Numerické metody – požadavky ke zkoušce

1. Formulujte základní úlohy lineární algebry. Uveďte podmínky řešitelnosti úlohy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Vysvětlete princip metody LU-rozkladu a Choleského rozkladu. Uveďte podmínky realizovatelnosti těchto metod a vysvětlete princip algoritmů těchto metod. Objasněte, jak lze posoudit podmíněnost úlohy a stabilitu eliminačních algoritmů a jak lze na základě vývoje mezivýsledků algoritmů odhadnout špatnou podmíněnost.

2. Formulujte základní úlohy lineární algebry. Uveďte podmínky řešitelnosti úlohy $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Vysvětlete princip Gaussovy eliminační metody a metody symetrického rozkladu. Uveďte podmínky realizovatelnosti těchto metod a vysvětlete princip algoritmů GEM a GEMP. Popište, jak lze kontrolovat vliv zaokrouhlovacích chyb při realizaci algoritmů a jak lze odhadnout číslo podmíněnosti úlohy. Uveďte, pro které speciální matice $\mathbf{A}$ jsou eliminační algoritmy numericky stabilní.

3. Formulujte základní úlohy lineární algebry a uveďte podmínky jejich řešitelnosti. Vysvětlete princip iteračních metod a princip gradientních metod pro řešení úlohy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Formulujte a dokažte větu o postačující podmínce konvergence iterační metody. Odvoďte vzorec pro odhad chyby. Vysvětlete, jak lze stanovit konvergenční faktor iterační metody. Porovnejte efektivitu přímých a iteračních metod a posuďte meze jejich použitelnosti. Objasněte, jak se pozná špatná podmíněnost úlohy při realizaci iterační metody.

4. Vysvětlete princip iterační metody pro řešení úlohy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Vyložte princip algoritmů Jacobiovy metody, Gauss-Seidelovy metody a SOR metody. Vyslovte a zdůvodněte větu o konvergenci iterační metody. Definujte pojem rychlosti konvergence a asymptotické rychlosti konvergence. Jaká je jejich souvislost s podmíněností úlohy.

5. Formulujte úlohu na vlastní čísla a uveďte podmínky její řešitelnosti. Vyložte metodu Rayleighova podílu a mocninnou metodu pro určení

dominantního vlastního čísla. Uveďte předpoklady její použitelnosti a srovnání jejich efektivnosti. Posuďte podmíněnost úlohy na vlastní čísla. Posuďte použitelnost metod pro nesymetrickou matici.

6. Formulujte úlohu na vlastní čísla a uveďte podmínky její řešitelnosti. Vyložte princip metody podobnostních transformací pro úplný problém vlastních čísel. Popište princip metody LU-rozkladu a metody Jacobiho diagonalizace. Popište způsob výpočtu vlastních vektorů.

7. Popište metodu prosté iterace a metodu inverzní interpolace pro úlohu $f(x) = 0$. Uveďte podmínky řešitelnosti a podmíněnosti dané úlohy. Popište princip metody bisekce a metody regula falsi. Formulujte a dokažte větu o řešitelnosti úlohy $x = \phi(x)$ a konvergenci metody prosté iterace. Jak lze stanovit odhad chyby metody? Uveďte některé speciální metody pro algebraické rovnice.

8. Popište Newtonovu metodu a metodu sečen pro úlohu $f(x) = 0$. Uveďte podmínky řešitelnosti a podmíněnosti dané úlohy. Odvoďte odhad chyby Newtonovy metody a formulujte postačující podmínku konvergence. Jak lze určit násobnost kořene? Popište princip speciálních metod pro algebraické rovnice (Graeffova, Bairstowova). Lze identifikovat vicenásobný kořen? Uveďte princip použití Newtonovy metody pro soustavu nelineárních rovnic.

9. Formulujte úlohu Čebyševovy aproximace, úlohu lokální aproximace a interpolační úlohu. Uveďte podmínky řešitelnosti interpolační úlohy. Vyjádřete vzorce pro chybu aproximace interpolačním polynomem. Na čem závisí podmíněnost interpolační úlohy? Uveďte algoritmy pro řešení speciální interpolační úlohy. Uveďte princip Richardsonovy extrapolace.

10. Popište metody pro řešení interpolační úlohy. Uveďte algoritmus metody Newtonova interpolačního polynomu a Nevillův algoritmus a zhodnoťte možnosti (efektivnost) jejich použití. Zdůvodněte přednosti metody ortogonálních polynomů pro řešení obecné interpolační úlohy. Formulujte úlohy extrapolace a objasněte v čem je riziko použití interpolačních metod pro tuto úlohu.

11. Formulujte interpolační úlohu a popište metodu Lagrangeova interpolačního polynomu a metodu spline funkcí pro řešení interpolační

úlohy. Jaké můžeme volit okrajové podmínky v metodě spline funkcí. Srovnejte obě úlohy z hlediska podmíněnosti. Definujte spline funkci.

12. Formulujte úlohu diskrétní Fourierovy analýzy (DFA) a syntézy. Interpretujte úlohu DFA jako interpolační úlohu nebo úlohu diskrétní L_2 aproximace. Jak lze zaručit ortogonalitu bázových funkcí v DFA? Jaké jsou přednosti komplexních bázových funkcí v DFA? Projevuje se v DFA efekt špatné podmíněnosti?

13. Vysvětlete principy spojité a diskrétní L_2 aproximace. Formulujte příslušné úlohy a popište metody řešení. Sestavte soustavu normálních rovnic v polynomiální aproximaci nebo v aproximaci trigonomterickými polynomy. Odvoďte soustavu normálních rovnic jako důsledek neřešitelné interpolační úlohy. Uveďte a zdůvodněte faktory ovlivňující podmíněnost úlohy (ortogonalita, uzly atd.) a stabilitu algoritmů.

14. Formulujte problém aproximace periodické funkce. Popište metodu kubické spline funkce. Popište metodu aproximace trigonometrickým interpolačním polynomem. Popište metodu nejmenších čtverců pro trigonometrické bázové funkce.

15. Odvoďte formule pro aproximace derivací (prvního, druhého řádu). Popište princip a použití Richardsonovy extrapolace. Objasněte problematiku podmíněnosti numerického derivování (vliv nepřesnosti vstupních dat na chybu).

16. Formulujte úlohu numerické integrace. Vysvětlete základní principy numerického integrování. Odvoďte Newtonovy-Cotesovy vzorce, jejich chyby. Popište konstrukci složených vzorců. Popište Rombergovu metodu. Objasněte problematiku konvergence Newtonových-Cotesových vzorců. Vysvětlete principy aposteriorního odhadu chyby. Odvoďte číslo podmíněnosti numerického integrování.

17. Formulujte úlohu numerické integrace. Vysvětlete základní principy konstrukce základního a složeného kvadraturního vzorce. Odvoďte jednobodový a dvoubodový Gaussův kvadraturní vzorec. Vysvětlete pojem algebraického řádu přesnosti. Objasněte problematiku konvergence Gaussových vzorců.

18. Formulujte počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu. Vysvětlete princip metody Taylorova typu. Sestavte algo-

ritmus Taylorovy metody. Vysvětlete pojmy lokální a globální diskretizační chyba. Popište princip jednokrokových metod typu R-K a odhadu chyby metodou polovičního kroku (a procedury aktivní a pasivní extrapolace).

19. Formulujte počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu nebo pro soustavu ODR prvního řádu. Vyložte princip konstrukce explicitních a implicitních Adamsových formulí. Vyložte, v čem jsou přednosti a nevýhody vícekrokových formulí. Odvoďte algoritmus prediktor-korektor pro Adamsovy formule prvního řádu. Vysvětlete zkratky PEC, $\mathrm{P(EC)^N}$, $\mathrm{P(EC)^K E}$. Jak lze provést odhad lokální diskretizační chyby Adamsových metod?

20. Formulujte počáteční úlohu pro soustavu ODR prvního řádu. Vysvětlete princip expilicitní Eulerovy metody pro soustavu dvou ODR 1. řádu a odvoďte základní algoritmus. Vysvětlete princip implicitní Eulerovy metody pro soustavu dvou ODR 1. řádu. Odvoďte algoritmus prediktor-korektor. Popište metody odhadu chyby.

21. Odvoďte numerickou metodu 1. řádu pro počáteční úlohu 2. řádu typu $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$ na principu Taylorovy metody nebo na principu převodu na soustavu ODR 1. řádu. Odvoďte algoritmus metody pro ODR typu $a(t)\ddot{y} + b(t)\dot{y} + c(t)y = g(t) \quad t \geq t_0$.