APROXIMACE FUNKCÍ

Formulace

Hledáme aproximaci φ funkce f takovou, která „co nejlépe“ napodobuje chování funkce f a to buď v okolí nějakého bodu nebo na nějakém intervalu.

Důvody

- Neznalost funkce f
- Snadnější práce s aproximací
- Použití při odvozování různých metod (např. derivace, integrace, atd.)

Poznámka

Aproximaci funkce jsme již používali u metod na řešení nelineární rovnice.

Možnosti aproximace

- Na okolí bodu
- Interpolace
- L_2-aproximace

Aproximace Taylorovým polynomem

Myšlenka:

Chceme stanovit polynom n-tého stupně $T_n(x)$ tak, aby co nejlépe aproximoval chování funkce f v okolí bodu x_0.

Musí platit:

$$T_n^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Tuto podmínku splňuje Taylorův polynom ve tvaru

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

Chyba aproximace

$$e(x) = f(x) - T_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \xi \in \mathcal{U}(x_0)$$

Odhad chyby aproximace

Platí-li $\quad |f^{(n+1)}(\boldsymbol{x})| \leq M \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$

Potom $\quad |e(x)| \leq \dfrac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$

Příklad

Stanovte Taylorův polynom 2.stupně, který aproximuje funkci $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

$$T_2(x) = \sin 0 + x.\cos 0 - \frac{x^2}{2}\sin 0 = x$$

Pro jaké x lze psát $\sin x \approx x$, aby chyba nebyla větší než 10^{-4}?

$$e(x) = \frac{x^3}{3!}(-\cos\xi)$$

Platí $\qquad |\cos\xi| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{|e(x)|}_{\leq 10^{-4}} \leq \frac{|x^3|}{3!} = \frac{|x^3|}{6}$

tj. chceme, aby

$$\frac{|x^3|}{6} \leq 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad |x^3| \leq 6.10^{-4} \quad \Rightarrow \quad |x| \leq \underbrace{0.08434}_{\approx 4{,}83^\circ} \text{ (rad)}$$