Zkouška z MA 2 (1. část) 10.6.2004

Jméno a příjmení: . . . . **Hodnocení:** . . . . .
Kroužek : . . . . **Cvičící:** . . . .

S2.10 (5b) Je dán integrál $\iint\limits_{\Omega}(xy)\,dxdy$,
kde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2x;\ y \ge 0\}$.

(a) Vypočtěte daný integrál substitucí do polárních souřadnic.

(b) Převeďte daný integrál na oba dvojnásobné integrály.

(c) Určete a zdůvodněte hodnotu obou dvojnásobných integrálů z bodu b).

S4.10 (5b) Je dána soustava diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4x - y - z\\ \dot{y} &= x + 2y - z\\ \dot{z} &= x - y + 2z.\end{aligned}$$

(a) Stanovte fundamentální systém a fundamentální matici této soustavy.

(b) Stanovte řešení počáteční úlohy s podmínkami $x(0)=1, y(0)=2, z(0)=3$.

S5.12 (5b) Je dána funkce f předpisem $f(x,y) = e^{x^2}(y^2+xy+\frac{1}{2})$.

(a) Stanovte stacionární body funkce f,

(b) Podle Hessovy matice rozhodněte, ve kterých stacionárních bodech nastává extrém a jaký.

S7.10 (5b) Jsou dány funkce $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ a $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$.

(a) Napište Maclaurinovy rozvoje funkcí f i F.

(b) Spočtěte intervaly konvergence obou řad z bodu a)

Zkouška z MA 2 (2. část) 24.6.2004

Jméno a příjmení: . . . . **Hodnocení:** . . . . .

Kroužek : . . . . **Cvičící:** . . . .

V1.07 (4b)
Je dána posloupnost funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $f_n(x) \in C(\langle 0;1\rangle)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in \langle 0,1\rangle$.
V_1: $f_n \to 0$ na $\langle 0,1\rangle$.
V_2: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.
Který z následujících výroků je pravdivý?
a) $V_1 \Rightarrow V_2$; b) $V_2 \Rightarrow V_1$; c) $V_1 \Leftrightarrow V_2$.
Případnou pravdivost implikace dokažte. Eventuální nepravdivost implikace ilustrujte na příkladu.

V2.07 (3b) Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$ je mocninná řada.
V_1: Uvedená řada konverguje pro $x=0$.
V_2: Poloměr konvergence této řady je $R=1$.
Který z následujících výroků je pravdivý?
a) $V_1 \Rightarrow V_2$; b) $V_2 \Rightarrow V_1$; c) $V_1 \Leftrightarrow V_2$.
Případnou pravdivost implikace dokažte. Eventuální nepravdivost implikace ilustrujte na příkladu.

V5.01 (4b) Funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad [x,y] \ne 0,\ f(0,0)=0.$$

(a) Rozhodněte, zda funkce f je spojitá v bodě $X_0 = [0,0]$.

(b) Zjistěte, zda existuje totální diferenciál funkce f v bodě X_0.

(c) Rozhodněte, zda funkce $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité v bodě X_0.

B Zkouška z MA 2 (1. část) 17.6.2004

Jméno a příjmení: . . . . **Hodnocení:** . . . . .
Kroužek : . . . . **Cvičící:** . . . .

S1.08 (5b) Je dána diferenciální rovnice $\dot{x} = \dfrac{x-1}{t}$ pro neznámou funkci $x = x(t)$.

(a) Stanovte obecné řešení a nakreslete systém integrálních čar.

(b) Řešte počáteční úlohu pro danou rovnici s podmínkou $x(1) = 0$.

(c) Napište rovnici systému ortogonálních křivek a vyřešte ji.

S2.04 (5b) Je dán integrál $\iint_{\Omega} x\,dxdy$, kde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2y;\ x \ge 0\}$.

(a) Vypočtěte daný integrál substitucí do polárních souřadnic.

(b) Převeďte daný integrál na oba dvojnásobné integrály.

(c) Čemu se rovnají oba integrály z bodu b)? Zdůvodněte.

S3.10 (5b) Je dána funkce $f = f(x,y)$ předpisem $f(x,y) = \dfrac{1}{\arctan\frac{x}{y}}$ a bod $M = [\sqrt{3}, 1]$.

(a) Stanovte diferenciál funkce f v bodě M.

(b) Stanovte derivaci funkce f v bodě M ve směru vektoru $\vec{v} = (-1, \sqrt{2})^T$.

(c) Stanovte směr a velikost největšího spádu funkce f v bodě $Q = [-1,1]$.

(d) Stanovte vektor normály a tečnou rovinu ke grafu funkce f v bodě $T = [-1,1,?]$.

(e) Stanovte tečnu k hladině funkce f procházející bodem Q.

æ

S6.06 (5b) Je dána funkce f předpisem $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$, $x \in (-\pi,\pi)$.

(a) Stanovte Fourierovu řadu funkce f.

(b) Stanovte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(c) Nakreslete graf součtu $s(x)$ Fourierovy řady a vypočtěte $s(\frac{3\pi}{2}), s(3\pi)$.

B Zkouška z MA 2 (2. část) 17.6.2004

Jméno a příjmení: . . . . **Hodnocení:** . . . . .
Kroužek : . . . . **Cvičící:** . . . .

V1.06 (4b) Buď $M \subset \mathbb{R}$ omezená množina.
V_1: $f_n \rightrightarrows f$ na M.
V_2: $f_n \to f$ na M.
Který z následujících výroků je pravdivý?
a) $V_1 \Rightarrow V_2$; b) $V_2 \Rightarrow V_1$; c) $V_1 \Leftrightarrow V_2$.
Případnou pravdivost implikace dokažte. Eventuální nepravdivost implikace ilustrujte na příkladu.
æ

V2.06 (3b) Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n$ je mocninná řada.
V_1: Uvedená řada diverguje pro $x=5$.
V_2: Poloměr konvergence této řady je $R=1$.
Který z následujících výroků je pravdivý?
a) $V_1 \Rightarrow V_2$; b) $V_2 \Rightarrow V_1$; c) $V_1 \Leftrightarrow V_2$.
Případnou pravdivost implikace dokažte. Eventuální nepravdivost implikace ilustrujte na příkladu.

V4.04 (4b) Je dána funkce $f\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ otevřená.
V_1: Funkce f nabývá v bodě $x_0 \in \Omega$ ostrého maxima.
V_2: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0) \le 0$ pro každé $\vec{s} \in V_2$, $\|\vec{s}\| = 1$.
Který z následujících výroků je pravdivý?
a) $V_1 \Rightarrow V_2$; b) $V_2 \Rightarrow V_1$; c) $V_1 \Leftrightarrow V_2$.
Případnou pravdivost implikace dokažte. Eventuální nepravdivost implikace ilustrujte na příkladu.