Sbírka příkladů z matematické analýzy II

Petr Tomiczek

Obsah

2 Diferenciální rovnice 1. řádu

2.1 Separace proměnných

Příklad 1 : Najděte obecné řešení (obecný integrál) diferenciální rovnice

$$y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y\,.$$

Teorie

Separací proměnných převedeme rovnici na tvar

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \;\Rightarrow\; \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

a substitucemi $u = \sin y$, $v = \cos x$ dostaneme po integrování

$$\ln|u| = -\ln|v| + \ln C\,, \qquad \text{neboli} \qquad \sin y = \frac{C}{\cos x} \qquad \text{(obecný integrál).}$$

2. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ $\quad\left[1 + y^2 = C(1 - x^2)\right]$
3. $xyy' = 1 - x^2$ $\quad\left[x^2 + y^2 = \ln Cx^2\right]$
4. $y' \operatorname{tg} x - y = a$ $\quad[y = C\sin x - a]$
5. $xydx + (x + 1)dy = 0$ $\quad[y = C(x + 1)e^{-x}]$
6. $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$ $\quad\left[\ln|x| = C + \sqrt{y^2 + 1}; x = 0\right]$
7. $e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0$ $\quad\left[1 + e^y = C(1 + x^2)\right]$
8. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0\,,\ y(0) = 1$ $\quad\left[y\{\ln(1 - x^2) + 1\} = 1\right]$
9. $y' \sin x = y\ln y\,,\ y(\frac{\pi}{2}) = e$ $\quad\left[y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right]$
10. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx\,,\ y(0) = \frac{\pi}{4}$ $\quad\left[\cos x = \sqrt{2}\cos y\right]$
11. $y' \operatorname{cotg} x + y = 2\,,\ y(\frac{\pi}{3}) = 0$ $\quad[y = 2 - 4\cos x]$

Řešení pomocí webMathematicy

2.2 Rovnice umožnující přechod k separaci proměnných.

<u>*Příklad 12*</u> : Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2(x+y)}\,.$$

Teorie

Substitucí $x + y = u\,,\ 1 + y' = u'$ převedeme rovnici na tvar

$$u' - 1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2u} \ \Rightarrow\ \frac{du}{dx} = \frac{1-u}{2u}\,.$$

Separaci proměnných a integrováním dostaneme

$$\int \frac{2u}{1-u}\,du = \int 1\,dx\,, \qquad \text{neboli} \qquad -2u - 2\ln|1-u| = x - C$$

a přejdeme k původním proměnným $3x + 2y + 2\ln|1-x-y| = C\,.$

<u>*Příklad 13*</u> : Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$(x+y+2)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0\,.$$

Substitucí $x + y = u\,,\ dx + dy = du$ převedeme rovnici na tvar

$$(u+2)\,dx + (2u-1)(du-dx) = 0 \ \Rightarrow\ (3-u)\,dx + (2u-1)\,du = 0\,.$$

Separaci proměnných a integrováním dostaneme

$$\int \frac{2u-1}{3-u}\,du + \int 1\,dx = -C\,, \qquad \text{neboli} \qquad -2u - 5\ln|u-3| + x = -C$$

a přejdeme k původním proměnným $x + 2y + 5\ln|x+y-3| = C\,.$

14. $y' - y = 2x - 3$ $\quad [2x + y - 1 = Ce^x]$

15. $y' = \sin(x-y)$ $\quad \left[x + C = \operatorname{cotg}\left(\frac{y-x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

16. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$ $\quad \left[\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2) = x + C\right]$

17. $y' = \cos(x-y-1)$ $\quad \left[y = x - 1 - 2\operatorname{arcotg}\left(\frac{1}{C-x}\right) + 2k\pi; k \in Z\right]$

18. $y'\sqrt{1+x+y} = x + y - 1$ $\quad \left[x + C = 2u + \frac{2}{3}\ln|u-1| - \frac{8}{3}\ln(u+2)\right]$
$\left[u = \sqrt{1+x+y}\right]$

webMathematica

Příklad 19 : Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{x^2 + 2xy}{xy}\,.$$

Teorie

Substitucí $y = ux$, $y' = u'x + u$ převedeme rovnici na tvar

$$u'x + u = -\frac{x^2 + 2xux}{xux} \;\Rightarrow\; \frac{u\,du}{(u+1)^2} = -\frac{dx}{x}\,.$$

Integrováním dostaneme

$$\int \frac{u+1-1}{(u+1)^2}\,du = \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} = -\ln|x| + C$$

a přejdeme k původním proměnným

$$\ln|\frac{y}{x}+1| + \frac{1}{\frac{y}{x}+1} = -\ln|x| + C \;\Rightarrow\; \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C\,.$$

20. $y' = \frac{x+y}{x-y}$ $\left[\operatorname{arcotg}\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2+y^2}\right]$

21. $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ $\left[x^2 + y^2 = Cy\right]$

22. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$ $\left[x^2 = C^2 + 2Cy)\right]$

23. $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$ $\left[(x+y)^2 = Cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}}\right]$

24. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ $\left[y^2 - x^2 = Cy\,,\; y = 0\right]$

25. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$ $\left[\ln Cx = \operatorname{cotg}(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x})\right]$ $\left[y = xe^{2k\pi}, k \in Z\right]$

26. $y + \sqrt{x^2+y^2} - xy' = 0\,,\; y(1) = 0$ $\left[y = \frac{x^2-1}{2}\right]$

27. $(xy' - y)\operatorname{arcotg}\frac{y}{x} = x\,,\; y(1) = 0$ $\left[\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{y}{x}\operatorname{arcotg}\frac{y}{x}}\right]$

28. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0\,,\; y(0) = 1$ $\left[y^3 = y^2 - x^2\right]$

29. $y' = \frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}\,,\; y(1) = 1$ $\left[y = -x\right]$

webMathematica

2.3 Variace konstant

Příklad 30 : Metodou variace konstanty řešte diferenciální rovnici

$$y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x\,.$$

Teorie

Nejdříve vyřešíme homogenní rovnici metodou separace proměnných

$$y' \cos^2 x + y = 0 \;\Rightarrow\; \ln y + \operatorname{tg} x = \ln C \;\Rightarrow\; y = Ce^{-tgx}\,.$$

Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $y = C(x)e^{-tgx}$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$(C'(x)e^{-tgx} + C(x)e^{-tgx}\frac{1}{\cos^2 x}) \cos^2 x + C(x)e^{-tgx} = \operatorname{tg} x\,.$$

tedy

$$C'(x)e^{-tgx} \cos^2 x = \operatorname{tg} x \;\Rightarrow\; C(x) = e^{tgx}(tgx - 1) + K\,.$$

Obecné řešení rovnice má tvar $y = Ce^{-tgx} + \operatorname{tg} x = 1\,.$

31. $xy' - 2y = 2x^4$ $\quad\left[y = Cx^2 + x^4\right]$

32. $xy' + y + 1 = 0$ $\quad[xy = C - \ln|x|]$

33. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$ $\quad\left[xy = (x^3 + C)e^{-x}\right]$

34. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$ $\quad[y = e^x(\ln|x| + C)]$

35. $y = x(y' - x\cos x)$ $\quad[y = x(C + \sin x)]$

36. $(xy' - 1)\ln x = 2y$ $\quad\left[y = C\ln^2 x - \ln x\right]$

37. $y \sin x + y' \cos x = 1$ $\quad[y = \sin x + C\cos x]$

38. $(2e^y - x)y' = 1$ $\quad\left[x = e^y + Ce^{-y}\right]$

39. $y' = \frac{y}{3x - y^2}$ $\quad\left[x = Cy^3 + y^2\right]$

40. $y' = \frac{1}{x\sin y + 2\sin 2y}$ $\quad\left[x = 8\sin^2\frac{y}{2} + Ce^{-\cos y}\right]$

41. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^{-3}}\,,\; y(1) = 1$ $\quad\left[y = -\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}\right]$

42. $y' - 2xy = 1\,,\; y(0) = 0$ $\quad\left[y = e^{x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt\right]$

43. $2\sqrt{x}y' - y = -\sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}\,,\; y$ je omezená pro $\to \infty$ $\quad[y = \cos\sqrt{x}]$

44. $2x^2y' - xy = 2x\cos x - 3\sin x\,,\; y \to 0$ pro $x \to \infty$ $\quad\left[y = \frac{\sin x}{x}\right]$

45. $(1 + x^2)\ln(1 + x^2)y' - 2xy = \ln(1 + x^2) - 2x \operatorname{arcotg} x$ $\quad[y = \operatorname{arcotg} x]$
$\left[y \to -\frac{\pi}{2}\text{ pro } x \to -\infty\right]$

webMathematica

2.4 Bernoulliova rovnice

Příklad 46: Převodem na lineární diferenciální rovnici vyřešte

$$x\,y' - y = x^2\,y^{-1}\,.$$

Teorie

Substitucí $z = y^2 \;\Rightarrow\; z' = 2yy'$ dostaneme

$$xy'y - y^2 = x^2 \quad\Rightarrow\quad xz' - 2z = 2x^2\,.$$

Vyřešíme lineární rovnici

1. hom. rovnice

$xz' - 2z = 0$

$z_h = C\,e^{x^2}$

2. part. řešení

$x\,C'\,e^{x^2} = 2x^2$

$C = e^{-x^2}$

$z_p = e^{-x^2}\,e^{x^2} = 1$

3. obecné řešení

$z = C\,e^{x^2} + 1 \;\Rightarrow\qquad y^2 = C\,e^{x^2} + 1\,.$

47. $y' + 2y = y^2 e^x$ $\qquad \left[y(e^x + Ce^{2x}) = 1, y = 0\right]$
48. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$ $\qquad \left[y = x^4 \ln^2 Cx, y = 0\right]$
49. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$ $\qquad \left[y^{-2} = x^4(2e^x + C), y = 0\right]$
50. $(1 + x^2)y' = xy + x^2y^2$ $\qquad \left[\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(C - \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+1})\right)\right]$

webMathematica

3 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

3.1 Systémy funkcí

Příklad 51 : Máme rozhodnout o lineární závislosti nebo nezávislosti funkcí $1, x, x^2$ na intervalu $I = (-\infty, \infty)$. Teorie

Budeme zkoumat, kdy $\forall\, x \in I$ nastane rovnost

$$c_1\, 1 + c_2\, x + c_3\, x^2 = 0\,.$$

Postupně pro $x = 0$ dostaneme $c_1 = 0$, pak pro $x = 1$ a $x = -1$ dostaneme $c_2 + c_3 = 0$ a $-c_2 + c_3 = 0$. Odtud plyne $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Podle definice jsou funkce $1, x, x^2$ lineárně nezávislé. Wronskián daných funkcí je

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0\,.$$

Tedy i podle věty 10.4 jsou funkce $1, x, x^2$ lineárně nezávislé.

Rozhodněte o lineární závislosti nebo nezávislosti následujících funkcí

52. $1, 2, x, x^2$ [závislé]
53. e^x, xe^x, x^2e^x [nezávislé]
54. $5, \cos^2 x, \sin^2 x$ [závislé]
55. $\cos x, \cos(x+1), \cos(x-2)$ [závislé]
56. $1, \arcsin x, \arccos x$ [závislé]
57. $\cos x, \sin x, \cos 2x$ [nezávislé]

Najděte Wronskián funkcí

58. $1, x$ $[1]$
59. e^{-x}, xe^{-x} $\left[e^{-2x}\right]$
60. $2, \cos x, \cos 2x$ $\left[-8\sin^3 x\right]$
61. $4, \sin^2 x, \cos 2x$ $[0]$
62. $e^{-3x}\sin 2x, e^{-3x}\cos 2x$ $\left[-2e^{-6x}\right]$

webMathematica

3.2 Eulerova rovnice

Řešení Eulerovy rovnice $x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x\, y' + a_0 y = 0$, kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ hledáme ve tvaru $y(x) = x^\lambda$, (popř. $x^\lambda \ln x, \ldots, x^\lambda \ln^{k-1} x$) $\lambda \in \mathbb{C}$.

Teorie

Příklad 63 : Dosazením funkce $y(x) = x^\lambda$ do rovnice

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

dostaneme $x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - 4x\lambda x^{\lambda-1} + 6x^\lambda = 0$, tedy

$$(\lambda^2 - 5\lambda + 6)\, x^\lambda = 0\,.$$

Tato rovnost je splněna (při $x \neq 0$) pro kořeny $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, uvedeného polynomu. Funkce $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ tvoří fundamentální systém dané rovnice a její obecné řešení má tvar

$$y = C_1\, x^2 + C_2\, x^3\,.$$

Příklad 64 : Podobně při řešení rovnice $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ dostaneme $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$ a fundamentální systém rovnice je tvořen funkcemi $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2 \ln x$. Obecné řešení má tedy tvar $y = C_1\, x^2 + C_2\, x^2 \ln x$.

Příklad 65 : Řešení rovnice $x^2y'' + 3xy' + 2y = 0$ hledáme ve tvaru $y(x) = x^\lambda$. Po dosazení do rovnice dostaneme $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$. Do fundamentálního systému tedy patří funkce $y_1(x) = x^{1+i}$, $y_2(x) = x^{1-i}$ nebo $y_1(x) = x\cos(\ln x)$, $y_2(x) = x\sin(\ln x)$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = C_1\, x\cos(\ln x) + C_2\, x\sin(\ln x)\,.$$

66. $x^2y'' - 3xy' - y = 0$ $\left[y = C_1x^{2+\sqrt{5}} + C_2x^{2-\sqrt{5}}\right]$

67. $x^3y''' - x^2y'' = 0$ $[y = C_1 + C_2x + C_3x\ln x]$

68. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$ $\left[y = C_1x^{-1} + C_2x^{-3}\right]$

69. $x^2y'' + 7xy' + 8y = 0$ $\left[y = C_1x^{-2} + C_2x^{-4}\right]$

70. $x^3y''' - 6y = 0$ $\left[y = C_1x^3 + C_2\cos(2\ln x) + C_3\sin(2\ln x)\right]$

71. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0\,;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ $\left[y = C_2x^2\right]$

webMathematica

3.3 Rovnice s konstantními koeficienty

Příklad 72 : Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$y'' - y' - 12y = 0$$

hledáme ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ (popř. $x\mathrm{e}^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$), kde číselný parametr λ je kořenem **charakteristické rovnice (charakteristického polynomu)**

$$\lambda^2 - \lambda + 12 = 0.$$

Tedy $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$, fundamentální systém rovnice je tvořen funkcemi e^{-4x}, e^{3x} a obecné řešení rovnice má tvar

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-4x} + C_2\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Teorie

Příklad 73 : Rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

má charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$. Fundamentální systém rovnice je nyní tvořen funkcemi $y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Příklad 74 : K rovnici $y'' + 4y = 0$ přísluší charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4 = 0$ s kořeny $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Fundamentální systém je tvořen funkcemi $y_1(x) = \mathrm{e}^{2ix}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{-2ix}$ nebo $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 3x$. Obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\,.$$

75. $y''' + y'' + y' - y = 0$ $\quad [y = e^x(1 + x), y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3]$
76. $y'' - 4y' + 3y = 0; y(0) = 6, y'(0) = 10$ $\quad \left[y = 4e^x + 2e^{3x}\right]$
77. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$ $\quad \left[y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}\right]$
78. $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$ $\quad \left[y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6x)\right]$
79. $4y'' - 8y' + 5y = 0$ $\quad \left[y = e^x(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2})\right]$
80. $y''' - 8y = 0$ $\quad \left[y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x\right]$
81. $y^{(4)}+4y'''+10y''+12y'+5y = 0$ $\quad [y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)e^{-x}]$
82. $y'' - 2y' + 2y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 1$ $\quad [y = e^x \sin x]$
83. $y'' - 2y' + 3y = 0; y(0) = 1, y'(0) = 3$ $\quad \left[y = e^x(\cos \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x)\right]$

webMathematica

3.4 Metoda snižování řádu

Pokud známe jedno řešení $y_1(x)$ homogenní rovnice, pak další partikulární řešení hledáme ve tvaru $y(x) = y_1(x) \cdot z(x)$.

Teorie

Příklad 84: Rovnice $(\sin x - \cos x)\, y'' - 2\sin x\, y' + (\cos x + \sin x)\, y = 0$ má jedno řešení $y_1 = \mathrm{e}^x$. Pro druhé řešení $y(x) = \mathrm{e}^x z(x)$, platí $y' = \mathrm{e}^x(z + z')$, $y'' = \mathrm{e}^x(z + 2z' + z'')$ a po dosazení do původní rovnice máme

$$(\sin x - \cos x)\, \mathrm{e}^x(z + 2z' + z'') - 2\sin x\, \mathrm{e}^x(z + z') + (\cos x + \sin x)\, \mathrm{e}^x z = 0 \;\Rightarrow$$

$$(\sin x - \cos x)\,(2z' + z'') - 2\sin x\, z' = 0 \;\Rightarrow\; (u = z')$$

$$(\sin x - \cos x)\, u' - \cos x\, 2u = 0 \Rightarrow (\sin x - \cos x)\, du = \cos x\, 2u\, dx \;\Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{2u}\, du = \int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\, dx\,; \qquad \text{vypočteme integrál vpravo}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{\sin x - \cos x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x + \cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}\, dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{c} v = \sin x - \cos x \\ dv = (\cos x + \sin x)\, dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int -1\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\, dv = -\frac{x}{2} + \ln|\sin x - \cos x| + C\,;$$

tedy $\quad \dfrac{1}{2}\ln u = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln|\sin x - \cos x| + \hat{C} \;\Rightarrow\; u = C\mathrm{e}^{-x}(\sin x - \cos x)\ (= z') \;\Rightarrow$

$z = C\mathrm{e}^{-x}(-\sin x) \;\Rightarrow y = \mathrm{e}^x C\mathrm{e}^{-x}(-\sin x) = -C\sin x$ a obecné řešení má tvar

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\sin x\,.$$

Nalezněte obecné řešení následujících rovnic, jestliže znáte partikulární řešení

85. $(1 - x^2)y'' - xy' + \frac{1}{4}y = 0; y_1 = \sqrt{1+x}$ $\quad \left[y = C_1\sqrt{1+x} + C_2\sqrt{1-x}\right]$
86. $x^2(x+1)y'' - 2y = 0; y_1 = 1 + \frac{1}{x}$ $\quad \left[y = C_1(1 + \frac{1}{x}) + C_2(\frac{x}{2} + 1 - \frac{x+1}{x}\ln|x+1|)\right]$
87. $xy'' + 2y' - xy = 0; y_1 = \frac{e^x}{x}$ $\quad [xy = C_1e^{-x} + C_2e^x]$
88. $y'' - 2(1 + \mathrm{tg}^2\, x)y = 0; y_1 = \mathrm{tg}\, x$ $\quad [y = C_1\,\mathrm{tg}\, x + C_2(1 + x\,\mathrm{tg}\, x)]$
89. $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0; y_1 = e^x - 1$ $\quad \left[y = C_1(e^x - 1) + \frac{C_2}{e^x+1}\right]$
90. $x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$ $\quad \left[y = C_1x + \frac{C_2}{x} + C_3(x\ln|x| + 1)\right]$ $\left[y_1 = x, y_2 = \frac{1}{x}\right]$
91. $(x^2 - 2x + 3)y''' - (x^2+1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ $\quad \left[y = C_1x + C_2e^x + C_3(x^2 - 1)\right]$ $\left[y_1 = x, y_2 = e^x\right]$

webMathematica

3.5 Nehomogenní rovnice

Teorie

Příklad 92 : Metodou variace konstant vyřešíme rovnici

$$y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}\,.$$

1. Určíme obecné řešení homogenní rovnice $y'' + 9y = 0$ (viz metoda charakteristické rovnice, příklad (72))
$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow y_h(x) = C_1\,\cos 3x + C_2\,\sin 3x\,.$$
2. Partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru
$$y_p(x) = C_1(x)\cos 3x + C_2(x)\sin 3x\,.$$
Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ splňují soustavu algebraických rovnic:
$$\begin{aligned} C_1'\cos 3x + C_2'\sin 3x &= 0 &\Rightarrow\quad 3C_1'\cos 3x\sin 3x + 3C_2'\sin^2 3x &= 0\,,\\ -3C_1'\sin 3x + 3C_2'\cos 3x &= \tfrac{1}{\sin 3x} &\Rightarrow -3C_1'\sin 3x\cos 3x + 3C_2'\cos^2 3x &= \tfrac{\cos 3x}{\sin 3x}\,. \end{aligned}$$
Odtud po sečtení rovnic dostaneme $3C_2' = \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|$ a z první rovnice plyne $C_1'\cos 3x + \frac{\cos 3x}{3} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{x}{3}$. Partikulární řešení má tvar
$$y_p(x) = -\frac{x}{3}\,\cos x + \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|\,\sin 3x\,.$$
3. Obecným řešením úlohy je funkce
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\,\cos 3x + C_2\,\sin 3x - \frac{x}{3}\,\cos x + \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|\,\sin 3x\,.$$

Řešte rovnice

93. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ $\qquad [y = e^x(x\ln|x| + C_1x + C_2)]$

94. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$ $\qquad \left[y = e^x(C_1x + C_2 - \ln\sqrt{x^2+1} + x\,\mathrm{arcotg}\,x)\right]$

95. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$ $\qquad \left[y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x+1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}\right]$

96. $y'' + y + \mathrm{cotg}^2\,x = 0$ $\qquad \left[y = 2 + C_1\cos x + C_2\sin x + \cos(x)\ln|\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}|\right]$

Vyřešte rovnici —,$y'' - y' = f(x)$, jestliže

97. $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ $\qquad [y = e^x(x + C_1) - (e^x+1)\ln(e^x+1) + C_2]$

98. $f(x) = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$ $\qquad \left[y = \frac{1}{2}e^x(\arcsin(e^x) + e^x\sqrt{1-e^{2x}} + C_1) + \frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3} + C_2\right]$

99. $f(x) = e^{2x}\cos(e^x)$ $\qquad [y = C_1e^x - \cos(e^x) + C_2]$

webMathematica

3.6 Metoda odhadu tvaru partikulárního řešení

Teorie

Příklad 100 : Pomocí odhadu tvaru partikulárníbo řešení vyřešíme rovnici

$$y'' - 5y' = (x-1)^2 .$$

1. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, má kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$ a homogenní řešení má tvar
$$y_h = C_1 + C_2 \, \mathrm{e}^{5x} .$$
2. Z rovnosti
$$(x-1)^2 = \mathrm{e}^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$$
vyplývá $a = 0$, $b = 0$, $n = 2$, $m = 0$ $\Rightarrow$ $k = 2$, $R_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, kde a_2, a_1, a_0 jsou konstanty. Kritické číslo $a + i\,b = 0$ je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, tedy $r = 1$.

   Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru
$$y_p(x) = x\,(a_2x^2 + a_1x + a_0)\,,$$
potom $y_p'(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 + x\,(2a_2x + a_1) = 3a_2x^2 + 2a_1x + a_0$, $y_p''(x) = 6a_2x + 2a_1$. Po dosazení y_p', y_p'' do dané rovnice dostaneme:
$$6a_2x + 2a_1 - 5\,(3a_2x^2 + 2a_1x + a_0) = (x-1)^2\,,$$
$$-15a_2x^2 + (6a_2 - 10a_1)x + 2a_1 - 5a_0 = x^2 - 2x + 1\,,$$
$$\Rightarrow \quad a_2 = \tfrac{-1}{15}\,,\ a_1 = \tfrac{4}{25}\,,\ = a_0 = \tfrac{-17}{125}\,,$$
a partikulárním řešením je funkce $y_p(x) = x\,(\frac{-1}{15}x^2 + \frac{4}{25}x + \frac{-17}{125})$.
3. Obecné řešení má tvar $y(x) = C_1 + C_2\,x\mathrm{e}^{5x} + x\,(\frac{-1}{15}x^2 + \frac{4}{25}x + \frac{-17}{125})$.

Metodou odhadu řešte rovnice

101. $y'' + y = 4xe^x$ $\quad [y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x+2)e^x]$

102. $y'' - y = 2e^x - x^2$ $\quad \left[y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2\right]$

103. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$ $\quad \left[y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + (\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3})e^x\right]$

104. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ $\quad \left[y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{\sin x}{10} + \frac{3\cos x}{10}\right]$

105. $y'' + y = 4\sin x$ $\quad [y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x]$

106. $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$ $\quad \left[y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (\frac{x}{10} - \frac{12}{100})\cos x - (\frac{3x}{10} + \frac{34}{100})\sin x\right]$

107. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$ $\left[y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \frac{x}{5}e^{-4x} - (\frac{x}{6} + \frac{1}{36})e^{-x}\right]$

108. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$ $\left[y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + e^{3x}(\frac{6}{37}\sin x - \frac{1}{37}\cos x)\right]$

109. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$ $\left[y = (C_1 + C_2x + x^3)e^x\right]$

110. $y'' + y = x\sin x$ $\left[y = (C_1 - \frac{x^2}{4})\cos x + (C_2 + \frac{x}{4})\sin x\right]$

Řešte rovnice s počáteční podmínkou

111. $y'' + 9y = 6e^{3x}$; $y(0) = y'(0) = 0$ $\left[y = -\frac{1}{3}(\cos 3x + \sin 3x - e^{3x})\right]$

112. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$ $\left[y = e^{2x}(\cos x - 2\sin x) + (x+1)^2e^x\right]$

113. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$; $y(0) = y'(0) = 0$ $\left[y = (x + \frac{3}{5})e^{-3x} + \frac{1}{5}(4\sin x - 3\cos x)\right]$

114. $y'' + 4y = \sin x$; $y(0) = y'(0) = 1$ $\left[y = \cos 2x + \frac{1}{3}(\sin 2x + \sin x)\right]$

115. $y'' + y = 2\cos x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ $\left[y = \cos x + x\sin x\right]$

Odhadněte partikulární řešení následujících rovnic

116. $y'' - 7y' = (x-1)^2$ $\left[A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x\right]$

117. $y'' + 7x' = e^{-7x}$ $\left[Axe^{-7x}\right]$

118. $y'' - 8y' + 16y = (10 - x)e^{4x}$ $\left[(A_1x^3 + A_2x^2)e^{4x}\right]$

119. $y'' + 25y = \cos 5x$ $\left[x(A\cos 5x + B\sin 5x)\right]$

120. $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$ $\left[(A\cos 2x + B\sin 2x)e^{2x}\right]$

121. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x)$ $\left[x(A\cos 2x + B\sin 2x)e^{2x}\right]$

122. $y^{(4)} - y''' = 4$ $\left[Ax^3\right]$

123. $y''' + 2y'' + y' = (2x+1)\sin x + (x^2 - 4x)\cos x$ $\left[(Ax^2 + Bx + C)\cos x + \right]$
$\left[+ (Dx^2 + Ex + F)\sin x\right]$

124. $y''' - y' = e^x\sin x + 2x^2$ $\left[e^x(A\cos x + B\sin x) + \right]$
$\left[+ x(Cx^2 + Dx + E)\right]$

125. $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = e^x(x\cos x + \sin x)$ $\left[x^2e^x\{(Ax + B)\cos x + \right]$
$\left[+ (Cx + D)\sin x\}\right]$

126. $y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 3\cos 2x + 1$ $\left[x^2(A\cos 2x + B\sin 2x) + C\right]$
$\left[y = 3\cos 2x + 1\right]$

webMathematica

3.7 Okrajové úlohy

Teorie

Příklad 127: Pomocí charakteristické rovnice a dosazením okrajových podmínek vyřešíme smíšenou okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} &y'' - 2y' - 8y = 0\,, \qquad x \in (0,1)\,,\\ &y(0) = 1\,,\ \ y'(1) = 0\,. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4\,,\ \lambda_2 = -2$ a obecným řešením úlohy je funkce $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{4x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x}$. Z okrajových podmínek dostaneme

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2\,,\\ 0 &= 4C_1\mathrm{e}^4 - 2C_2\mathrm{e}^{-2}\,, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_1 &= \tfrac{1}{1+2\mathrm{e}^6}\,,\\ C_2 &= \tfrac{2\mathrm{e}^6}{1+2\mathrm{e}^6}\,. \end{aligned}$$

Řešením okrajové úlohy je funkce $y(x) = \frac{1}{1+2\mathrm{e}^6}\,\mathrm{e}^{4x} + \frac{2\mathrm{e}^6}{1+2\mathrm{e}^6}\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Řešte následující okrajové úlohy

128. $y'' - y = 0\,;\ y(0) = 0, y(2\pi) = 1$ $\left[y = \frac{\sinh x}{\sinh 2\pi}\right]$

129. $y'' + y = 0\,;\ y(0) = 0, y(2\pi) = 1$ [nemá řešení]

130. $y'' - k^2 y = 0\,;\ y(0) = v_1, y(x_0) = v_2$ $\left[y = \frac{1}{\sinh kx_0}(v_1 \sinh k(x_0 - x) + v_2 \sinh kx)\right]$

131. $y'' - \alpha^2 y = 0\,;\ y(0) = v, y'(x_0) = 0$ $\left[y = v\frac{\cosh(x_0 - x)}{\cosh \alpha x_0}\right]$

132. $y'' - \alpha^2 s y = 0\,;\ y(0) = \frac{1}{s}, y'(x_0) = 0$ $\left[s < 0; y = \frac{\cos\alpha\sqrt{-s}(x_0 - x)}{s\cos\alpha\sqrt{-s}x_0} \text{ pro } x_0 \neq \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha\sqrt{-s}}\right]$
$\left[\text{pro } x_0 = \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha\sqrt{-s}} \text{ nemá řešení; } s > 0; y = \frac{\cosh\alpha\sqrt{s}(x_0 - x)}{s\cosh\alpha\sqrt{s}x_0}; k = 1, 2, 3, \dots\right]$

133. $y'' - \lambda^2 y = 0\,;\ \lambda \neq 0, y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{\lambda}$ $\left[y = \frac{\sinh \lambda x}{\lambda \sinh \lambda}\right]$

134. $y'' - \lambda^2 y = 0\,;\ \lambda \neq, y(0) = 0, y'(1) = \frac{1}{\lambda}$ $\left[y = \frac{\sinh \lambda x}{\lambda^2 \cosh \lambda}\right]$

135. $y'' - \lambda^2 y = 0\,;\ \lambda \neq, y'(0) = 0, y(1) = \frac{1}{\lambda}$ $\left[y = \frac{\cosh \lambda x}{\lambda \cosh \lambda}\right]$

136. $xy'' + y' = 0; y(1) = \alpha y'(1)\,;\ y(x)$ je omezená pro $x \to \infty$ $[y = 0]$

137. $y^{(4)} - \lambda^4 y = 0; y(0) = y''(0) = 0, y(\pi) = y''(\pi) = 0$ $[y = C \sin kx$ pro $\lambda = k]$
$[k = 1, 2, 3, \dots \quad y = 0$ pro ostatní $\lambda]$

webMathematica

3.8 Úlohy na vlastní čísla a vlastní funkce

Teorie

<u>*Příklad 138*</u> : Určíme vlastní čísla a vlastní funkce okrajové úlohy

$$y'' + \lambda y = 0\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y'(\pi) = 0\,.$$

Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{kx}$, potom charakteristická rovnice má tvar $k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\lambda}\,.$

- Pro $\lambda < 0$ je $k_1 = \sqrt{-\lambda}$, $k_2 = -\sqrt{-\lambda}$ a obecné řešení má tvar

  $$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x} \Rightarrow y'(x) = \sqrt{-\lambda}\,C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda}\,C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}\,.$$

  Z okrajových podmínek dostáváme soustavu rovnic pro neznámé konstanty $C_1,\ C_2$

  $$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2\,,\\ 0 &= \sqrt{-\lambda}\,C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\pi} - \sqrt{-\lambda}\,C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\,, \end{aligned}\right\}\ C_1 = 0,\ C_2 = 0 \Rightarrow y = 0\,.$$

- Pro $\lambda = 0$ má obecné řešení tvar $y(x) = C_1 + C_2\,x \Rightarrow y'(x) = C_2$ a z okrajových podmínek dostaneme

  $$C_1 \in \mathbb{R}\,,\ C_2 = 0 \Rightarrow y = C_1\,.$$

- Pro $\lambda > 0$ má obecné řešení tvar

  $$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \Rightarrow y'(x) = -\sqrt{\lambda}\,C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}\,C_2 \cos\sqrt{\lambda}x\,.$$

  Z okrajových podmínek plyne

  $$\left.\begin{aligned} 0 &= C_2\,,\\ 0 &= -C_1\,\sin\sqrt{\lambda}\pi\,, \end{aligned}\right\}\ \sqrt{\lambda}\pi = n\pi\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

  Dostáváme tak **posloupnost vlastních čísel**

  $$\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$$

  a **posloupnost jim odpovídajících vlastních funkcí** je

  $$\{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots\}.$$

Najděte vlastní čísla a vlastní funkce úlohy $y'' + \lambda y = 0$, je-li

139. $x \in <0, \pi>, y(0) = y'(\pi) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2}{4}, y_K = \sin\frac{2K-1}{2}x, K \in N\right]$

140. $x \in <0, \pi>, y'(0) = y(\pi) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2}{4}, y_K = \cos\frac{2K-1}{2}x, K \in N\right]$

141. $x \in <1, 2>, y(1) = y(2) = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2, y_K = \sin K\pi x, K \in N\right]$

142. $x \in <1, 2>, y(1) = y'(2) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4}, y_K = \cos\frac{2K-1}{2}\pi x, K \in N\right]$

143. $x \in <1, 2>, y'(1) = y(2) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4}, y_K = \sin\frac{2k-1}{2}\pi x, K \in N\right]$

144. $x \in <1, 2>, y'(1) = y'(2) = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2, y_K = \cos K\pi x; K = 0, 1, 2, \dots\right]$

145. $x \in <a, b>, y(a) = y(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{(b-a)^2}, y_K = \sin\frac{K\pi(x-a)}{b-a}, K \in N\right]$

146. $x \in <a, b>, y(a) = y'(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}, y_K = \sin\frac{(2K-1)(x-a)\pi}{2(b-a)}, K \in N\right]$

147. $x \in <a, b>, y'(a) = y(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}, y_K = \cos\frac{(2K-1)(x-a)\pi}{2(b-a)}, K \in N\right]$

Najděte vlastní čísla a vlastní funkce následujících okrajových úloh

148. $y'' + 2y' + \lambda y = 0\,;\ x \in <0, l>, y(0) = y(l) = 0$ $\left[\lambda_K = 1 + \frac{K^2\pi^2}{\ln^2 l}\right]$
$\left[y_K = l^{-x}\sin\frac{K\pi x}{l}, K \in N\right]$

149. $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0\,;\ x \in <1, l>, y(1) = y(l) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{\ln^2 l}, y_K = \sin\frac{K\pi\ln x}{\ln l}\right]$

150. $y'' + (\lambda + 1)y = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2 - 1, K \in N\right]$
$x \in <0, 1>,\ y(0) = y'(0) = 0, y(1) - y'(1) = 0$ $[y_K = \sin(\mathrm{arcotg}(K\pi) + K\pi x)]$

151. $y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0\,;\ y(l) = 0$, y je omezená pro $x \to 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{l^2}, y_K = \frac{1}{x}\sin\frac{K\pi x}{l}\right]$

4 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Teorie

Příklad 152 :

4.1 Soustavy homogenních diferenciálních rovnic

153. $x' = 2x + y$ $\quad$ $\left[x = C_1e^t + C_2e^{5t}\right]$
$y' = 3x + 4y$ $\quad$ $\left[y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}\right]$

154. $x' = x - y$ $\quad$ $\left[x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}\right]$
$y' = y - 4x$ $\quad$ $\left[y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}\right]$

155. $x' + x - 8y = 0$ $\quad$ $\left[x = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t}\right]$
$y' - x - y = 0$ $\quad$ $\left[y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}\right]$

156. $x' = x + y$ $\quad$ $\left[x = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t\right]$
$y' = 3y - 2x$ $\quad$ $\left[y = e^{2t}\{(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t\}\right]$

157. $x' = x - 3y$ $\quad$ $[x = e^t(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t)]$
$y' = 3x + y$ $\quad$ $[y = e^t(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t)]$

158. $x' + x + 5y = 0$ $\quad$ $[x = (2C_2 - C_1)\cos 2t - (2C_1 + C_2)\sin 2t]$
$y' - x - y = 0$ $\quad$ $[y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t]$

159. $x' = 2x + y$ $\quad$ $\left[x = (C_1 + C_2t)e^{3t}\right]$
$y' = 4y - x$ $\quad$ $\left[y = (C_1 + C_2 + C_2t)e^{3t}\right]$

160. $x' = 3x - y$ $\quad$ $[x = (C_1 + C_2t)e^t]$
$y' = 4x - y$ $\quad$ $[y = (2C_1 - C_2 + 2C_2t)e^t]$

161. $x' = x + z - y$ $\quad$ $\left[x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}\right]$
$y' = x + y - z$ $\quad$ $[y = C_1e^t - 3C_3e^{-t}]$
$z' = 2x - y$ $\quad$ $\left[z = C_1e^t + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}\right]$

162. $x' = 3x - y + z$ $\quad$ $\left[x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}\right]$
$y' = x + y + z$ $\quad$ $\left[y = C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t}\right]$
$z' = 4x - y + 4z$ $\quad$ $\left[z = -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}\right]$

163. $x' = 4y - 2z - 3x$ $\quad$ $[x = C_1e^t + C_3e^{-t}]$
$y' = z + x$ $\quad$ $\left[y = C_1e^t + C_2e^{2t}\right]$
$z' = 6x - 6y + 5z$ $\quad$ $\left[z = 2C_2e^{2t} - C_3e^{-t}\right]$

164. $x' = x - y - z$ $\quad [x = e^t(2C_2 \sin 2t + 2C_3 \cos 2t)]$
$y' = x + y$ $\quad [y = e^t(C_1 - C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t)]$
$z' = 3x + z$ $\quad [z = e^t(-C_1 - 3C_3 \cos 2t + 3C_3 \sin 2t]$

165. $x' = 4x - y - z$ $\quad \left[x = C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3)e^{3t}\right]$
$y' = x + 2y - z$ $\quad \left[y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}\right]$
$z' = x - y + 2z$ $\quad \left[z = C_1 e^{2t} + C_3 e^{3t}\right]$

166. $x' = x - y + z$ $\quad \left[x = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}\right]$
$y' = x + y - z$ $\quad [y = (C_1 - 2C_2 + C_2 t)e^t]$
$z' = 2z - y$ $\quad \left[z = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}\right]$

167. $x' = 4x - y$ $\quad \left[x = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2)e^{2t}\right]$
$y' = 3x + y - z$ $\quad \left[y = \{2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)t + 2C_3 t^2\}e^{2t}\right]$
$z' = x + z$ $\quad \left[z = \{C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 - 2C_3)t + C_3 t^2\}e^{2t}\right]$

4.2 Soustavy nehomogenních diferenciálních rovnic

168. $x' = y + 2e^t$ $\quad \left[x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + te^t - t^2 - 2\right]$
$y' + x + t^2$ $\quad [y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + (t-1)e^t - 2t]$

169. $x' = y - 5\cos t$ $\quad \left[x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - 2\sin t - \cos t\right]$
$y' = 2x + y$ $\quad \left[y = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} + \sin t + 3\cos t\right]$

170. $x' = 4x + y - e^{2t}$ $\quad \left[x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + (t+1)e^{2t}\right]$
$y' = y - 2x$ $\quad \left[y = -2C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} - 2te^{2t}\right]$

171. $x' = 2y - x + 1$ $\quad [x = (C_1 + 2C_2 t)e^t - 3]$
$y' = 3y - 2x$ $\quad [y = (C_1 + C_2 + 2C_2 t)e^t - 2]$

172. $x' = 5x - 3y + 2e^{3t}$ $\quad \left[x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}\right]$
$y' = x + y + 5e^{-t}$ $\quad \left[y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}\right]$

173. $x' = 2x - 4y$ $\quad \left[x = 4C_1 e^t + C_2 e^{-2t} - 4te^t\right]$
$y' = x - 3y + 3e^t$ $\quad \left[y = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} - (t-1)e^t\right]$

174. $x' = 2x - y$ $\quad \left[x = C_1 e^{3t} + 3t^2 + 2t + C_2\right]$
$y' = y - 2x + 18t$ $\quad \left[y = -C_1 e^{3t} + 6t^2 - 2t + 2C_2 - 2\right]$

175. $x' = x + 2y + 16te^t$ $\quad \left[x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - (12t + 13)e^t\right]$
$y' = 2x - 2y$ $\quad \left[y = C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-3t} - (8t + 6)e^t\right]$

176. $x' = 2x - y$ $\quad \left[x = (C_1 + C_2 t - t^2)e^t\right]$
$y' = x + 2e^t$ $\quad \left[y = \{C_1 - C_2 + (C_2 + 2)t - t^2\}e^t\right]$

177. $x' = x - y + 8t$ $\quad [x = C_1 \cos 2t - C_2 \sin 2t + 2t + 2]$
$y' = 5x - y$ $\quad [y = (C_1 + 2C_2) \cos 2t + (2C_1 - C_2) \sin 2t + 10t]$

178. $x' = 2x - y$ $\quad \left[x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + e^t(2\cos t - \sin t)\right]$
$y' = 2y - x - 5e^t \sin t$ $\quad \left[y = C_1 e^t - C_2 e^{3t} + e^t(3\cos t + \sin t)\right]$

179. $x' = y + \operatorname{tg}^2 t - 1$ $\quad [x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t]$
$y' = -x + \operatorname{tg} t$ $\quad [y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2]$

180. $x' = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}$ $\quad [x = C_1 + 2C_2 e^{-t} + 2e^{-t} \ln|e^t - 1|]$
$y' = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}$ $\quad [y = -2C_1 - 3C_2 e^{-t} - 3e^{-t} \ln|e^t - 1|]$

181. $x' = x - y + \frac{1}{\cos t}$ $\quad [x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t) \ln|\cos t|]$
$y' = 2x - y$ $\quad [y = (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t + 2 \cos t \ln|\cos t| + 2t \sin t]$

182. $x' = 2x + y - 2z - t + 2$ $\quad [x = C_1 e^t + C_2 \sin t + C_3 \cos t]$
$y' = 1 - x$ $\quad [y = t - C_1 e^t + C_2 \cos t - C_3 \sin t]$
$z' = x + y - z - t + 1$ $\quad [z = 1 + C_2 \sin t + C_3 \cos t]$

Najděte partikulární řešení následujících soustav diferenciálních rovnic

183. $y' = y + z\,;\; y(0) = 0, z(0) = -1$ $\quad \left[y = e^{2t} - e^{3t}\right]$
$z' = -2y + 4z$ $\quad \left[z = e^{2t} - 2e^{3t}\right]$

184. $y' = 3y - z\,;\; y(0) = 1, z(0) = 5$ $\quad \left[y = e^{-2t}\right]$
$z' = 10y - 4z$ $\quad \left[z = 5e^{-2t}\right]$

185. $x' = 3x + 8y\,;\; x(0) = 6, y(0) = -2$ $\quad [x = 2(2e^t + e^{-t})]$
$y' = -3y - x$ $\quad [y = -e^t - e^{-t}]$

186. $x' = e^t - y - 5x\,;\; x(0) = \frac{119}{900}, y(0) = \frac{211}{900}$ $\quad \left[x = \frac{4}{25}e^t - \frac{1}{36}e^{2t}\right]$
$y' = e^{2t} + x - 3y$ $\quad \left[y = \frac{1}{25}e^t + \frac{7}{36}e^{2t}\right]$

187. $x' = y\,;\; x(0) = y(0) = 1$ $\quad [x = \cos t + \sin t]$
$y' = -x$ $\quad [y = \cos t - \sin t]$

188. $x' = 4x - 5y\,;\; x(0) = 0, y(0) = 1$ $\quad \left[x = (1 - 2t)e^{-2t}\right]$
$y' = x$ $\quad \left[y = te^{-2t}\right]$

189. $x' = x + y + t\,;\; x(0) = -\frac{7}{9}, y(0) = -\frac{5}{9}$ $\quad \left[x = -\frac{4}{3}t - \frac{7}{9}\right]$
$y' = x - 2y + 2t$ $\quad \left[y = \frac{1}{3}t - \frac{5}{9}\right]$

190. $x' = x + 5y\,;\; x(0) = -2, y(0) = 1$ $\quad [x = (\sin t - 2\cos t)e^{-t}]$
$y' = -3y - x$ $\quad [y = e^{-t} \cos t]$

191. $2x' = 6x - y - 6t^2 - t + 3\,;\ x(0) = 2, y(0) = 3$ $\quad\left[x = e^{2t} + e^{3t} + t^2 + t\right]$

$y' = 2y - 2t - 1$ $\quad\left[y = 2e^{2t} + t + 1\right]$

webMathematica

5 Posloupnosti a řady funkcí

Teorie

Příklad 192 :

5.1 Posloupnosti funkcí

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti $\{f_n(x)\}$, je-li

193. $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}$ $[x \in R$ nestejnoměrně, $x \in < -1, 1 >$ stejnoměrně$]$

194. $f_n(x) = x^n$ $\left[x \in < 0, 1 >\right.$ nestejnoměrně, $x \in < 0, \frac{1}{2} >$ stejnoměrně$\left.\right]$

195. $f_n(x) = \frac{\operatorname{arcotg} nx}{\sqrt{n+x}}$ $[x \in < 0, +\infty)$ stejnoměrně$]$

196. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ $[x \in < 0, 1 >$ stejnoměrně$]$

197. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ $[x \in < 0, 1 >$ nestejnoměrně$]$

198. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $[x \in < 0, 2 >$ nestejnoměrně$]$

199. $f_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}$ $[x \in R$ stejnoměrně$]$

200. $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}$ $[x \in < 0, +\infty >$ stejnoměrně$]$

201. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$ $[x \in (0, 1)$ nestejnoměrně$]$

202. $f_n(x) = \operatorname{arcotg} nx$ $[x \in (0, +\infty)$ nestejnoměrně$]$

203. $f_n(x) = x \operatorname{arcotg} nx$ $[x \in (0, +\infty)$ stejnoměrně$]$

5.2 Funkční řady

Teorie

Příklad 204 :

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, je-li

205. $u_n(x) = \ln^n x$ $\left[\frac{1}{e} < x < e\right]$

206. $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1}(\frac{1-x}{1+x})^n$ $[< 0, \infty)]$

207. $u_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ $[x \in R- < -1, 1 >]$

208. $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ $[x \in R - \{-1, 1\}]$

209. $u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^n}$ $[|x| > 1]$

210. $u_n(x) = e^{-nx}$ $[x > 0]$

211. $u_n(x) = \frac{\cos nx}{e^{nx}}$ $[x > 0]$

212. $u_n(x) = (5 - x^2)^n$ $\left[2 < |x| < \sqrt{6}\right]$

213. $u_n(x) = n^{-\ln x^2}$ $[|x| > \sqrt{e}]$

214. $u_n(x) = n^2 e^{-nx^2}$ $[x \in R - \{0\}]$

215. $u_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$ $[|x| < 1]$

Dokažte stejnoměrnou konvergenci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, je-li

216. $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$ $[x \in R]$

217. $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ $[x \geq 0]$

218. $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^2}$ $[x \in R]$

219. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ $[x \in R]$

220. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$ $[x \in R]$

221. $f_n(x) = \operatorname{arcotg} \frac{2x}{x^2+n^3}$ $[x \in R]$

222. $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$ $[x \in R]$

223. $f_n(x) = \frac{x^2 \sin(n\sqrt{x})}{1+n^3x^4}$ $[x \geq 0]$

224. $f_n(x) = (\operatorname{arcotg} \frac{x}{x^2+n^2})^2$ $[x \geq 0]$

225. $f_n(x) = \ln(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n})$ $[n \geq 2, |x| \leq a, a > 0]$

226. $f_n(x) = \frac{\sin(\frac{x^2}{n})}{x^2\sqrt{n}+1}$ $[|x| \leq a, a > 0]$

227. $f_n(x) = \frac{\sin(\frac{x}{n}) \sin 2nx}{x^2+4n}$ $[x \in R]$

228. $f_n(x) = \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$ $\left[\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2\right]$

229. $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$ $[\varepsilon \leq x \leq a, (\varepsilon, a > 0, \varepsilon < a)]$

webMathematica

5.3 Mocniné řady

Teorie

Příklad 230 :
Najděte poloměr konvergence řady

231. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

232. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n}$ $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right]$

233. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^{2n}$ $\left[\sqrt{\frac{e}{2}}\right]$

234. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n(n^3+2)x^{2n}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

Najděte poloměr konvergence řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, je-li

235. $a_n = \frac{1}{n^2}$ $[1]$

236. $a_n = \frac{1}{n!}$ $[\infty]$

237. $a_n = \frac{(1+i)^n}{n2^n}$ $[\sqrt{2}]$

238. $a_n = \alpha^{n^2}(0 < \alpha < 1)$ $[\infty]$

239. $a_n = \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}(a, b > 0)$ $\left[\min(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})\right]$

240. $a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$ $[1]$

241. $a_n = \frac{1}{a^n+b^n}(a, b > 0)$ $[\min(a, b)]$

242. $a_n = (-1)^{n-1}\{\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\}^p$ $[2^p]$

243. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(\frac{n}{e})^n$ $[1]$

244. $a_n = \frac{a(a+1)...(a+n-1)b(b+1)...(b+n-1)}{n!c(c+1)...(c+n-1)}$ $[1]$

Najděte obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, je-li

245. $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}, x_0 = 1$ $[< 0, 2 >]$

246. $a_n = (\frac{2n-1}{3n+2})^n, x_0 = -2$ $[(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})]$

247. $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}, x_0 = 0$ $[(-1, 1>]$

248. $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}3^n}, x_0 = 1$ $[< -2, 4)]$

249. $a_n = \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}}, x_0 = -2$ $[(-3, -1)]$

250. $a_n = \frac{5^n+(-3)^n}{n+1}, x_0 = 0$ $[< -\frac{1}{5}, \frac{1}{5})]$

251. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2}, x_0 = -1$ $[< -2, 0 >]$

252. $a_n = \frac{\sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}}, x_0 = -3$ $[< -4, -2 >]$

253. $a_n = \sqrt[n]{a} - 1, x_0 = 0, a > 0, a \neq 1$ $[< -1, 1)]$

254. $a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+n+1}}, x_0 = 1$ $[< 0, 2 >]$

webMathematica

Najděte rozvoj funkce $f(x)$ v mocninou řadu

255. $f(x) = e^{-x^2}$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}; x \in R\right]$

256. $f(x) = \cos^2 x$ $\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}; x \in R\right]$

257. $f(x) = \sin 3x \sin 5x$ $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}(1 - 2^{4n})x^{2n}; x \in R\right]$

258. $f(x) = \sin^3 x$ $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3(3^{2n}-1)}{4(2n+1)!} x^{2n+1}; x \in R\right]$

259. $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2}$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{n+2}; x \in (-1, 1)\right]$

260. $f(x) = \frac{5x-4}{x+2}$ $\left[-2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7(-1)^{n-1}}{2^n} x^n; x \in (-2, 2)\right]$

261. $f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3}$ $\left[-\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n 3^{n+1}}{3^{n+1}} x^n; x \in (-1, 1)\right]$

262. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in (-1, 1)\right]$

263. $f(x) = \ln\frac{3-2x}{2+3x}$ $\left[\ln\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{(-\frac{3}{2})^n - (\frac{2}{3})^n\}\frac{x^n}{n}; x \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} >\right]$

264. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}; x \in (-1,1)\right]$

265. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ $\left[1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n}; x \in (-1,1)\right]$

266. $f(x) = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}; x \in (-1,1)\right]$

267. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ $\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}; x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right]$

268. $f(x) = (1+x^2)\,\mathrm{arcotg}\,x$ $\left[x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}; x \in < -1, 1 >\right]$

Najděte rozvoj $f(x)$ v mocninnou řadu

269. $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ $\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in < -1, 1 >\right]$

270. $f(x) = \arcsin x$ $\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in < -1, 1 >\right]$

271. $f(x) = \mathrm{arcotg}\,\frac{x+3}{x-3}$ $\left[-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in < -3, -3 >\right]$

272. $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{n+1} + (-1)^n(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1}\}; |x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$

273. $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ $\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{2\pi(n+1)}{3}x^n; x \in (-1,1)\right]$

274. $f(x) = \frac{x\cos\alpha - x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ $\left[\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha; x \in (-1,1)\right]$

275. $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arcotg}\,x$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}; x \in (-1,1)\right]$

276. $f(x) = x\,\mathrm{arcotg}\,x - \ln\sqrt{1+x^2}$ $\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}; x \in < -1, 1 >\right]$

277. $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ $\left[1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}; x \in < -1, 1 >\right]$

278. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n; x \in (-1,1)\right]$

279. $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{u}\frac{1}{k!}x^n; x \in (-1,1)\right]$

280. $f(x) = \operatorname{arcotg}^2 x$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1})\frac{x^{2n}}{n}; x \in < -1,1 >\right]$

281. $f(x) = e^x \sin x$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin(\frac{n\pi}{4})}{n!}x^n; x \in R\right]$

282. $f(x) = e^x \cos x$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos(\frac{n\pi}{4})}{n!}x^n; x \in R\right]$

283. $f(x) = (\frac{\arcsin x}{x})^2$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n}; |x| \le 1\right]$

Vypočtěte integrály

284. $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}; x \in R\right]$

285. $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}; x \in R\right]$

286. $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ $\left[x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!x^{4n+1}}{(2n)!!(4n+1)}; x \in (-1,1)\right]$

287. $\int\limits_0^x \frac{t^2dt}{\sqrt{1+t^2}}$ $\left[\frac{x^3}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!x^{2n+3}}{(2n)!!(2n+3)}; x \in < -1,1 >\right]$

webMathematica

6 Fourierovy řady

Teorie

Příklad 288 :
Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$ na intervalu $(-\pi,\pi)$, je-li

289. $f(x) = x$ $\left[2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right]$

290. $f(x) = 1$ pro $0 \leq x \leq \pi$ $\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\right]$

$f(x) = 0$ pro $-\pi \leq x \leq 0$

291. $f(x) = |x|$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ $\left[\frac{\pi}{2} - 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}; \frac{\pi^2}{8}\right]$

292. $f(x) = \pi^2 - x^2$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

$\left[\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx; \frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^2}{12}\right]$

293. $f(x) = \operatorname{sign} x$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ $\left[\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}; \frac{\pi}{4}\right]$

294. $f(x) = \sin ax \quad a \notin Z$ $\left[\frac{2\sin \pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2-a^2}\right]$

295. $f(x) = \cos ax \quad a \notin Z$ $\left[\frac{2\sin \pi a}{\pi}\{\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2-n^2}\}\right]$

296. $f(x) = e^{ax} \quad a \neq 0$ $\left[\frac{2}{\pi}\sinh a\pi\{\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx - n\sin nx)\}\right]$

297. $f(x) = \frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2} \quad |q| < 1$ $\left[\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx; \text{zaveďte } e^{ix} = z\right]$

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$, je-li

298. $f(x) = \frac{\pi-x}{2}, x \in (0, 2\pi)$ $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\right]$

299. $f(x) = x, x \in (a, a+2l)$ $\left[a + l + \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} - \cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l})\right]$

300. $f(x) = x^2, x \in (0, 2\pi)$ $\left[\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\right]$

301. $f(x) = e^{ax}, x \in (-h, h)$ $\left[2\sinh ah\{\frac{1}{2ah} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{ah\cos(\frac{n\pi x}{h}) - n\sin(\frac{n\pi x}{h})}{(ah)^2+(\pi n)^2}\}\right]$

302. $f(x) = x\cos x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\left[\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx\right]$

303. $f(x) = e^x - 1, x \in (0, 2\pi)$ $\left[\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\cos nx}{1+n^2} - \frac{n\sin nx}{1+n^2})\} - 1\right]$

Najděte Fourierovu řadu funkcí $f_n(x) = \sin^n x$ a $g_n(x) = \cos^n x$ pro $n = 2, 3, 4, 5$.

304. $f_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ $\left[g_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right]$

305. $f_3(x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$ $\left[g_3(x) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x\right]$

306. $f_4(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$ $\left[g_4(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right]$

307. $f_5(x) = -\frac{5}{8}\sin x + \frac{5}{16}\sin 3x - \frac{1}{16}\sin 5x$ $\left[g_5(x) = \frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x\right]$

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$, je-li

308. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, x \in (0, \pi)$ (kosinová řada) $\left[\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\right]$

309. $f(x) = x^2, x \in (0, \pi)$ (sinová řada) $\left[\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\{\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^2}[(-1)^n - 1]\}\sin nx\right]$

310. $f(x) = \sin ax, a \in Z, x \in (0, \pi)$ (kosinová řada) $\left[\frac{4a}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{a^2-(2n+1)^2}\text{pro } a \text{ sudé}\right]$

$\left[\frac{4a}{\pi}\{\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{a^2-4n^2}\}\text{pro } a \text{ liché}\right]$

311. $f(x) = \cos ax, a \in Z, x \in (0, \pi)$ (sinová řada) $\left[-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{a^2-(2n+1)^2}\text{ pro } a \text{ sudé}\right]$

$\left[-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{a^2-4n^2}\text{ pro } a \text{ liché}\right]$

312. $f(x) = x(\frac{\pi}{2} - x), x \in (0, \frac{\pi}{2})$ podle soustavy

$\{\cos(2n-1)x\}, n \in N$ $\left[-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\{1 + \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\}\cos(2n-1)x\right]$

$\{\sin(2n-1)x\}, n \in N$ $\left[\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{8}{(2n-1)^3}\}\sin(2n-1)x\right]$

Integrací Fourierova rozvoje funkce $f(x) = x$ najděte rozvoj funkcí x^2, x^3, x^4, x^5 pro $x \in (-\pi, \pi)$

313. $f(x) = x$ $\left[2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right]$

314. $f(x) = x^2$ $\left[\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}(-1)^n\right]$

315. $f(x) = x^3$ $\left[2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{6-\pi^2 n^2}{n^3}\sin nx\right]$

316. $f(x) = x^4$ $\left[\frac{\pi^4}{5} + 8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{6-\pi^2 n^2}{n^4}\cos nx\right]$

317. $f(x) = x^5$ $\left[2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{120-20\pi^2 n^2+\pi^4 n^4}{n^5}\sin nx\right]$

webMathematica

7 Limity, derivace a diferenciál funkcí více reálných proměnných

Teorie

Příklad 318 :

Rozhodněte o spojitosti fce f v bodě $[0,0]$:

319. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$, $f(0,0) = 0$ [není spojitá]

320. $f(x,y) = (1+\sin(x-y))^{\ln|x-y|}$, $f(0,0) = 1$ [je spojitá]

Rozhodněte, zda fce f v bodě $[0,0]$ a ve směru $(1,1)$ roste nebo klesá

321. $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin x$, [fce roste]

322. $f(x,y) = -\operatorname{tg} y\, \mathrm{e}^x$, [fce klesá]

Najděte diferenciál funkce f v bodech $[0,0]$ a $[1,1]$

323. $f(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f(0,0) = 0$ $\left[df = 0dx + 0dy\,,\ df = \frac{1}{2\sqrt{2}}dx + \frac{3}{2\sqrt{2}}dy\right]$

webMathematica

8 Řešení funkcionálních rovnic, tečná rovina

Teorie

Příklad 324 :

Pomocí věty o implicitní funkci zjistěte, jestli existuje jediné, spojité řešení y rovnice $F(x,y) = 0$ na okolí bodů A, B, C . Případně určete derivaci y' v příslušném bodě.

325. $F(x,y) = -\frac{2}{3}x^2 + y^2 - xy - 2x - 3y$, $A = [0,3]$, $B = [1,-1]$, $C = [-3,0]$.
$\left[A : y'(0) = \frac{5}{3},\ B : Neex.,\ C : Neex.\right]$

326. $F(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13$, $A = [-1,-2]$, $B = [1,-1]$, $C = [1,0]$.
$[A : Neex,\ B : y'(0) = 0,\ C : Neex.]$

327. Určete parciální derivace prvního řádu funkce $z = z(x,y)$ implicitně definované rovnicí $z^3 - 3xyz - 8 = 0$ v bodě $A = [0,3]$. $\left[A : z_x = \frac{3}{2},\ z_y = 0,\ \right]$

328. Ke grafu funkce f najděte tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou ϱ.
$f(x,y) = x^2 + y^2 - x$, $\varrho : 3x + 2y - z = 0$.
$[3(x-2) + 2(y-1) - (z-3) = 0]$

329. K nulové hladině funkce f najděte tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou ϱ.
$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$, $\varrho : x + 4y + 6z = 0$.
$[(x-1) + 4(y-2) + 6(z-2) = 0,\quad (x+1) + 4(y+2) + 6(z+2) = 0]$

webMathematica

9 Extrémy funkcí více proměnných

Teorie

Příklad 330 :

9.1 Optimalizační úlohy bez vazeb

Najděte lokální extrémy funkce f

331. $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ $[[1,1],[-1,-1]\ \text{min},\quad [0,0]\ \text{sedlo}]$

332. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$ $[[1,2]\ \text{min}]$

333. $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ $[[-1,-2,3]\ \text{min}]$

334. $f(x,y) = xy + z(a - x - 2y - 3z)$ $\left[[\frac{a}{5}, \frac{a}{10}, \frac{a}{10}]\ \text{sedlo}\right]$

335. $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ $\Big[\,[0,\pm 1],[\pm 1,0]\ \text{sedla},\quad [\frac{1}{\sqrt{(2e)}}, \frac{1}{\sqrt{(2e)}}],$
$[-\frac{1}{\sqrt{(2e)}}, -\frac{1}{\sqrt{(2e)}}]\ \text{min},\ [-\frac{1}{\sqrt{(2e)}}, \frac{1}{\sqrt{(2e)}}],\ [\frac{1}{\sqrt{(2e)}}, -\frac{1}{\sqrt{(2e)}}]\ \text{max}\Big]$

9.2 Optimalizační úlohy s vazbami

Teorie

Příklad 336 :

Najděte lokální extrémy funkce f vzhledem k množině M

337. $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2\,, \quad M : 4x^2 + y^2 = 25\,,$
$\left[[\frac{3}{2}, 4], [-\frac{3}{2}, -4] \text{ max}\,, \quad [2,-3], [-2,3] \text{ min}\right]$

338. $f(x,y) = x - 2y + 2z\,, \quad M : x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,$
$\left[[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}] \text{ max}\,, \quad [-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}] \text{ min}\right]$

339. $f(x,y) = xy + yz\,, \quad M : x^2 + y^2 = 2\,, y + z = 2\,,$ $\left[[1,1,1] \text{ max}\right]$

Najděte min. a max. hodnoty funkce f vzhledem k množině M

340. $f(x,y) = x + y + z\,, \quad M : x^2 + y^2 \le z \le 1\,,$ $\left[-\frac{1}{2} \text{ min}\,, \quad 1 + \sqrt{2} \text{ max}\right]$

341. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3z^2\,, \quad M : x^2 + y^2 + z^2 \le 100\,,$ $\left[0 \text{ min}\,, \quad 300 \text{ max}\right]$

webMathematica

10 Vícenásobné integrály

Teorie

Příklad 342 :

10.1 Dvojné integrály

343. $\displaystyle\iint\limits_{y^2 \le x \le y+2} y\, \mathrm{e}^x \, dx\, dy$ $\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^4 + \frac{5}{2}\mathrm{e}\right]$

344. $\displaystyle\iint\limits_{x^2 \le y \le \sqrt{16-x^2}} \frac{x}{(1+y)^2} \, dx\, dy$ $\left[0\right]$

345. $\displaystyle\iint\limits_{1 \le x^2 \le y^2 \le 4} |x\, y| \, dx\, dy$ $\left[\frac{15}{2}\right]$

346. $\displaystyle\iint\limits_{S} \frac{1}{x+y+1} \, dx\, dy\,,$ kde S je trojúhelník s vrcholy $[1,2], [5,2], [4,4]$
$\left[\frac{72}{5} \ln 9 + 8 \ln 16\right]$

347. $\displaystyle\iint\limits_{S} |x| \, dx\, dy\,,$ kde S je dána nerovnostmi $x^2 \le y\,,\ 4x^2 + y^2 \le 12$
$\left[36\sqrt{3} - 14\right]$

10.2 Trojné integrály

348. $\iiint\limits_V \frac{xy^3z}{(1+z^2)^2}\; dx\,dy\,dz\,,$ kde V je dána nerovnostmi, $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y$

$\left[-\frac{1}{60} + \frac{1}{16}\ln 5\right]$

349. $\iiint\limits_V x^2yz^3\; dx\,dy\,dz\,,$ kde V je dána nerovnostmi $0 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq x\,,\ 0 \leq z \leq xy$ $\left[\frac{1}{312}\right]$

350. $\iiint\limits_V \frac{x+y}{4+z}\; dx\,dy\,dz\,,$ kde V je dána nerovnostmi $x+y \leq 3\,,\ 0 \leq y\,,\ 0 \leq x\,,\ 0 \leq z \leq 4$ $[9\ln 2]$

351. $\iiint\limits_V \frac{xy}{(4+z)^2}\, dx\,dy\,dz\,,$ kde V je dána nerovnostmi $x^2+y^2 \leq 4z \leq 16$ $[0]$

352. $\iiint\limits_V x^2yz\; dx\,dy\,dz\,,$ kde V je dána nerovnostmi $4x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \leq 0$

$\left[-\frac{1}{2^3}\frac{1}{105}\right]$

webMathematica