symetrická podle osy x; maximum v bodě $\left[-\frac{a}{2}, \frac{3a\sqrt{3}}{2}\right]$;
minimum v bodě $\left[-\frac{a}{2}, -\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right]$; konvexní pro
$t \in (0, \frac{\pi}{3}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{3})$, konkávní pro $t \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$ $(\frac{5\pi}{3}, 2\pi$
hrot v bodě $[a, 0]$ /

e) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ (Bernoulliho lemniskáta) / symetrická podle osy x i osy y; nulové body $[a, 0]$, $[\pm a\sqrt{2}, 0]$; parametrisaci získáme z předpokladu $y = x \operatorname{tg} t$;
$x = a\sqrt{2}\cos t\sqrt{\cos 2t}$, $y = a\sqrt{2}\sin t\sqrt{\cos 2t}$ pro
$t \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\rangle$; maxima $\left[\pm\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}\right]$,
minima $\left[\pm\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}\right]$; konkávní pro $y \geq 0$, konvexní pro $y < 0$ /

28. Najděte úhel křivek

a) $y = x^2$, $x = y^2$ / $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} \longleftrightarrow 37^\circ$ /

b) $y = \sin x$, $y = \cos x$ / $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2} \longleftrightarrow 70^\circ 30'$ /

c) $y = \frac{x+1}{x+2}$, $y = \frac{x^2+4x+8}{16}$ / 0, $\operatorname{arctg}\frac{18}{31} \longleftrightarrow 30^\circ 8'$ /

d) $x^2 + y^2 - 4x = 1$, $x^2 + y^2 + 2y = 9$ / $\frac{\pi}{4}$ /

e) $x^2 - y^2 = 5$, $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ / $\frac{\pi}{2}$ /

Diferenciální počet funkcí více proměnných.

1. Buďte $G_n = (-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$, $F_n = \langle \frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\rangle$; $n \in N$. Najděte
$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ / $\langle 0, 1\rangle$, $(0, 1)$ /

2. Určete definiční obor funkce a načrtněte jej

a) $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$ / $|x| \leqq 1$, $|y| \geqq 1$ /

b) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ / $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1$ /

c) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$ / $y^2 > 4x - 8$ /

d) $z = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$ / $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4$ /

e) $z = \arcsin\frac{y-1}{x}$ / $1-x \leqq y \leqq 1+x$ pro $x > 0$; $1+x \leqq y \leqq 1-x$ pro $x < 0$; $x \neq 0$ /

f) $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}$ / $R_2 - A$, kde $A = \{ (x,y);\ (x+1)^2 + y^2 < 1 \} \cup \{ (x,y);\ (x-1)^2 + y^2 \leqq 1 \}$ /

g) $z = \sqrt{\sin \pi (x^2 + y^2)}$ / $2k \leqq x^2 + y^2 \leqq 2k+1$; $k \geqq 0$ celé /

h) $z = \ln\{x \ln(y - x)\}$ / $y > x+1$ pro $x > 0$; $x \neq 0$; $x < y < x+1$ pro $x < 0$ /

i) $z = \arcsin\left[2y(1 + x^2) - 1\right]$ / $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqq y \leqq \dfrac{1}{x^2 + 1}$ /

j) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}}$ ($R > r$) / $r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2$ /

k) $u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2)$ / vnitřek dvojdílného hyperboloidu $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ /

l) $u = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ / ~~vnitřek~~ vnějšek kužele $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ včetně hranice s vyloučením počátku /

3. Vypočtěte limitu

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$ / 2 /

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$ / 0 /

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$ / 1 /

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ / ln 2 /

e) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ / neexistuje /

f) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$ / 0 /

g) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}$ / neexistuje /

4. Buď $z = \dfrac{x \cos y - y \cos x}{1 + \sin x + \sin y}$. Najděte $\dfrac{\partial z(0,0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z(0,0)}{\partial y}$ / 1 ; -1 /

5. Buď $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$. Najděte $\dfrac{\partial u(0,0,\frac{\pi}{4})}{\partial z}$ / $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ /

6. Buď $z = x^3 y - y^3 x$. Najděte $\dfrac{\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}$ pro $x=1$, $y=2$ / $-\dfrac{13}{22}$ /

7. Vypočtěte parciální derivace funkce

a) $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ / $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$ /

b) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$ / $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y} - \dfrac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{2\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ /

c) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ / $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$ /

d) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ / $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$ /

e) $z = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ / $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xy\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$ /

f) $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ / $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}$ /

g) $u = \operatorname{arctg} \frac{v + w}{v - w}$ / $\frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{w}{v^2 + w^2}$, $\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{v}{v^2 + w^2}$ /

h) $z = (1 + xy)^y$ / $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2(1 + xy)^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xy(1+xy)^{y-1} + (1+xy)^y \cdot \ln(1+xy)$ /

i) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ / $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{x} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{y} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ /

j) $u = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$ / $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{x} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{y} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{1}{z} = 2\cos(x^2 + y^2 + z^2)$ /

k) $u = \ln \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ / $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{x} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{y} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{1}{z} = \frac{2}{r(r^2 - 1)}$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ /

8. Najděte totální diferenciál funkce

a) $z = \frac{x + y}{x - y}$ / $\frac{2(x\,dy - y\,dx)}{(x - y)^2}$ / b) $z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ / $\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$ /

c) $z = \arcsin \frac{x}{y}$ / $\frac{y\,dx - x\,dy}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$ / d) $z = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}$ / $\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}$ /

e) $u = \frac{z}{x^2 + y^2}$ / $\frac{(x^2 + y^2)dz - 2z(x\,dx + y\,dy)}{(x^2 + y^2)^2}$ /

f) $u = x^{yz}$ / $x^{yz-1}\left\{ yz\,dx + xz \ln x\,dy + xy \ln x\,dz \right\}$ /

9. Užitím totálního diferenciálu vypočtěte přibližně

a) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$ / 0,005 / b) $1,002 . 2,003^2 . 3,004^3$ / 108,972

c) $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$ / 2,95 / d) $\frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98\sqrt[4]{1,05^3}}}$ / 1,055 /

e) $0,97^{1,05}$ / 0,97 / f) $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$ / 0,502 /

10. Najděte rovnici tečné roviny a normály plochy v bodě

a) $z = xy$; $[1, 1, ?]$ / $x + y - z = 1$, $x - 1 = y - 1 = 1 - z$ /

b) $z = x^2 + y^2$; $[1, 2, ?]$ / $2x+4y-z-5=0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = 5-z$ /

c) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$; $[3, 4, ?]$ / $17x+11y+5z=60$; $\frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}$ /

d) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; $[1, 1, ?]$ / $2x-2y+4z=\pi$, $x-1 = 1-y = \frac{4z-\pi}{8}$ /

e) $z = \frac{x^3 - 3axy + y^3}{a^2}$; $[a, a, ?]$ / $z + a = 0$; $x = a$, $y = a$ /

1. Ukažte, že tečná rovina k ploše $xyz = a^3$ $(a > 0)$ tvoří s rovinami souřadnými jehlan o konstantním objemu.

2. Najděte příslušné parciální derivace.

a) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$ (druhé derivace) / $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad /$$

b) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ (druhé derivace) / $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3 + (x^2 - y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}\left[x + \sqrt{x^2 + y^2}\right]^2} , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \quad /$$

c) $z = e^{xe^y}$ (druhé derivace) / $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{xe^y + 2y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(1+xe^y)e^{xe^y + y}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + xe^y)\, e^{xe^y + y} \quad /$$

d) $z = \frac{x - y}{x + y}$ (druhé derivace) / $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-4y}{(x + y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x + y)^3}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2(x - y)}{(x + y)^3} \quad /$$

e) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}$ $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)$ / $\frac{(x - z)y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - 2xz)^3}}$ /

f) $z = \ln(x^2 + y^2)$ $\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right)$ / $\frac{4x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}$ /

g) $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$ $\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}\right)$ / $-6(\cos x + \cos y)$ /

h) $u = \operatorname{arctg}\frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz}$ $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}\right)$ / 0 /

i) $u = e^{xyz}$ $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}\right)$ / $e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$ /

j) $u = (x - x_0)^p (y - y_0)^q$ $\left(\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}\right)$ / $p!\, q!$ /

k) $u = (x^2 + y^2)\, e^{x+y}$ $\left(\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} \right)$ / $e^{x+y}\{x^2+y^2+2(mx+ny)+m(m-1)+n(n-1)\}$ /

l) $u = xyz\, e^{x+y+z}$ $\left(\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} \right)$ / $(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}$ /

13. Ukažte, že daná funkce vyhovuje uvedené rovnici

a) $z = \ln(e^x + e^y)$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$

b) $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

c) $u = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

d) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

e) $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \dfrac{2}{r}$,

$$\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}$$

f) $z = \dfrac{y}{y^2 - a^2x^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

g) $v = \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{y-z} + \dfrac{1}{z-x}$; $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} \right) = 0$

h) $v = x\ln(x+r) - r$, kde $r^2 = x^2 + y^2$; $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{1}{x+r}$

i) $u = x\,e^y + y\,e^x$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = x\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + y\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$

j) $u = \ln \dfrac{x^2-y^2}{xy}$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 2\left(\dfrac{1}{y^3} - \dfrac{1}{x^3}\right)$

14. Vypočtěte uvedené diferenciály

a) d^2z ; $z = \ln(x-y)$ / $-\dfrac{(dx-dy)^2}{(x-y)^2}$ /

b) d^2z ; $z = x\sin^2 y$ / $2\sin 2y\,dx\,dy + 2x\cos 2y\,dy^2$ /

c) d^3u ; $u = x^3 + y^3 - 3xy(x-y)$ / $6(dx^3 - 3dx^2\,dy + 3dx\,dy^2 + dy^3)$ /

d) d^3u ; $u = \sin(x^2+y^2)$ / $-8(xdx+ydy)^3\cos(x^2+y^2) - 12(xdx+ydy)(dx^2+dy^2)\,.$
$\sin(x^2+y^2)$ /

e) $d^{10}u$; $u = \ln(x + y)$ / $-\dfrac{9!\,(dx + dy)^{10}}{(x + y)^{10}}$ /

f) d^3u ; $u = xyz$ / $6\,dx\,dy\,dz$ /

g) d^4u ; $u = \ln(x^x y^y z^z)$ / $2\left(\dfrac{dx^4}{x^3} + \dfrac{dy^4}{y^3} + \dfrac{dz^4}{z^3}\right)$ /

h) d^nu ; $u = e^{ax+by}$ / $e^{ax+by}(a\,dx + b\,dy)^n$ /

i) d^nu ; $u = X(x).Y(y)$ / $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{(n-k)}(x)\,Y^{(k)}(y)\,dx^{n-k}\,dy^k$ /

15. Najděte totální diferenciál složených funkcí

a) $u = f(t)$, $t = x + y$ / $f'(t)(dx + dy)$ /

b) $u = f(\sqrt{x^2+y^2})$ / $f'\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ /

c) $u = f(xyz)$ / $f'(yz\,dx + zx\,dy + xz\,dz)$ /

d) $u = f(ax, by)$ / $a\,f_1'dx + b\,f_2'\,dy$ /

e) $u = f(xy, \frac{x}{y})$ / $f_1'(y\,dx + x\,dy) + f_2'\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ /

f) $u = f(x + y + z, x^2+y^2+z^2)$ / $f_1'(dx+dy+dz) + 2f_2'(xdx+ydy+zdz)$ /

g) $u = f(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)$ / $2f_1'(xdx+ydy) + 2f_2'(xdx-ydy)+2f_3'(ydx+xdy)$

16. Užitím věty o derivacích složené funkce najděte

a) $\frac{du}{dt}$, $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$ / $e^{\sin t-2t^3}(\cos t - 6t^2)$ /

b) $\frac{du}{dt}$, $u = z^2+y^2+zy$, $z = \sin t$, $y = e^t$ / $\sin 2t+2e^{2t}+e^t(\sin t+\cos t)$ /

c) $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$; $z = x^2y - y^2x$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$

/ $\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2\sin v\cos v(\cos v-\sin v)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = u^3(\sin v+\cos v)(1-3\sin v\cos v)$ /

d) $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$; $z = u\,e^{\frac{u}{v}}$, $u = x^2+y^2$, $v = xy$ / $\frac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x^2y}\,e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$.

$(x^4 - y^4 + 2x^3y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{xy^2}\,e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}(y^4 - x^4 + 2xy^3)$ /

17. Buďte f , g libovolné jednou nebo dvakrát diferencovatelné funkce. Ukažte, že platí

a) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = f(x^2+y^2)$

b) $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, $z = \frac{y^2}{3x} + f(xy)$

c) $(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz$, $z = e^{\frac{x^2}{2y^2}} f(y\, e^{\frac{x^2}{2y^2}})$

d) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u = f(x - at) + g(x + at)$

e) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u = x\, f(x + y) + y\, g(x + y)$

f) $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u = f\left[x + g(y)\right]$

18. Zavedením nové nezávisle proměnné transformujte rovnici

a) $x^2 y'' + xy' + y = 0$, $x = e^t$ / $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ /

b) $x^2 y'' - 4xy' + y = 0$, $x = e^z$ / $\frac{d^2y}{dz^2} - 5\frac{dy}{dz} + y = 0$ /

c) $x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx} + y = 0$, $x = \frac{1}{t}$ / $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ /

d) $y''' = \frac{6y}{x^3}$, $t = \ln|x|$ / $\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - 6y = 0$ /

e) $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$, $x = \cos t$ / $\frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0$ /

f) $y'' + \operatorname{th} x\, y' + \frac{m^2}{\operatorname{ch}^2 x} y = 0$, $x = \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ / $\frac{d^2y}{dt^2} + m^2 y = 0$ /

19. Zavedením nových nezávisle proměnných transformujte a řešte následující rovnice.

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$; $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ / $z = \varphi(x + y)$, kde φ je libovolná diferencovatelná funkce /

b) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $\xi = x$, $\eta = x^2 + y^2$ / $z = \varphi(x^2 + y^2)$ /

c) $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$; $\xi = x$, $\eta = \frac{y}{x}$ / $z = x\,\varphi(\frac{y}{x})$ /

20. Zavedením nových nezávisle proměnných transformujte rovnici.

a) $x\frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1 + y^2}\frac{\partial z}{\partial y} = xy$; $u = \ln x$, $v = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$

/ $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = e^u \operatorname{sh} v$ /

b) $(x + y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

/ $\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0$ /

c) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$; $x = uv$, $y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ / $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 0$ /

d) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$; $u = x$, $v = y - x$, $w = z - x$ / $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$ /

e) $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $u = x + 2y + 2$, $v = x - y - 1$

/ $3\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0$ /

f) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ / $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$ /

g) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$ $(y > 0)$; $u = x - 2\sqrt{y}$, $v = x + 2\sqrt{y}$

/ $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ /

h) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x \sin y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin^2 y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $u = x \operatorname{tg}\frac{y}{2}$, $v = x$

/ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{2u}{u^2 + v^2}\frac{\partial z}{\partial u}$ /

1. Transformujte do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ výrazy

a) $x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}$ / $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ / b) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ / $r\frac{\partial u}{\partial r}$ /

c) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ / $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$ /

d) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ / $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$ /

2. Najděte $\frac{dy}{dx}$ a $\frac{d^2y}{dx^2}$ pro následující implicitně zadané funkce.

a) $x^2 + y^2 = 25$ / $-\frac{x}{y}$, $-\frac{25}{y^3}$ /

b) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$ / $-\frac{x + y}{x - y}$, $\frac{2a^2}{(x - y)^3}$ /

c) $x^2 + y^2 = a\, e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$; $a > 0$ / $\frac{x + y}{x - y}$, $\frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}$ /

d) $y = 2x \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ / $\frac{y}{x}$, 0 / e) $y = \operatorname{tg}(x + y)$ / $-1 - \frac{1}{y^2}$, $\frac{-2(y^2 + 1)}{y^5}$ /

f) $y^3 + x^3 - 3axy = 0$ / $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$, $-\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}$ /

g) $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ (jen y') / $-\frac{x}{y}\,\frac{2(x^2 + y^2) - a^2}{2(x^2 + y^2) + a^2}$ /

h) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ / $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$, $\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}}{3x\sqrt[3]{xy}}$ /

23. Najděte rovnici tečny ke křivce v bodě T .

a) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$; $T[6 ; 6{,}4]$ / $3x + 5y - 50 = 0$ /

b) $xy + \ln y = 1$; $T[1 , 1]$ / $x + 2y - 3 = 0$ /

24. Ukažte, že tečna ke křivce $\frac{(x-m)^2}{a^2} \pm \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ v jejím bodě $[x_0 , y_0]$ má tvar $\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} \pm \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1$

25. Ukažte, že u astroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ je úsek tečny, omezený osami souřadnými, konstantní.

26. Ukažte, že množiny hyperbol $x^2 - y^2 = a^2$ a $xy = b$ tvoří t. zv. ortogonální síť, t. j. systém navzájem kolmých křivek.

27. Najděte parciální derivace prvého a druhého řádu implicitních funkcí

a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ / $z_x = -\frac{x}{z}$, $z_y = -\frac{y}{z}$, $z_{xx} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}$,

$z_{xy} = -\frac{xy}{z^3}$, $z_{yy} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}$ /

b) $z^3 - 3xyz = a^3$ / $z_x = \frac{yz}{z^2 - xy}$, $z_y = \frac{xz}{z^2 - xy}$, $z_{xx} = -\frac{2xy^3z}{(z^2 - xy)^3}$,

$z_{xy} = \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}$, $z_{yy} = -\frac{2x^3yz}{(z^2 - xy)^3}$ /

c) $z = \sqrt{x^2 - y^2}\,\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ / $z_x = \frac{xz}{x^2 - y^2}$, $z_y = -\frac{yz}{x^2 - y^2}$,

$z_{xx} = -\frac{y^2z}{(x^2 - y^2)^2}$, $z_{xy} = \frac{xyz}{(x^2 - y^2)^2}$, $z_{yy} = -\frac{x^2z}{(x^2 - y^2)^2}$ /

28. Najděte rovnici tečné roviny a normály plochy v daném bodě

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$; $[3, 4, 12]$ / $3x + 4y + 12z = 169$, $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12}$ /

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\left[\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{b\sqrt{3}}{3}, \frac{c\sqrt{3}}{3}\right]$ / $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3}$,

$a\left(x - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) = b\left(y - \frac{b\sqrt{3}}{3}\right) = c\left(z - \frac{c\sqrt{3}}{3}\right)$ /

c) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$; $[2, 2, 1]$ / $x + y - 4z = 0$, $x - 2 = y - 2 = \frac{1 - z}{4}$ /

d) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$; $[1, 2, -1]$ / $x + 11y + 5z - 18 = 0$,

$x - 1 = \frac{y - 2}{11} = \frac{z + 1}{5}$ /

e) $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$; $[2, 3, 6]$ / $5x + 4y + z - 28 = 0$, $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = z - 6$ /

f) $z = y + \ln\frac{x}{z}$; $[1, 1, ?]$ / $x + y - 2z = 0$, $x - 1 = y - 1 = \frac{1-z}{2}$ /

29. Najděte tečnou rovinu plochy, rovnoběžnou s danou rovinou.

a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, $x + 4y + 6z = 0$ / $x + 4y + 6z = \pm 21$ /

b) $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$, $x + y - z = 0$ / $x + y - z = \pm 9$ /

30. Ukažte, že jsou následující zobrazení regulární. Najděte jejich jakobiány.

a) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$; $r > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$ / r /

b) $x = ar\cos^{\alpha}\varphi$, $y = br\sin^{\alpha}\varphi$; $r > 0$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ a,b, konstanty / $\alpha\, abr\cos^{\alpha-1}\varphi\, \sin^{\alpha-1}\varphi$ /

c) $x = ar\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = br\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = cr\sin\vartheta$ a,b,c konst., $r > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $\vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ / $abcr^2\cos\vartheta$ /

d) $x = a\,\mathrm{ch}\,u\cos v$, $y = a\,\mathrm{sh}\,u\sin v$; $u > 0$, $v \in (0, 2\pi)$, a konstanta / $(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v)a^2$ /

e) $x = e^u\cos v$, $y = e^u\sin v$; $u \in \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$ / e^{2u} /

31. Rozložte funkci f podle Taylorova vzorce v okolí bodu a .

a) $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$, $a = (1, -2)$ / $5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$ /

b) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $a = (1, 1, 1)$ / $3\{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)\} + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1)$ /

32. Funkci f rozložte v okolí bodu a podle Taylorova vzorce až do daného stupně. Výsledku použijte k přibližnému výpočtu funkční hodnoty.

a) $f(x, y) = e^x\sin y$; $a = (0, 0)$; do 5. stupně ; $e^{0,1}\sin 0{,}49\pi$ / $y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{6}x^3y - \frac{1}{6}xy^3 + \frac{1}{24}x^4y - \frac{1}{12}x^2y^3 + \frac{1}{120}y^5$; 1,1015 /

b) $f(x, y) = e^x\ln(1 + y)$; $a = (0, 0)$; do 3. stupně ; $e^{0,05}\ln 1{,}01$ / $y + \frac{1}{2!}(2xy - y^2) + \frac{1}{3!}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3)$; 0,0104603 /

c) $f(x, y) = x^y$; $a = (1, 1)$; do 3. stupně ; $1{,}1^{1{,}02}$

/ $1 + (x - 1) + (x - 1)(y - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2(y - 1)$; $1{,}1021$ /

d) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; $a = (0, 0)$; do 4. stupně ; $\sqrt{0{,}9899}$

/ $1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2$; $0{,}99493725$ /

e) $f(x, y) = e^x \sin y$; $a = (0, \frac{\pi}{2})$; do 3. stupně ; $e^{0{,}1} \sin 0{,}49\pi$

/ $1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x(y - \frac{\pi}{2})^2$; $1{,}104624$ /

33. Najděte extrémy funkce

a) $z = x^2 + (y - 1)^2$ / minimum $z = 0$ v bodě $(0, 1)$ /

b) $z = x^2 - (y - 1)^2$ / nemá extrém /

c) $z = (x - y + 1)^2$ / neostré minimum $z = 0$ v bodech přímky $x-y+1=0$ /

d) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ / minimum $z = -1$ v bodě $(1, 1)$ /

e) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ / minimum $z = -2$ v bodech $(1, 1)$, $(-1, -1)$ /

f) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ / maximum $z = 0$ v bodě $(0, 0)$, minimum

$z = -\frac{9}{8}$ pro $x = \pm\frac{1}{2}$, $y = \pm \cancel{\frac{1}{2}}\, 1$ /

g) $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ $(a > 0,\ b > 0)$ / maximum $z = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$ pro

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, minimum $z = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ pro $\frac{x}{a} = -\frac{y}{b} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ /

h) $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$ / minimum $z = 0$ v bodě $(0, 0)$ /

i) $z = (5x + 7y - 25)\, e^{-(x^2+xy+y^2)}$ / maximum $z = e^{-13} \doteq 2{,}26.10^{-6}$

v bodě $(1, 3)$, minimum $z = -26\, e^{-1/52} \doteq -25{,}505$ v bodě

$(-\frac{1}{26}, -\frac{3}{26})$ /

j) $z = \sin x \sin y \sin(x + y)$ / maximum $z = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ v bodech

$\left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + l\pi\right]$, $k, l \in Z$, minimum $z = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$ v bodech

$\left[\frac{2\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + l\pi\right]$, $k, l \in Z$ /

k) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ / minimum $u = -14$ v bodě $(-1, -2, 3)$ /

l) $u = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z)$, $a > 0$ / maximum $u = (\frac{a}{7})^7$ v bodě

$(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7})$, neostrý extrém $u = 0$ pro $y = 0$, $x \neq 0$,

$z \neq 0$, $x + 2y + 3z \neq a$ /

34. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce na dané množině

a) $z = x - 2y - 3$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x + y \leqq 1$ / -2 ; -5 /

b) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, $x^2 + y^2 \leqq 25$ / 125 ; -75 /

c) $z = x^2 - xy + y^2$, $|x| + |y| \leqq 1$ / 1 ; 0 /

d) $u = x + y + z$, $x^2 + y^2 \leqq z \leqq 1$ / $1 + \sqrt{2}$; $-\frac{1}{2}$ /

35. V rovině $3x - 2z = 0$ najděte bod tak, aby součet druhých mocnin jeho vzdáleností od bodů $A[1, 1, 1]$, $B[2, 3, 4]$ byl minimální

/ $\left[\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right]$ /

36. Najděte objem největšího kvádru, který je možno vepsat do elipsoidu s poloosami a, b, c . / $\frac{8\,abc}{3\sqrt{3}}$ /

37. Vana ve tvaru kvádru má objem V . Určete její rozměry tak, aby měla minimální povrch. / $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$ /

38. Těleso se skládá z rotačního válce ukončeného kuželem. Najděte jeho rozměry tak, aby jeho objem byl maximální, jestliže víte, že jeho povrch je S . / $r = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi(3 + \sqrt{5})}}$, $v = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{5\pi(3 + \sqrt{5})}}$, $h = \sqrt{\frac{S}{5}}\,\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{\pi(3+\sqrt{5})}}$, kde r je poloměr podstavy, v výška válce a h výška kužele /

39. Kolmý průřez zavodňovacím kanálem má tvar rovnoramenného lichoběžníka daného obsahu S . Najděte jeho rozměry tak, aby plocha smáčená vodou byla minimální. / $a = l = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3^3}}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, kde l je rameno, a základna a α úhel odklonu ramena /

Neurčitý integrál.

/ Ve všech výsledcích je vynechána integrační konstanta /

. Vypočtěte integrály

a) $\int \sqrt{x}\,dx$ / $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ / b) $\int \frac{dx}{x^2}$ / $-\frac{1}{x}$ / c) $\int a^x e^x\,dx$ / $\frac{(ae)^x}{1 + \ln a}$ /

d) $\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$ / $x - 2\ln x - \frac{1}{x}$ / e) $\int \frac{3.2^x - 2.3^x}{2^x}\,dx$ / $3x - \frac{2(1,5)^x}{\ln 1,5}$ /

f) $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$ / $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}$ /

g) $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}\,dx$ / $\ln|x| - \frac{1}{4x^4}$ / h) $\int \frac{x^2}{1 + x^2}\,dx$ / $x - \operatorname{arctg} x$ /