1. a) $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$ $[1+y^2=C(1-x^2)]$

b) $(x^2-1)y'+2xy^2=0; y(0)=1$ $[y\{\ln(1-x^2)+1\}=1]$

c) $y'-y=2x-3$ $[2x+y-1=Ce^x]$

d) $y'=\sin(x-y)$ $\left[x+C=\frac{1+\sin(x-y)}{\cos(x-y)}\right]$

e) $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$ $[x^2+y^2=Cy]$

2. a) $xy'-2y=2x^4$ $[y=Cx^2+x^4]$

b) $xy'+y+\frac{1}{x}=0$ $[xy=C-\ln|x|]$

c) $y'+2y=y^2e^x$ $[y(e^x+Ce^{2x})=1, y=0]$

d) $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$ $[y=x^4\ln^2 Cx, y=0]$

e) $y''-4y'+3y=0\,;\ y(0)=6\,,\ y'(0)=10$ $[y=4e^x+2e^{3x}]$

3. a) $x^2y''-3xy'+3y=0$ $[y=C_1x+C_2x^3]$

b) Řešte variací konstant $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$ $[y=e^x(x\ln|x|-x+C_1x+C_2)]$

c) Řešte variací konstant $y''+y+\operatorname{ctg}^2 x=0$ $[y=2+C_1\cos x+C_2\sin x+\cos(x)\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|]$

d) Řešte odhadem y_p $y''+y=4xe^x$ $[y=C_1\cos x+C_2\sin x+(2x-2)e^x]$

e) Řešte odhadem y_p $y''+y=4\sin x$ $[y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x]$

4. Najděte vlastní čísla a vlastní funkce úlohy $y''+\lambda y=0$, je-li

a) $x\in<0,\pi>, y(0)=y(\pi)=0$ $[\lambda_k=k^2, y_k=\sin kx, k\in N]$

b) $x\in<0,\pi>, y'(0)=y(\pi)=0$ $\left[\lambda_k=\frac{(2k-1)^2}{4}, y_k=\cos\frac{2k-1}{2}x, k\in N\right]$

c) $x'=2x+y$ $[x=C_1e^t+C_2e^{5t}]$
$y'=3x+4y$ $[y=-C_1e^t+3C_2e^{5t}]$

d) $x'=y+2e^t$ $[x=C_1e^t+C_2e^{-t}+te^t-t^2-2]$
$y'=x+t^2$ $[y=C_1e^t-C_2e^{-t}+(t-1)e^t-2t]$

e) $y'=y+z; y(0)=0, z(0)=-1$ $[y=e^{2t}-e^{3t}]$
$z'=-2y+4z$ $[z=e^{2t}-2e^{3t}]$

5. a) Najděte obor konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n x$ $\left[\frac{1}{e}<x<e\right]$

b) Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti $f_n(x)=\frac{n^2}{n^2+x^2}$ i) na $\mathbb{R}$, ii) na $\langle -1,1\rangle$
[i) nestejnoměrně, ii) stejnoměrně]

Najděte obor konvergence M následujících řad. Konvergují tyto řady na M stejnoměrně?

c) Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ $[M=\langle -1,1\rangle$, ano$]$

d) Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{2^n}$ $[M=(-2,2)$, ne$]$

e) Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x-1)^n$, $[M=\langle 0,2)$, ne$]$

6. a) Je dána řada $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Určete obor konvergence M této řady. Spočtěte $f'(x)$ pro $x \in \operatorname{int} M$. Určete $f(x)$ (sečtěte danou řadu).

b) Je dána řada $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n}$. Určete obor konvergence M této řady. Spočtěte $\int\limits_0^x f(t)\,dt$ pro $x \in \operatorname{int} M$. Určete $f(x)$ (sečtěte danou řadu).

Najděte Fourierovu řadu funkcí

c) $f(x) = |x|$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ $\left[\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2};\ \frac{\pi^2}{8}\right]$

d) $f(x) = \pi^2 - x^2$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

$\left[\frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx;\ \frac{\pi^2}{6},\ \frac{\pi^2}{12}\right]$

e) $f(x) = \operatorname{sign} x$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ $\left[\frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1};\ \frac{\pi}{4}\right]$

7. Rozhodněte o spojitosti fce f v bodě $[0,0]$:

a) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$, $f(0,0) = 0$ [není spojitá]

b) $f(x,y) = (1 + \sin(x-y))^{\ln|x-y|}$, $f(0,0) = 1$ [je spojitá]

Rozhodněte, zda fce f v bodě $[0,0]$ a ve směru $(1,1)$ roste nebo klesá

c) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin x$, [fce roste]

d) $f(x,y) = -\operatorname{tg} y\, \mathrm{e}^x$, [fce klesá]

Najděte diferenciál funkce f v bodech $[0,0]$ a $[1,1]$

e) $f(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f(0,0) = 0$ $\left[df = 0dx + 0dy\,,\ df = \frac{1}{2\sqrt{2}}dx + \frac{3}{2\sqrt{2}}dy\right]$

8. Pomocí věty o implicitní funkci zjistěte, jestli existuje jediné, spojité řešení y rovnice $F(x,y) = 0$ na okolí bodů A, B, C. Případně určete derivaci y' v příslušném bodě.

a) $F(x,y) = -\frac{2}{3}x^2 + y^2 - xy - 2x - 3y$, $A = [0,3]$, $B = [1,-1]$, $C = [-3,0]$.

$[A : y'(0) = \frac{5}{3},\ B : Neex.,\ C : Neex.]$

b) $F(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13$, $A = [-1,-2]$, $B = [1,-1]$, $C = [1,0]$.

$[A : Neex,\ B : y'(0) = 0,\ C : Neex.]$

c) Určete parciální derivace prvního řádu funkce $z = z(x,y)$ implicitně definované rovnicí $z^3 - 3xyz - 8 = 0$ v bodě $A = [0,3]$. $\left[A : z_x = \frac{3}{2},\ z_y = 0,\ \right]$

d) Ke grafu funkce f najděte tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou ϱ. $f(x,y) = x^2 + y^2 - x$, $\varrho : 3x + 2y - z = 0$.

$[3(x-2) + 2(y-1) - (z-3) = 0]$

e) K nulové hladině funkce f najděte tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou ϱ.
$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$, $\varrho : x + 4y + 6z = 0$.
$[(x-1) + 4(y-2) + 6(z-2) = 0,\quad (x+1) + 4(y+2) + 6(z+2) = 0]$

9. Najděte lokální extrémy funkce f

a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ $\quad [[1,1],[-1,-1]$ min, $[0,0]$ sedlo$]$

b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$ $\quad [[1,2]$ min$]$

c) $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ $\quad [[-1,-2,3]$ min$]$

d) $f(x,y) = xy + z(a - x - 2y - 3z)$ $\quad \left[[\frac{a}{5}, \frac{a}{10}, \frac{a}{10}]\right.$ sedlo$\left.\right]$

e) $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ $\quad \Big[[0,\pm 1],[\pm 1, 0]$ sedla, $[\frac{1}{\sqrt{(2e)}}, \frac{1}{\sqrt{(2e)}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{(2e)}}, -\frac{1}{\sqrt{(2e)}}]$ min, $[-\frac{1}{\sqrt{(2e)}}, \frac{1}{\sqrt{(2e)}}]$, $[\frac{1}{\sqrt{(2e)}}, -\frac{1}{\sqrt{(2e)}}]$ max$\Big]$

10. Najděte lokální extrémy funkce f vzhledem k množině M

a) $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2\,, \quad M: 4x^2 + y^2 = 25\,,$
$\quad \left[[\frac{3}{2}, 4], [-\frac{3}{2}, -4]\right.$ max, $[2,-3],[-2,3]$ min$\left.\right]$

b) $f(x,y) = x - 2y + 2z\,, \quad M: x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,$
$\quad \left[[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]\right.$ max, $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$ min$\left.\right]$

c) $f(x,y) = xy + yz\,, \quad M: x^2 + y^2 = 2\,, y + z = 2\,,$ $\quad [[1,1,1]$ max$]$

Najděte min. a max. hodnoty funkce f vzhledem k množině M

d) $f(x,y) = x + y + z\,, \quad M: x^2 + y^2 \le z \le 1\,,$ $\quad \left[-\frac{1}{2}\right.$ min, $1+\sqrt{2}$ max$\left.\right]$

e) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3z^2\,, \quad M: x^2 + y^2 + z^2 \le 100\,,$ $\quad [0$ min, 300 max$]$

11. a) $\displaystyle\iint\limits_{y^2 \le x \le y+2} y\, \mathrm{e}^x \, dx\, dy$ $\quad \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^4 + \frac{5}{2}\mathrm{e}\right]$

b) $\displaystyle\iint\limits_{x^2 \le y \le \sqrt{16-x^2}} \frac{x}{(1+y)^2}\, dx\, dy$ $\quad [0]$

c) $\displaystyle\iint\limits_{1 \le x^2 \le y^2 \le 4} |x\, y|\, dx\, dy$ $\quad \left[\frac{15}{2}\right]$

d) $\displaystyle\iint\limits_{S} \frac{1}{x+y+1}\, dx\, dy\,,$ kde S je trojúhelník s vrcholy $[1,2],[5,2],[4,4]$
$\quad \left[\frac{72}{5}\ln 9 + 8\ln 16\right]$

e) $\displaystyle\iint\limits_{S} |x|\, dx\, dy\,,$ kde S je dána nerovnostmi $x^2 \le y\,,\ 4x^2 + y^2 \le 12$
$\quad [36\sqrt{3} - 14]$

12. a) $\displaystyle\iiint\limits_{V} \frac{xy^3z}{(1+z^2)^2}\, dx\, dy\, dz\,,$ kde V je dána nerovnostmi, $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2,\ 0 \le x,\ 0 \le y$
$\quad \left[-\frac{1}{60} + \frac{1}{16}\ln 5\right]$

b) $\displaystyle\iiint\limits_{V} x^2yz^3\, dx\, dy\, dz\,,$ kde V je dána nerovnostmi $0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le x\,,\ 0 \le z \le xy$ $\quad \left[\frac{1}{312}\right]$

c) $\displaystyle\iiint\limits_{V} \frac{x+y}{4+z}\, dx\, dy\, dz\,,$ kde V je dána nerovnostmi $x + y \le 3\,,\ 0 \le y\,,\ 0 \le x\,,\ 0 \le z \le 4$ $\quad [9\ln 2]$

d) $\displaystyle\iiint\limits_{V} \frac{xy}{(4+z)^2}\, dx\, dy\, dz\,,$ kde V je dána nerovnostmi $x^2 + y^2 \le 4z \le 16$ $\quad [0]$

e) $\displaystyle\iiint\limits_{V} x^2yz\, dx\, dy\, dz\,,$ kde V je dána nerovnostmi $4x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \le 0$
$\quad \left[-\frac{1}{2^3}\frac{1}{105}\right]$