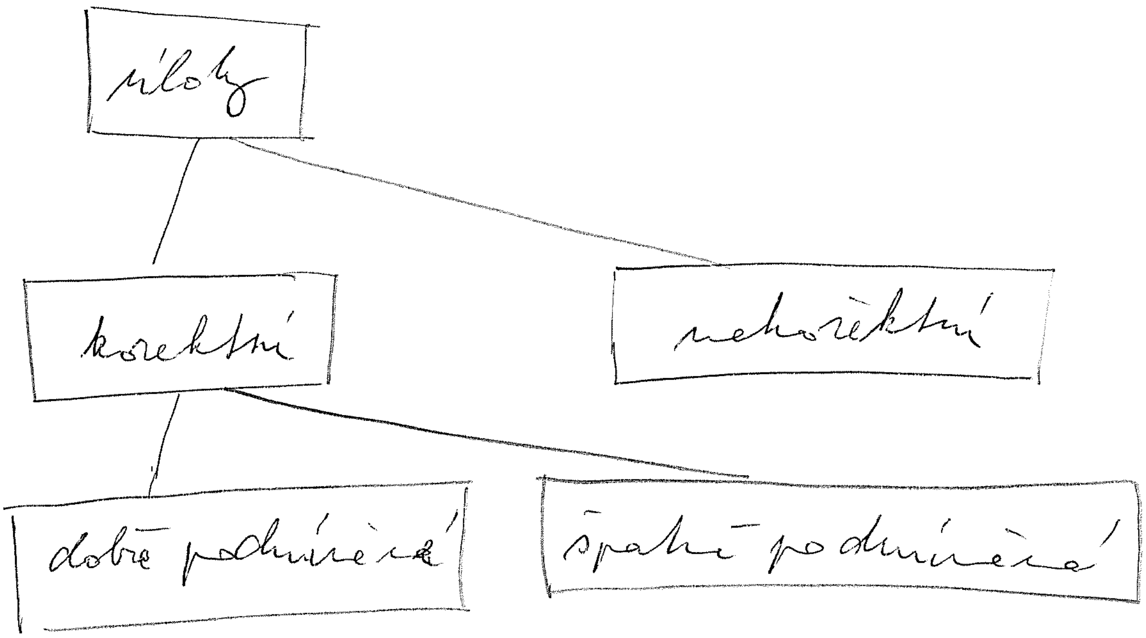
úplný pr.: metrický pr. $\forall$ cauchyovská posl. $\{u_n\} \subset X$ má limitu $u \in X$

Definice Úloha je <u>dobře podmíněná</u>, jestliže malá změna ve vstupních datech vyvolá malou změnu řešení.

<u>Číslo podmíněnosti</u> úlohy $y = U(x)$

$$C_p = \frac{\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|}}{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}}$$

<u>Poznámka</u> Je-li $C_p \approx 1$ je úloha velmi dobře podmíněná.
V praxi hovoříme o špatně podmíněné úloze pro $C_p \gtrsim 100$



Příklad 1

Posuďte podmíněnost úlohy určit hodnotu funkce $y = \sin x$ a) v bodě 3,14

b) v bodě −0,01

a) Volíme $x = 3{,}14$, $\Delta x = 0{,}01$ ← malá změna na vstupu

$$(y =) \sin x = \sin 3{,}14 = 0{,}0015926$$

$$(y + \Delta y =) \sin(x + \Delta x) = \sin 3{,}15 = -0{,}0084072$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = -0{,}0099998$$ → změna na výstupu

Relativní chyba na vstupu: $\dfrac{|\Delta x|}{|x|} \doteq 0{,}0031847$

Relativní chyba na výstupu: $\dfrac{|\Delta y|}{|y|} \doteq 6{,}2789$

$C_p \doteq 1971{,}6$ → špatně podmíněná úloha

b) Volíme $x = -0{,}01$, $\Delta x = 0{,}01$

$$\sin x = -0{,}0099998$$

$$\sin(x + \Delta x) = \sin 0 = 0$$

$$\Delta y = 0{,}0099998$$

$$\frac{|\Delta x|}{|x|} \doteq 1$$

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} \doteq 1$$

$C_p \doteq 1$ → velmi dobře podmíněná úloha

Pozn: úloha má tvar $y = f(x)$

Podle věty o střední hodnotě platí:

$$|\Delta y| \approx |f'(x)| \cdot |\Delta x|$$

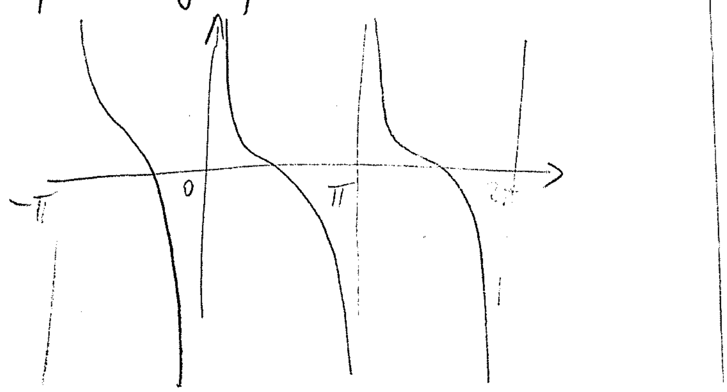
odtud:
$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \frac{|f'(x)| \cdot |\Delta x|}{|f(x)|} = \boxed{\left|\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}\right|} \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right|$$

Tedy
$$C_P \approx \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right|$$

v našem případě: $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

$$C_P \approx \left|\frac{x \cos x}{\sin x}\right| = |x \operatorname{cotg} x|$$

$$\lim_{x \to \pi\pm} x \operatorname{cotg} x = \mp\infty$$



$$\lim_{x \to 0_\pm} x \frac{\cos x}{\sin x} =$$
$$= \cos 0 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} =$$
$$= 1 \cdot 1 = 1$$

Pozn: Podobné příklady: posoudit podmíněnost úlohy určit hodnoty

a) $\boxed{\text{fce } f(x) = x^\alpha, \ x \to 0, \ x > 0}$

$$C_P = \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x \alpha x^{\alpha-1}}{x^\alpha}\right| = \alpha$$

b) $\boxed{\text{fce } f(x) = \arcsin x, \ x \to 1, \ x < 1}$

$$C_P = \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x}\right| = \left|\frac{x}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\to 0_+} \arcsin x}\right| \to \infty \quad (x \to 1)$$

c) $\boxed{\text{fce } f(x) = x - 1, \ x \to 1}$

$$C_P = \left|\frac{x \cdot 1}{x - 1}\right| \to \infty$$

Příklad 2

Posuďte podmíněnost úlohy řešit soustavu lineárních algebraických rovnic

$$
\begin{aligned}
x + \alpha y &= 1 \\
\alpha x + y &= 0 \qquad / \cdot(-\alpha) \quad +
\end{aligned}
\qquad \underline{\alpha \neq \pm 1}
$$

$$x(1-\alpha^2) = 1$$

$$\boxed{x = \frac{1}{1-\alpha^2}} \quad \text{pro } \alpha \neq \pm 1$$

$$\boxed{y = -\frac{\alpha}{1-\alpha^2}}$$

Nechť vstup je hodnota $\underline{\alpha}$ a výstup hodnota $\underline{x}$.

Pak

$$C_p = \frac{\frac{|\Delta x|}{|x|}}{\frac{|\Delta \alpha|}{|\alpha|}} \approx \boxed{\left| \frac{\alpha \cdot \frac{dx}{d\alpha}}{x} \right|} = \left| \frac{\alpha \cdot \frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^2}}{\frac{1}{1-\alpha^2}} \right| = \boxed{\frac{2\alpha^2}{|1-\alpha^2|}}$$

viz předchozí poznámka

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha^2}\right) = -\left(\frac{1}{(1-\alpha^2)^2} \cdot (-2\alpha)\right)$$

$\Rightarrow$ pro $\underline{\alpha^2 \to 1}$ je úloha špatně podmíněná!

Pozn: Matice soustavy výše je pro hodnoty parametru α blízké ± 1 skoro singulární.

Stabilita (podmíněnost) algoritmů

„U nestabilní metody (algoritmu) se relativně malé chyby v jednotlivých krocích výpočtu postupně akumulují tak, že dojde ke katastrofální ztrátě přesnosti numerického řešení úlohy."

- při výpočtu dochází k zaokrouhlovacím chybám. Je proto vhodné vybrat algoritmy málo citlivé na zaokrouhlovací chyby.

Stabilní algoritmus

- dobře podmíněný - málo citlivý na poruchy ve vstupních datech
- numericky stabilní - málo citlivý na vliv zaokrouhlovacích chyb

Pozn.: U stabilních metod roste chyba výsledku s počtem kroků N nejvýše lineárně (v ideálním případě, kdy je znaménko chyby náhodné, zaokrouhlovací chyba roste $\sim \sqrt{N}$)

U nestabilních metod roste zaokrouhlovací chyba rychleji, např. geometrickou řadou $\sim q^N$, kde $|q|>1$.

Příklad (nestabilní rekurze) Řešte diferenční rovnici (rekurentní formule)

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{13}{3} x_n - \frac{4}{3} x_{n-1}, \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{3}}$$

Snadno se ukáže, že řešení je $\underline{x_n = \frac{1}{3^n}}$ (dosazení)

Při numerickém výpočtu dojdeme k problémům.
Hodnoty x_n začnou velmi rychle klesat.
Pro vysvětlení ukážeme obecné řešení zadané diferenční rovnice

- charakteristický polynom $\lambda^2 = \frac{13}{3}\lambda - \frac{4}{3}$

  (předpokládáme řešení λ^n: $\lambda^{n+1} = \frac{13}{3}\lambda^n - \frac{4}{3}\lambda^{n-1}$)

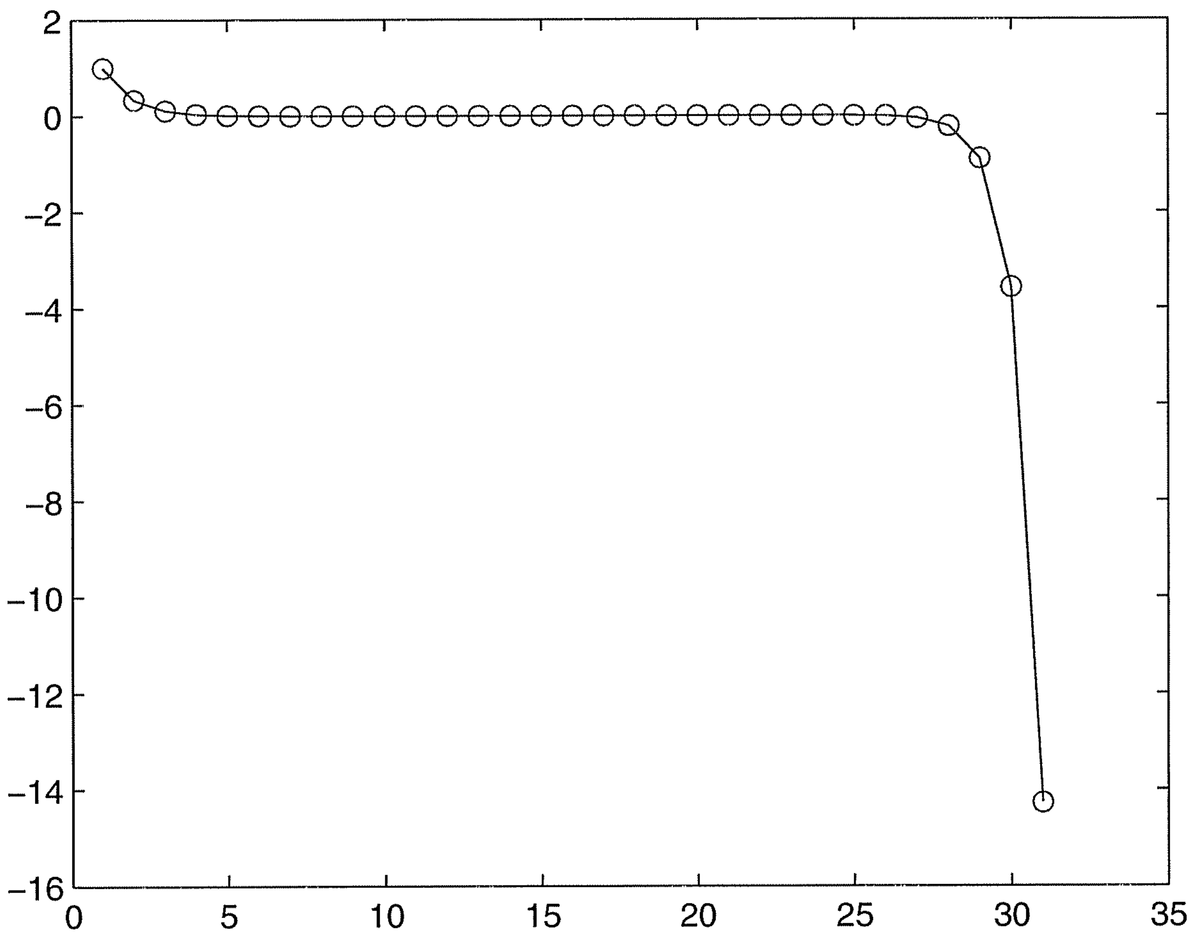
- kořeny $\lambda_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{3} \\ 4 \end{matrix} \right.$ $\left(\lambda_{1,2} = \frac{\frac{13}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{3}\right)^2 - 4\cdot\frac{4}{3}}}{2} = \frac{\frac{13}{3} \pm \sqrt{\frac{121}{9}}}{2} \right)$

- obecné řešení $\underline{\underline{x_n = A\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n + B\cdot 4^n}}$

Pro počáteční podmínku $B = 0$ vzniknou chybou zaokrouhlování chyby malé druhé komponenty řešení

Výsledky z MATLABu
FORMAT SHORT
pevná čárka na 5 číslic

```
clc;
clear;
format short;

n=30;

x(1)=1;
x(2)=1/3;

for i=2:n
 x(i+1)=13/3*x(i)-4/3*x(i-1);
end

plot(1:n+1,x,'b-',1:n+1,x,'ro');
```



Příklad Vypočtěte přibližně hodnoty $\boxed{J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx}$

Platí:
$$\underbrace{\int_0^1 x^{n-1}\,dx}_{\left[\frac{1}{n}x^n\right]_0^1 = \frac{1}{n}} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+5)}{x+5}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx}_{J_n} + 5\underbrace{\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+5}\,dx}_{J_{n-1}}$$

dále:
$$J_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+5}\,dx = \left[\ln|x+5|\right]_0^1 = \underline{\underline{\ln\frac{6}{5}}}$$

rekurentní formule:
$$\boxed{\begin{aligned} J_0 &= \ln\frac{6}{5} \\ J_n &= -5J_{n-1} + \frac{1}{n} \end{aligned}}$$

nestabilní algoritmus! ... vždy $\exists n_0: J_{n_0} < 0$! ↯

Proto je lépe postupovat odzadu:

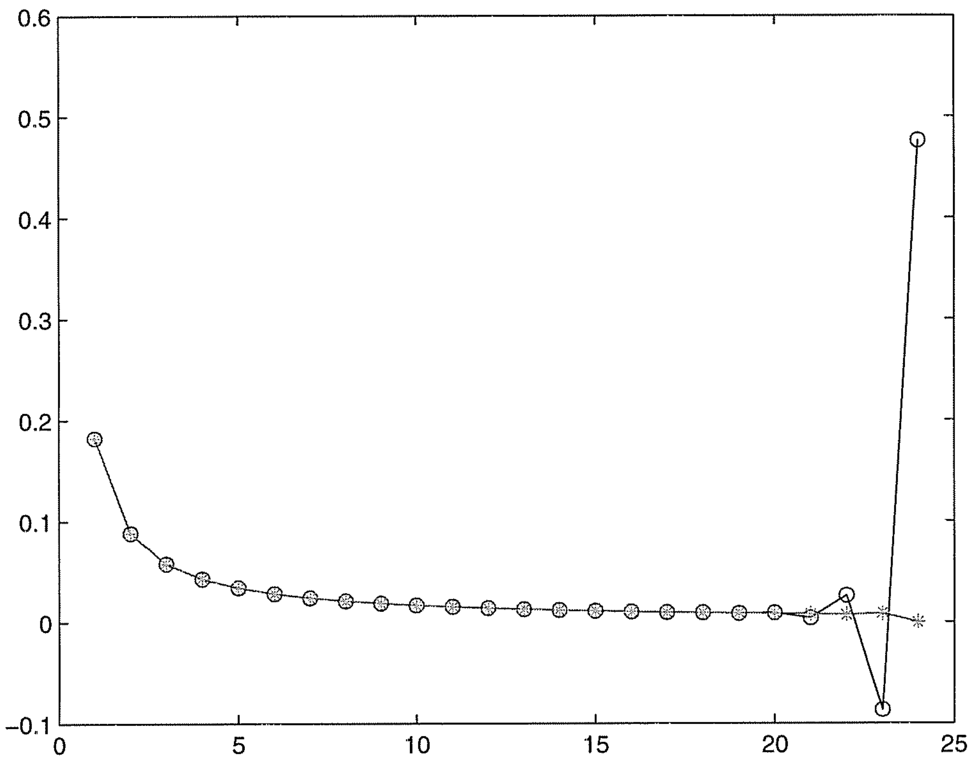
- dokážeme, že $\boxed{\lim_{n\to\infty} J_n = 0}$

$$|J_n| = \left|\int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx\right| \le \int_0^1 \left|\frac{x^n}{x+5}\right|dx \le \frac{1}{5}\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{5(n+1)} \to 0 \text{ pro } n\to\infty$$

- např. zvolíme $J_{100} = 0$

  a počítáme $J_{n-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{n} - J_n\right)$

```
clc;
clear;
format short e;

n=24;

J(1)=log(6/5);
JJ(n)=0;

for i=1:n-1
 J(i+1) = -5*J(i) + 1/i;
end
for i=n-1:-1:1
 JJ(i) = (1/i - JJ(i+1)) / 5;
end

[J' JJ']
plot(1:n,J,'b-',1:n,J,'ro');
hold on
plot(1:n,JJ,'m-',1:n,JJ,'g*');
```



J	JJ
1.8232e-01	1.8232e-01
8.8392e-02	8.8392e-02
5.8039e-02	5.8039e-02
4.3139e-02	4.3139e-02
3.4306e-02	3.4306e-02
2.8468e-02	2.8468e-02
2.4325e-02	2.4325e-02
2.1233e-02	2.1233e-02
1.8837e-02	1.8837e-02
1.6926e-02	1.6926e-02
1.5368e-02	1.5368e-02
1.4071e-02	1.4071e-02
1.2977e-02	1.2977e-02
1.2040e-02	1.2040e-02
1.1229e-02	1.1229e-02
1.0522e-02	1.0521e-02
9.8903e-03	9.8963e-03
9.3719e-03	9.3419e-03
8.6960e-03	8.8462e-03
9.1515e-03	8.4005e-03
4.2426e-03	7.9975e-03
2.6406e-02	7.6314e-03
-8.6575e-02	7.2974e-03
4.7635e-01	6.9913e-03
-2.3401e+00	6.7099e-03
1.1740e+01	6.4503e-03
-5.8664e+01	6.2100e-03
2.9336e+02	5.9870e-03
-1.4667e+03	5.7791e-03
7.3338e+03	5.5873e-03
-3.6669e+04	5.3970e-03
1.8334e+05	5.2732e-03
-9.1672e+05	4.8841e-03
4.5836e+06	5.8824e-03
-2.2918e+07	0

ZOBRAZENÍ ČÍSEL

Motivace:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{100\,000} \frac{1}{10} = 9.998{,}55664}$$

- lidé používají desítkovou soustavu
- počítače dvojkovou

KOMUNIKACE S POČÍTAČEM

- zadání v 10-soustavě
- převod do 2-soustavy
- výpočet
- zpětný převod do 10-soustavy

} v počítači

- výsledek v 10-soustavě

SOUSTAVY

- *desítková*

$$1563 = (1 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (3 \cdot 10^0)$$

obecně

$$N = (a_k \times 10^k) + (a_{k-1} \times 10^{k-1}) + \ldots + (a_1 \times 10^1) + (a_0 \times 10^0)$$

$(N \in \mathbb{N})$

$a_k \in \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$

značení

$$N = a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots\ldots a_1 a_0$$

- *dvojková*

$$1563 = (1 \times 2^{10}) + (1 \times 2^9) + (0 \times 2^8) + (0 \times 2^7) + (0 \times 2^6) + (0 \times 2^5) + (1 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$$

$$\boxed{(1563)_{10} = (11000011011)_2}$$

BINÁRNÍ ZLOMKY

lze vyjádřit jako sumu se zápornými mocninami 2.

$R \in \mathbb{R}$ $\qquad 0 < R < 1$ $\qquad d_j \in \{0,1\}$

$$R = (d_1 \times 2^{-1}) + (d_2 \times 2^{-2}) + \dots + (d_n \times 2^{-n}) + \dots$$

$$R = (0,d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots)_2$$

Pozn: Mnoho reálných čísel, které lze v desítkové soustavě zapsat pomocí konečného počtu cifer, pro zápis ve dvojkové soustavě vyžaduje nekonečně mnoho cifer.

$$(0,7)_{10} = (0,1\overline{0110})_2 = 1 \cdot 2^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot 2^{-(3+4k)} + \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot 2^{-(4+4k)}$$

$$= 0,5 + \frac{1}{8} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (2^{-4})^k}_{} + \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-4})^k$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16}{15}$$

$$= 0,5 + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = 0,5 + \frac{3}{15} = \frac{15+6}{30} = \underline{\underline{0,7}}$$

ZÁPIS ČÍSEL

- v desítkové soustavě (vědecká notace)

$$0{,}000747 = 7{,}47 \times 10^{-4}$$
$$313{,}815 = 3{,}13815 \times 10^{2}$$

- strojová čísla

normalizovaná pohyblivá řádová čárka (REAL)

$$\boxed{X \approx \pm q \times 2^{n}}$$

$\frac{1}{2} \leq q < 1$ … mantisa

n … exponent

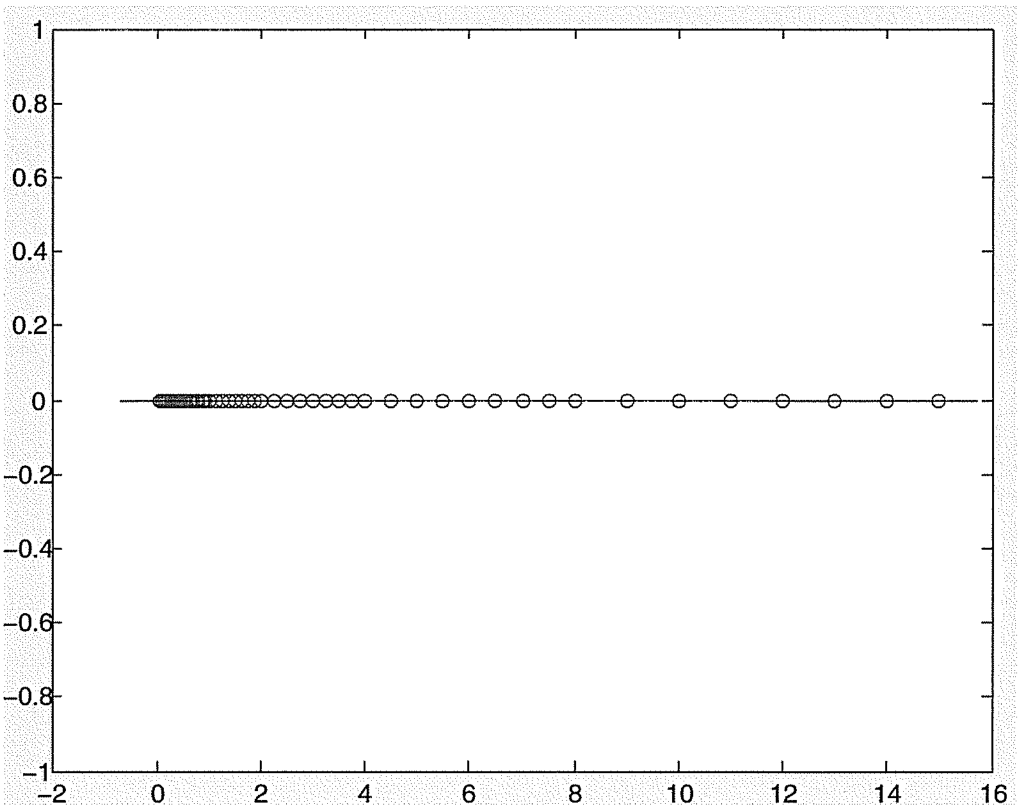
[A, P] = stroj_cisla (4, -3:4, 1)

$q = 0{,}d_1 d_2 d_3 d_4$

$n \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

```
> [A,P]=stroj_cisla(4,-3:4,1);


function [A,P]=stroj_cisla(cisel_mantisy,exponent,zobraz);
%
% [A,P]=stroj_cisla(4,-3:4,1);

for i=1:length(exponent)
 for j=0:2^(cisel_mantisy-1)-1
   zaklad=dec2bin(j);
   zakladstr=num2str(zaklad);
   for k=1:cisel_mantisy-length(zakladstr)-1
     zakladstr=strcat('0',zakladstr);
   end;
   zakladstr=strcat('1',zakladstr);
   zaklad=bin2dec(zakladstr)*2^(-cisel_mantisy);
   A(j+1,i)=zaklad*2^exponent(i);
 end;
end;

[k,l]=size(A);
P=sort(reshape(A,1,k*l));

if zobraz==1
  figure(1);
  plot(P,zeros(size(P)),'ro');
  pr=(P(k*l)-P(1))/20;
  hold on;
  plot([P(1)-pr,P(k*l)+pr],[0 0],'b-');
end;

format short g;
```

q \ n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0.1000_2	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8
0.1001_2	0.070312	0.14062	0.28125	0.5625	1.125	2.25	4.5	9
0.1010_2	0.078125	0.15625	0.3125	0.625	1.25	2.5	5	10
0.1011_2	0.085938	0.17188	0.34375	0.6875	1.375	2.75	5.5	11
0.1100_2	0.09375	0.1875	0.375	0.75	1.5	3	6	12
0.1101_2	0.10156	0.20312	0.40625	0.8125	1.625	3.25	6.5	13
0.1110_2	0.10938	0.21875	0.4375	0.875	1.75	3.5	7	14
0.1111_2	0.11719	0.23438	0.46875	0.9375	1.875	3.75	7.5	15



Příklad Uvažujme stroj s předešlými parametry a vypočítejte $\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{6}$

Předpokládejte, že stroj zaokrouhluje všechna reálná čísla na nejbližší číslo, které lze zobrazit, v případě shody na větší.

$$\frac{1}{10} \approx 0{,}1101_2 \times 2^{-3} \qquad = 0{,}01101_2 \times 2^{-2} \text{ (SHIFT)}$$

$$\frac{1}{5} \approx 0{,}1101_2 \times 2^{-2} \qquad = 0{,}1101_2 \times 2^{-2}$$

$$\frac{3}{10} \qquad 1{,}00111_2 \times 2^{-2}$$

↓ zaokrouhlení

$$0{,}1010_2 \times 2^{-1}$$

Pozn: zobrazíme-li $\frac{3}{10}$ do počítače, získáme toto vypočtené

$$\frac{3}{10} \approx 0{,}1010_2 \times 2^{-1} = 0{,}1010_2 \times 2^{-1}$$

$$\frac{1}{6} \approx 0{,}1011_2 \times 2^{-2} = 0{,}01011_2 \times 2^{-1}$$

$$\frac{7}{15} \qquad 0{,}11111_2 \times 2^{-1}$$

↓ zaokrouhlení

$$0{,}1000 \times 2^{0}$$

Pozn: číslo $\frac{7}{15}$ se zobrazí na $0{,}1111_2 \times 2^{-1}$ ($= 0{,}46875$) !!!

Výsledek se již neshoduje ani s tím, co bychom získali pouhým zobrazením čísla $\frac{7}{15}$ do počítače !!!

Chyba výpočtu

$$\frac{7}{15} - 0{,}1000 \times 2^{0} = \frac{14-15}{30} = -\frac{1}{30}$$

$$\doteq -0{,}03333$$

Relativně

$$\frac{\frac{1}{30}}{\frac{7}{15}} = \frac{1}{14} = 7{,}14\,\% \quad !!!$$

Přesnost počítače

- vyhradíme-li pro mantisu 24 bitů, získáme ~ 7 desetinných míst ($2^{24} = 16\,777\,216$)
- 32 bitů ~ 9 desetinných míst ($2^{32} = 4\,294\,967\,296$)

Pozn:

FORMAT	BYTES	BITŮ PRO MANTISU	BITŮ PRO EXPONENT
SINGLE	4	24	8
DOUBLE	8	53	11

Př. • Uvažujme formát **SINGLE**, tj. 24 bitů pro mantisu

$$\frac{1}{10} = 0{,}0\overline{0011}_2 \approx 0{,}1100\,1100\,1100\,1100\,1100\,1100_2 \times 2^{-3}$$

chyba zobrazení je $0{,}\overline{1100}_2 \times 2^{-27} \left(= \frac{1}{10} \cdot 2^{-24}\right) \approx \underline{5{,}96 \times 10^{-9}}$

- Máme-li počítat $\sum_{k=1}^{100000} \frac{1}{10}$ musí být chyba větší než $100000 \cdot 5{,}96 \times 10^{-9} = \underline{5{,}96 \times 10^{-4}}$

Ve skutečnosti je chyba ještě větší, neboť se v průběhu výpočtu musí částečná suma zaokrouhlovat dolů nebo nahoru, jak suma roste, později přičítaná čísla $\frac{1}{10}$ jsou oproti sumě menší a jsou tedy počítána s menší přesností.

F77 : $\boxed{\text{výsledek} \quad 9998{,}55664}$!!!

soucet.f:

```
      program soucet
      implicit none

      real cislo, suma
      integer  pocet, i

      pocet=100000
      cislo=0.1
      suma=0.0
      do i=1,pocet
        suma=suma+cislo
      end do

      print *,' Suma je ', suma
      end
```

```
> f77 soucet.f
> a.out
 Suma je   9998.55664
```