Diferenciální rovnice 1. řádu.

1. Řešte rovnice

a) $(xy^2 + x)\,dx + (y - x^2y)\,dy = 0$ / $1 + y^2 = C(1 - x^2)$ /

b) $xyy' = 1 - x^2$ / $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$ /

c) $y'\,\mathrm{tg}\,x - y = a$ / $y = C\sin x - a$ /

d) $xy\,dx + (x + 1)\,dy = 0$ / $y = C(x + 1)\,e^{-x}$ /

e) $\sqrt{y^2 + 1}\,dx = xy\,dy$ / $\ln|x| = C + \sqrt{y^2 + 1}$; $x = 0$ /

f) $e^y(1 + x^2)\,dy - 2x(1 + e^y)\,dx = 0$ / $1 + e^y = C(1 + x^2)$ /

g) $(x^2 - 1)\,y' + 2xy^2 = 0$; $y(0) = 1$ / $y\left\{\ln(1 - x^2) + 1\right\} = 1$ /

h) $y'\sin x = y\ln y$; $y(\frac{\pi}{2}) = e$ / $y = e^{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$ /

i) $\sin y\cos x\,dy = \cos y\sin x\,dx$; $y(0) = \frac{\pi}{4}$ / $\cos x = \sqrt{2}\cos y$ /

j) $y'\,\mathrm{ctg}\,x + y = 2$; $y(\frac{\pi}{3}) = 0$ / $y = 2 - 4\cos x$ /

2. Převedením na rovnici se separovatelnými proměnnými řešte

a) $y' - y = 2x - 3$ / $2x + y - 1 = C\,e^x$ /

b) $y' = \sin(x - y)$ / $x + C = \mathrm{ctg}\left(\frac{y - x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ /

c) $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$ / $\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln\left(\sqrt{4x + 2y - 1} + 2\right) = x + C$ /

d) $y' = \cos(x - y - 1)$ / $y = x - 1 - 2\,\mathrm{arctg}(C - x) + 2k\pi$, $k \in Z$ /

e) $y'\sqrt{1 + x + y} = x + y - 1$ / $x + C = 2u + \frac{2}{3}\ln|u - 1| - \frac{8}{3}\ln(u + 2)$;
$u = \sqrt{1 + x + y}$ /

3. Řešte rovnice

a) $y' = \frac{x + y}{x - y}$ / $\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2 + y^2}$ /

b) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ / $x^2 + y^2 = Cy$ /

c) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ / $x^2 = C^2 + 2Cy$ /

d) $(3y^2 + 3xy + x^2)\,dx = (x^2 + 2xy)\,dy$ / $(x + y)^2 = Cx^3\,e^{-\frac{x}{x+y}}$ /

e) $(x^2 + y^2)\,y' = 2xy$ / $y^2 - x^2 = Cy$; $y = 0$ /

f) $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$ / $\ln Cx = \mathrm{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)$; $y = x\,e^{2k\pi}$, $k \in Z$ /

g) $y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0$; $y(1) = 0$ / $y = \frac{x^2 - 1}{2}$ /

h) $(xy' - y)\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = x$; $y(1) = 0$ / $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}}$ /

i) $(y^2 - 3x^2)\,dy + 2xy\,dx = 0$; $y(0) = 1$ / $y^3 = y^2 - x^2$ /

j) $y' = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$; $y(1) = 1$ / $y = -x$ /

. Převedením na homogenní rovnici řešte

a) $(2x - 4y + 6)\,dx + (x + y - 3)\,dy = 0$ / $(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2$ /

b) $(2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0$ / $2x + y - 1 = C\,e^{2y-x}$ /

c) $(x + 4y)\,y' = 2x + 3y - 5$ / $(y - x + 5)^5(x + 2y - 2) = C$ /

d) $y' = 2\left(\dfrac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2$ / $y + 2 = C\,e^{-2 \operatorname{arctg} \frac{y+2}{x-3}}$ /

e) $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$ / $x + 2y + 3 \ln|x + y - 2| = C$ /

. Řešte rovnice

a) $xy' - 2y = 2x^4$ / $y = Cx^2 + x^4$ /

b) $xy' + xy + 1 = 0$ / $xy = C - \ln|x|$ /

c) $xy' + (x + 1)\,y = 3x^2 e^{-x}$ / $xy = (x^3 + C)\,e^{-x}$ /

d) $(xy + e^x)\,dx - x\,dy = 0$ / $y = e^x(\ln|x| + C)$ /

e) $y = x(y' - x\cos x)$ / $y = x(C + \sin x)$ /

f) $(xy' - 1)\ln x = 2y$ / $y = C\ln^2 x - \ln x$ /

g) $y \sin x + y' \cos x = 1$ / $y = \sin x + C\cos x$ /

h) $(2e^y - x)\,y' = 1$ / $x = e^y + C\,e^{-y}$ /

i) $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$ / $x = C\,y^3 + y^2$ /

j) $y' = \dfrac{1}{x \sin y + 2 \sin 2y}$ / $x = 8 \sin^2 \frac{y}{2} + C\,e^{-\cos y}$ /

k) $y' + \frac{3}{x}\,y = \frac{2}{x^3}$; $y(1) = 1$ / $y = -\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}$ /

l) $y' - 2xy = 1$; $y(0) = 0$ / $y = e^{x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ /

m) $2\sqrt{x}\,y' - y = -\sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}$; y je omezená pro $x \longrightarrow \infty$ / $y = \cos\sqrt{x}$ /

n) $2x^2 y' - xy = 2x\cos x - 3\sin x$; $y \longrightarrow 0$ pro $x \longrightarrow \infty$ / $\dfrac{\sin x}{x}$ /

o) $(1 + x^2)\ln(1 + x^2)\,y' - 2xy = \ln(1 + x^2) - 2x \operatorname{arctg} x$

$y \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$ pro $x \longrightarrow -\infty$ / $y = \operatorname{arctg} x$ /

6. Převedením na lineární rovnici řešte

a) $y' + 2y = y^2 e^x$ / $y(e^x + C e^{2x}) = 1$, $y = 0$ /

b) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$ / $y = x^4 \ln^2 Cx$, $y = 0$ /

c) $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$ / $y^{-2} = x^4(2 e^x + C)$, $y = 0$ /

d) $(1 + x^2) y' = xy + x^2 y^2$ / $\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} (C - \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2} \ln(x+\sqrt{x^2+1}))$ /

7. Řešte rovnice

a) $2xy\, dx + (x^2 - y^2)\, dy = 0$ / $3x^2y - y^3 = C$ /

b) $e^{-y}\, dx - (2y + x e^{-y})\, dy = 0$ / $x e^{-y} - y^2 = C$ /

c) $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})\, dx - \sqrt{x^2 - y}\, dy = 0$ / $x^2 + \frac{2}{3} (x^2 - y)^{3/2} = C$ /

d) $(1 + y^2 \sin 2x)\, dx - 2y \cos^2 x\, dx = 0$ / $x - y^2 \cos^2 x = C$ /

e) $(\frac{x}{\sin y} + 2)\, dx + \frac{(x^2 + 1) \cos y}{\cos 2y - 1}\, dy = 0$ / $x^2 + 1 = 2(C - 2x) \sin y$ /

f) $3x^2 (1 + \ln y)\, dx = (2y - \frac{x^3}{y})\, dy$ / $x^3 + x^3 \ln y - y^2 = C$ /

g) $\frac{x\, dx + y\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y\, dx - x\, dy}{x^2}$ / $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C$ /

h) $\frac{y + \sin x \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}\, dx + \frac{x}{\cos^2(xy)}\, dy + \sin y\, dy = 0$

/ $\mathrm{tg}(xy) - \cos x - \cos y = C$ /

i) $(1 + x\sqrt{x^2 + y^2})\, dx + (-1 + \sqrt{x^2 + y^2})\, y\, dy = 0$

/ $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3} + x - \frac{1}{2} y^2 = C$ /

j) $(\frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + 1)\, dx + (\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2})\, dy = 0$

/ $\sin \frac{y}{x} - \cos \frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C$ /

8. Najděte obálku soustavy křivek

a) $y = C x^2 - C^2$ / $4y = x^4$ /

b) $C y = (x - C)^2$ / $y = 0$, $y = - 4x$ /

c) $y = C(x - C)$ / $y = 0$, $27 y = 4 x^3$ /

d) $xy = C y - C^2$ / $y = 4x$ /

9. Řešte rovnice

a) $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$ / $y = C x + \sqrt{1 + C^2}$; $x^2 + y^2 = 1$ /

b) $y = xy' - y'^2$ / $y = Cx - C^2$; $4y = x^2$ /

c) $xy' - y = \ln y'$ / $y = Cx - \ln C$; $y = \ln x + 1$ /

d) $y = y'(x + 1) + y'^2$ / $y = Cx + C + C^2$; $y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2$ /

e) $y = xy' + \sin y'$ / $y = Cx + \sin C$; $y = x(\pi - \arccos x) + \sqrt{1 - x^2}$ /

f) $y = xy' + \dfrac{a y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$ / $y = Cx + \dfrac{C a}{\sqrt{1 + C^2}}$; $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ /

10. Řešte rovnice

a) $2y'^2 (y - xy') = 1$ / $2C^2(y - Cx) = 1$; $8y^3 = 27 x^2$ /

b) $y = 2xy' - 4y'^3$ / $x = 3p^2 + Cp^{-2}$; $y = 2p^3 + 2Cp^{-1}$; $y = 0$ /

c) $2xy' - y = \ln y'$ / $xp^2 = p + C$; $y = 2 + 2Cp^{-1} - \ln p$ /

d) $y = x(1 + y') + y'^2$ / $x = 2(1 - p) + Ce^{-p}$; $y = \left\{ 2(1-p) + Ce^{-p} \right\} . (1 + p) + p^2$ /

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu.

1. Rozhodněte o lineární závislosti nebo nezávislosti systémů funkcí

a) $4 , x$ / n / b) $1 , 2 , x , x^2$ / z /

c) $e^x , x e^x , x^2 e^x$ / n / d) $\sin x , \cos x , \cos 2x$ / n /

e) $5 , \cos^2 x , \sin^2 x$ / z / f) $\cos x , \cos(x + 1) , \cos(x - 2)$ / z /

g) $1 , \arcsin x , \arccos x$ / z /

2. Najděte Wronskián funkcí

a) $1 , x$ / 1 / b) $e^{-x} , x e^{-x}$ / e^{-x} /

c) $2 , \cos x , \cos 2x$ / $-8 \sin^3 x$ / d) $4 , \sin^2 x , \cos 2x$ / 0 /

e) $e^{-3x} \sin 2x , e^{-3x} \cos 2x$ / $-2 e^{-6x}$ /

3. Najděte obecné řešení následujících rovnic, jestliže znáte partikulární integrál

a) $(\sin x - \cos x)y'' - 2 \sin x\, y' + (\cos x + \sin x)y = 0$; $y_1 = e^x$

/ $y = C_1 e^x + C_2 \sin x$ /

b) $(1 - x^2)y'' - xy' + \frac{1}{4} y = 0$; $y_1 = \sqrt{1 + x}$ / $y = C_1\sqrt{1 + x} + C_2\sqrt{1 - x}$ /

c) $x^2(x + 1)\, y'' - 2y = 0$; $y_1 = 1 + \frac{1}{x}$

/ $y = C_1(1 + \frac{1}{x}) + C_2(\frac{x}{2} + 1 - \frac{x + 1}{x} \ln|x + 1|)$ /

d) $xy'' + 2y' - xy = 0$; $y_1 = \frac{e^x}{x}$ / $xy = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$ /

e) $y'' - 2(1 + tg^2 x)\, y = 0$; $y_1 = tg\, x$ / $y = C_1\, tg\, x + C_2(1 + x\, tg\, x)$ /

f) $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0$; $y_1 = e^x - 1$ / $y = C_1(e^x - 1) + \frac{C_2}{e^x + 1}$ /

g) $x^2(2x - 1)y''' + (4x - 3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$; $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$

/ $y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3(x \ln|x| + 1)$ /

h) $(x^2 - 2x + 3)y''' - (x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$; $y_1 = x$, $y_2 = e^x$

/ $y = C_1 x + C_2 e^x + C_3 (x^2 - 1)$ /

4. Najděte obecné řešení rovnic (hledejte partikulární integrál ve tvaru $y = e^{\lambda x}$ nebo ve tvaru polynomu).

a) $(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0$ / $y = C_1 x + C_2 e^{-x}$ /

b) $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$ / $y = (C_1 x^2 + C_2) e^x$ /

c) $x(x - 1)y'' - xy' + y = 0$ / $y = C_1(1 + x \ln|x|) + C_2 x$ /

d) $(x^2 - 1)y'' + (x - 3)y' - y = 0$ / $y = C_1(x - 3) + \frac{C_2}{x + 1}$ /

e) $xy'' - (x + 1)y' - 2(x - 1)y = 0$ / $y = C_1 e^{2x} + C_2(3x + 1) e^{-x}$ /

5. Řešte rovnice

a) $3y'' - 2y' - 8y = 0$ / $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$ /

b) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$

/ $y = e^x (1 + x)$ /

c) $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$ / $y = 4 e^x + 2 e^{3x}$ /

d) $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$ / $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$ /

e) $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$ / $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6 x)$ /

f) $4y'' - 8y' + 5y = 0$ / $y = e^x (C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2})$ /

g) $y''' - 8y = 0$ / $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos\sqrt{3}x + C_3 \sin\sqrt{3}\, x)$ /

h) $y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$ / $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} +$

$+ (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)e^{-x}$ /

i) $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ / $y = e^x \sin x$ /

j) $y'' - 2y' + 3y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ / $y=e^x(\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x)$ /

. Sestavte lineární homogenní diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, je-li její fundamentální systém

a) e^{-x} , e^x / $y'' - y = 0$ / b) 1 , e^x / $y'' - y' = 0$ /

c) e^{-2x} , $x\,e^{-2x}$ / $y'' + 4y' + 4y = 0$ /

d) $\sin 3x$, $\cos 3x$ / $y'' + 9y = 0$ /

e) e^x , $x\,e^x$, e^{2x} / $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$ /

f) 1 , $e^{-x}\sin x$, $e^{-x}\cos x$ / $y''' + 2y'' + 2y' = 0$ /

. Napište lineární homogenní diferenciální rovnici s konstantními koeficienty nejmenšího možného řádu tak, aby měla řešení

a) $y_1 = x^2 e^x$ / $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ /

b) $y_1 = e^{2x}\cos x$ / $y'' - 4y' + 5y = 0$ /

c) $y_1 = x \sin x$ / $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ /

d) $y_1 = x\,e^x \cos 2x$ / $y^{IV} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0$ /

e) $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$ / $y^{IV} + y'' = 0$ /

3. Řešte rovnice

a) $y'' - 2y' + y = f(x)$, kde α) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ β) $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$

/ $y = e^x(x \ln|x| + C_1x + C_2)$; $y = e^x(C_1x + C_2 - \ln\sqrt{x^2+1} + x \operatorname{arctg} x)$ /

b) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$ / $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ /

c) $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$ / $y = 2 + C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$ /

d) $y'' - y' = f(x)$, kde α) $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ β) $f(x) = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$

γ) $f(x) = e^{2x}\cos e^x$ / $y = e^x(x + C_1) - (e^x + 1)\ln(e^x + 1) + C_2$;

$y = \frac{1}{2} e^x\left\{\arcsin e^x + e^x\sqrt{1 - e^{2x}} + C_1\right\} + \frac{1}{3}\sqrt{(1 - e^{2x})^3} + C_2$;

$y = C_1 e^x - \cos e^x + C_2$ /

. Řešte rovnice

a) $y'' + y = 4x\,e^x$ / $y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x - 2)e^x$ /

d) $xy'' + 2y' - xy = 0$; $y_1 = \frac{e^x}{x}$ / $xy = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^x$ /

e) $y'' - 2(1 + tg^2 x)\, y = 0$; $y_1 = tg\, x$ / $y = C_1\, tg\, x + C_2(1 + x\, tg\, x)$ /

f) $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0$; $y_1 = e^x - 1$ / $y = C_1(e^x - 1) + \frac{C_2}{e^x + 1}$ /

g) $x^2(2x - 1)y''' + (4x - 3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$; $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$

/ $y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3(x \ln|x| + 1)$ /

h) $(x^2 - 2x + 3)y''' - (x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$; $y_1 = x$, $y_2 = e^x$

/ $y = C_1 x + C_2\, e^x + C_3\, (x^2 - 1)$ /

4. Najděte obecné řešení rovnic (hledejte partikulární integrál ve tveru $y = e^{\lambda x}$ nebo ve tvaru polynomu).

a) $(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0$ / $y = C_1\, x + C_2\, e^{-x}$ /

b) $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$ / $y = (\, C_1 x^2 + C_2\,)\, e^x$ /

c) $x(x - 1)y'' - xy' + y = 0$ / $y = C_1(1 + x \ln|x|\,) + C_2\, x$ /

d) $(x^2 - 1)y'' + (x - 3)y' - y = 0$ / $y = C_1(x - 3) + \frac{C_2}{x + 1}$ /

e) $xy'' - (x + 1)y' - 2(x - 1)y = 0$ / $y = C_1\, e^{2x} + C_2(3x + 1)\, e^{-x}$ /

5. Řešte rovnice

a) $3y'' - 2y' - 8y = 0$ / $y = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-\frac{4}{3}x}$ /

b) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$

/ $y = e^x\, (1 + x)$ /

c) $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$ / $y = 4\, e^x + 2\, e^{3x}$ /

d) $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$ / $y = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{-2x} + C_3\, e^{-3x}$ /

e) $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$ / $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6 x)$ /

f) $4y'' - 8y' + 5y = 0$ / $y = e^x\, (C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}\,)$ /

g) $y''' - 8y = 0$ / $y = C_1\, e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos\sqrt{3}x + C_3 \sin\sqrt{3}\, x\,)$ /

h) $y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$ / $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} +$

$+ (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)e^{-x}$ /

i) $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ / $y = e^x \sin x$ /

j) $y'' - 2y' + 3y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ / $y = e^x(\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x)$ /

. Sestavte lineární homogenní diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, je-li její fundamentální systém

a) e^{-x} , e^x / $y'' - y = 0$ / b) 1 , e^x / $y'' - y' = 0$ /

c) e^{-2x} , $x\,e^{-2x}$ / $y'' + 4y' + 4y = 0$ /

d) $\sin 3x$, $\cos 3x$ / $y'' + 9y = 0$ /

e) e^x , $x\,e^x$, e^{2x} / $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$ /

f) 1 , $e^{-x}\sin x$, $e^{-x}\cos x$ / $y''' + 2y'' + 2y' = 0$ /

. Napište lineární homogenní diferenciální rovnici s konstantními koeficienty nejmenšího možného řádu tak, aby měla řešení

a) $y_1 = x^2 e^x$ / $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ /

b) $y_1 = e^{2x}\cos x$ / $y'' - 4y' + 5y = 0$ /

c) $y_1 = x \sin x$ / $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ /

d) $y_1 = x\,e^x \cos 2x$ / $y^{IV} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0$ /

e) $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$ / $y^{IV} + y'' = 0$ /

. Řešte rovnice

a) $y'' - 2y' + y = f(x)$, kde α) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ β) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

/ $y = e^x(x\ln|x| + C_1x + C_2)$; $y = e^x(C_1x + C_2 - \ln\sqrt{x^2+1} + x\,\mathrm{arctg}\,x)$ /

b) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x+1}$ / $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x+1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ /

c) $y'' + y + \mathrm{ctg}^2 x = 0$ / $y = 2 + C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|$ /

d) $y'' - y' = f(x)$, kde α) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ β) $f(x) = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$

γ) $f(x) = e^{2x}\cos e^x$ / $y = e^x(x + C_1) - (e^x+1)\ln(e^x+1) + C_2$;

$y = \frac{1}{2}e^x\left\{\arcsin e^x + e^x\sqrt{1-e^{2x}} + C_1\right\} + \frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3} + C_2$;

$y = C_1 e^x - \cos e^x + C_2$ /

. Řešte rovnice

a) $y'' + y = 4x\,e^x$ / $y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x-2)e^x$ /

b) $y'' - y = 2e^x - x^2$ / $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x e^x + x^2 + 2$ /

c) $y'' + y' - 2y = 3x e^x$ / $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \right) e^x$ /

d) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ / $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{\sin x}{10} + \frac{3 \cos x}{10}$ /

e) $y'' + y = 4 \sin x$ / $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x \cos x$ /

f) $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$ / $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (0{,}1x - 0{,}12)\cos x -$
$- (0{,}3x + 0{,}34)\sin x$ /

g) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + x e^{-x}$ / $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{x}{5} e^{-4x} -$
$- \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36} \right) e^{-x}$ /

h) $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$ / $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x}\left(\frac{6}{37} \sin x - \frac{1}{37} \cos x\right)$ /

i) $y'' - 2y' + y = 6x e^x$ / $y = (C_1 + C_2 x + x^3) e^x$ /

j) $y'' + y = x \sin x$ / $y = \left(C_1 - \frac{x^2}{4}\right) \cos x + \left(C_2 + \frac{x}{4}\right) \sin x$ /

10. Řešte úlohy

a) $y'' + 9y = 6 e^{3x}$; $y(0) = y'(0) = 0$ / $y = -\frac{1}{3} (\cos 3x + \sin 3x - e^{3x})$ /

b) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$
/ $y = e^{2x}(\cos x - 2\sin x) + (x + 1)^2 e^x$ /

c) $y'' + 6y' + 9y = 10 \sin x$; $y(0) = y'(0) = 0$
/ $y = \left(x + \frac{3}{5}\right) e^{-3x} + \frac{1}{5} (4\sin x - 3\cos x)$ /

d) $y'' + 4y = \sin x$; $y(0) = y'(0) = 1$
/ $y = \cos x + \frac{1}{3} (\sin 2x + \sin x)$ /

e) $y'' + y = 2\cos x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ / $y = \cos x + x \sin x$ /

11. Odhadněte partikulární integrály následujících rovnic

a) $y'' - 7y' = (x - 1)^2$ / $A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x$ /

b) $y'' + 7y' = e^{-7x}$ / $Ax\, e^{-7x}$ /

c) $y'' - 8y' + 16y = (10 - x)\, e^{4x}$ / $(A_1 x^3 + A_2 x^2)\, e^{4x}$ /

d) $y'' + 25y = \cos 5x$ / $x(A \cos 5x + B \sin 5x)$ /

e) $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$ / $(A \cos 2x + B \sin 2x)\, e^{2x}$ /

f) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x)$ / $x(A \cos 2x + B \sin 2x)\, e^{2x}$ /

g) $y'' + 4y = \sin x \sin 2x$ / $A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 3x + B_2 \sin 3x$ /

h) $y^{IV} - y''' = 4$ / $A x^3$ /

i) $y''' + 2y'' + y' = (2x + 1) \sin x + (x^2 - 4x) \cos x$

/ $(Ax^2 + Bx + C) \cos x + (Dx^2 + Ex + F) \sin x$ /

j) $y''' - y' = e^x \sin x + 2x^2$ / $e^x(A \cos x + B \sin x) +$

$+ x(Cx^2 + Dx + E)$ /

k) $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = e^x (x \cos x + \sin x)$ $\lambda_1 = 1 + i$

/ $x^2 e^x \{ (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x \}$ /

l) $y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 3 \cos 2x + 1$

/ $x^2 (A \cos 2x + B \sin 2x) + C$ /

12. Vypočtěte partikulární integrál rovnice $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, je-li $f(x)$ rovno

a) $10 e^{-x}$ b) $3 e^{2x}$ c) $2 \sin x$ d) $2x^3 - 30$ e) $2 e^x \cos \frac{x}{2}$

f) $x - e^{-2x} + 1$ g) $e^x(3 - 4x)$ h) $3x + 5\sin 2x$ i) $2e^x - e^{-2x}$

j) $\sin x \sin 2x$ k) $\operatorname{sh} x$ / $\frac{5}{3} e^{-x}$; $3x e^{2x}$; $\frac{3}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x$;

$x^3 + \frac{9}{2} x^2 + \frac{21}{2} x - \frac{15}{4}$; $- \frac{8}{5} e^x \{ \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \}$; $\frac{1}{2} x + \frac{5}{4} - \frac{1}{12} e^{-2x}$;

$e^x(2x^2 + x)$; $\frac{3}{2} x + \frac{1}{4} (9 + 3\cos 2x - \sin 2x)$; $-2x e^x - \frac{1}{12} e^{-2x}$;

$\frac{1}{20} \cos x - \frac{3}{20} \sin x + \frac{7}{260} \cos 3x + \frac{9}{260} \sin 2x$; $- \frac{1}{12} e^{-x} - \frac{1}{2} x e^x$ /

13. Vypočtěte partikulární integrál rovnice $2y'' + 5y' = f(x)$, je-li $f(x)$ rovno

a) $5x^2 - 2x - 1$ b) e^x c) $29 \cos x$ d) $\cos^2 x$ e) $0{,}1e^{-2{,}5x} -$

$- 25 \sin 2{,}5x$ f) $29x \sin x$ g) $100x e^{-x} \cos x$ h) $3\operatorname{ch} \frac{5}{2} x$

/ $\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{5} x^2 + \frac{7}{25} x$; $\frac{1}{7} e^x$; $5\sin x - 2\cos x$; $\frac{1}{10} x + \frac{5}{164} \sin 2x -$

$- \frac{1}{41} \cos 2x$; $\cos 2{,}5x + \sin 2{,}5x - 0{,}02x e^{-2{,}5x}$; $(-5x - \frac{16}{29}) \cos x -$

$- (2x - \frac{185}{29}) \sin x$; $\frac{1}{169} e^{-x} \{ (650x + 2650) \sin x - (3250x - 400) \cos x \}$;

$\frac{3}{10} \{ \frac{1}{5} e^{5x/2} - x e^{-5x/2} \}$ /

14. Vypočtěte partikulární integrál rovnice $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, je-li $f(x)$ rovno

a) 1 b) e^{-x} c) $3\,e^{2x}$ d) $2(\sin 2x + x)$ e) $\sin x \cos 2x$

f) $\sin^3 x$ g) $8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x)$ h) $\mathrm{sh}\, 2x$ i) $\mathrm{sh}\, x + \sin x$

j) $e^x - \mathrm{sh}(x - 1)$ / $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{9} e^x$; $\frac{3}{2} x^2 e^{2x}$; $\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}$;

$\frac{1}{169} (-\frac{5}{2} \sin 3x + 6\cos 3x) + \frac{1}{50} (3\sin x + 4\cos x)$; $\frac{3}{100} (3\sin x + 4\cos x)$

$\frac{1}{676} (5\sin 3x - 12 \cos 3x)$; $2x^2 + 4x + 3 + 4x^2 e^{2x} + \cos 2x$;

$\frac{1}{4} (x^2 e^{2x} - \frac{1}{8} e^{-2x})$; $\frac{1}{2} (e^x - \frac{1}{9} e^{-x}) + \frac{1}{25} (3\sin x + 4\cos x)$;

$e^x - \frac{1}{2} e^{x-1} + \frac{1}{18} e^{1-x}$ /

15. Vypočtěte partikulární integrál rovnice $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, je-li $f(x)$ rovno

a) $5\,e^{3x/5}$ b) $\sin \frac{4}{5} x$ c) $e^{2x} + 2x^3 - x + 2$ d) $e^{3x/5} \cos x$

e) $e^{3x/5} \sin \frac{4}{5} x$ f) $e^x\, \mathrm{ch}\, x$ / $\frac{25}{16} e^{3x/5}$; $\frac{15}{219} \sin \frac{4}{5} x + \frac{40}{219} \cos \frac{4}{5} x$;

$\frac{1}{13} e^{2x} + \frac{1}{5} (2x^3 + \frac{36}{5} x^2 + \frac{107}{25} x - \frac{1118}{125})$; $-\frac{5}{9} e^{3x/5} \cos x$;

$-\frac{1}{8} x\, e^{3x/5} \cos \frac{4}{5} x$; $\frac{1}{26} e^{2x} + \frac{1}{10}$ /

16. Řešte rovnice

a) $x^2 y'' - 3x y' + 3y = 0$ / $y = C_1 x + C_2 x^3$ /

b) $x y''' + y'' = 0$ / $y = C_1 + x(C_2 + C_3 \ln x)$ /

c) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = x$ / $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \frac{1}{2} x \ln x$ /

d) $x^2 y'' - xy' + y = 6x \ln x$ / $y = x \ln^3 x + x(C_1 + C_2 \ln x)$ /

e) $x^2 y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x)$ / $y = -\ln x \cos(\ln x) + C_1 \cos(\ln x) +$
$+ C_2 \sin(\ln x)$ /

Nelineární rovnice vyšších řádů.

1. Řešte rovnice

a) $y''' = x\, e^x$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ / $y = (X - 3)\, e^x +$
$+ \frac{x^2}{2} + 2x + 3$ /

b) $y''' = x + \cos x$ / $y = \frac{x^2}{24} - \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$ /

c) $y'' = \mathrm{arctg}\, x$ / $y = \frac{x^2 - 1}{2} \mathrm{arctg}\, x - \frac{x}{2} \ln(x^2 + 1) + C_1 x + C_2$ /

5. Rozhodněte, zda jsou nezávislé prvé integrály $\frac{x+y}{z+x} = C_1$ $\frac{z-y}{x+y} = C_2$ soustavy $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$

6. Řešte následující soustavy homogenních diferenciálních rovnic.

a) $x' = 2x + y$, $y' = 3x + 4y$ $\quad$ / $x = C_1 e^{t} + C_2 e^{5t}$; $y = -C_1 e^{t} + 3C_2 e^{5t}$ /

b) $x' = x - y$, $y' = y - 4x$ $\quad$ / $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$; $y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}$ /

c) $x' + x - 8y = 0$, $y' - x - y = 0$ $\quad$ / $x = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}$; $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$ /

d) $x' = x + y$, $y' = 3y - 2x$ $\quad$ / $x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$; $y = e^{2t}\{(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t\}$ /

e) $x' = x - 3y$, $y' = 3x + y$ $\quad$ / $x = e^{t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$; $y = e^{t}(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)$ /

f) $x' + x + 5y = 0$, $y' - x - y = 0$ $\quad$ / $x = (2C_2 - C_1)\cos 2t - (2C_1 + C_2)\sin 2t$; $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$ /

g) $x' = 2x + y$, $y' = 4y - x$ $\quad$ / $x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}$; $y = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}$ /

h) $x' = 3x - y$, $y' = 4x - y$ $\quad$ / $x = (C_1 + C_2 t)e^{t}$; $y = (2C_1 - C_2 + 2C_2 t)e^{t}$ /

i) $x' = x + z - y$, $y' = x + y - z$, $z' = 2x - y$ $\quad$ / $x = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}$; $y = C_1 e^{t} - 3C_3 e^{-t}$; $z = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t}$ /

j) $x' = 3x - y + z$, $y' = x + y + z$, $z' = 4x - y + 4z$ $\quad$ / $x = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}$; $y = C_1 e^{t} - 2C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}$; $z = -C_1 e^{t} - 3C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{5t}$ /

k) $x' = 4y - 2z - 3x$, $y' = z + x$, $z' = 6x - 6y + 5z$ $\quad$ / $x = C_1 e^{t} + C_3 e^{-t}$; $y = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$; $z = 2C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t}$ /

l) $x' = x - y - z$ / $x = e^t(2C_2 \sin 2t + 2C_3 \cos 2t)$;
$y' = x + y$ $y = e^t(C_1 - C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t)$;
$z' = 3x + z$ $z = e^t(-C_1 - 3C_2 \cos 2t + 3C_3 \sin 2t)$ /

m) $x' = 4x - y - z$ / $x = C_1e^{2t} + (C_2 + C_3)e^{3t}$; $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$;
$y' = x + 2y - z$ $z = C_1e^{2t} + C_3e^{3t}$ /
$z' = x - y + 2z$

n) $x' = x - y + z$ / $x = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{2t}$;
$y' = x + y - z$ $y = (C_1 - 2C_2 + C_3t)e^t$;
$z' = 2z - y$ $z = (C_1 - C_2 + C_2t)e^t + C_3e^{2t}$ /

o) $x' = 4x - y$ / $x = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^{2t}$;
$y' = 3x + y - z$ $y = \{2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)t + 2C_3t^2\}e^{2t}$;
$z' = x + z$ $z = \{C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 - 2C_3)t + C_3t^2\}e^{2t}$ /

7. Řešte následující soustavy nehomogenních diferenciálních rovnic.

a) $x' = y + 2e^t$ / $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + t\,e^t - t^2 - 2$;
$y' = x + t^2$ $y = C_1e^t - C_2e^{-t} + (t - 1)e^t - 2t$ /

b) $x' = y - 5\cos t$ / $x = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} - 2\sin t - \cos t$;
$y' = 2x + y$ $y = 2C_1e^{2t} - C_2e^{-t} + \sin t + 3\cos t$ /

c) $x' = 4x + y - e^{2t}$ / $x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + (t + 1)e^{2t}$;
$y' = y - 2x$ $y = -2C_1e^{2t} - C_2e^{3t} - 2t\,e^{2t}$ /

d) $x' = 2y - x + 1$ / $x = (C_1 + 2C_2t)e^t - 3$;
$y' = 3y - 2x$ $y = (C_1 + C_2 + 2C_2t)e^t - 2$ /

e) $x' = 5x - 3y + 2e^{3t}$ / $x = C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}$;
$y' = x + y + 5e^{-t}$ $y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}$ /

f) $x' = 2x - 4y$ / $x = 4C_1e^t + C_2e^{-2t} - 4t\,e^t$;
$y' = x - 3y + 3e^t$ $y = C_1e^t + C_2e^{-2t} - (t - 1)e^t$ /

g) $x' = 2x - y$ / $x = C_1e^{3t} + 3t^2 + 2t + C_2$;
$y' = y - 2x + 18t$ $y = -C_1e^{3t} + 6t^2 - 2t + 2C_2 - 2$ /

h) $x' = x + 2y + 16t\, e^t$ / $x = 2C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - (12t + 13)e^t$;
$y' = 2x - 2y$ $\quad y = C_1e^{2t} - 2C_2e^{-3t} - (8t + 6)e^t$ /

i) $x' = 2x - y$ / $x = (C_1 + C_2t - t^2)e^t$;
$y' = x + 2e^t$ $\quad y = \{C_1 - C_2 + (C_2 + 2)t - t^2\}e^t$ /

j) $x' = x - y + 8t$ / $x = C_1 \cos 2t - C_2 \sin 2t + 2t + 2$;
$y' = 5x - y$ $\quad y = (C_1 + 2C_2)\cos 2t + (2C_1 - C_2)\sin 2t + 10t$ /

k) $x' = 2x - y$ / $x = C_1e^t + C_2e^{3t} + e^t(2\cos t - \sin t)$;
$y' = 2y - x - 5e^t \sin t$ $\quad y = C_1e^t - C_2e^{3t} + e^t(3\cos t + \sin t)$ /

l) $x' = y + \mathrm{tg}^2 t - 1$ / $x = C_1\cos t + C_2\sin t + \mathrm{tg}\, t$;
$y' = -x + \mathrm{tg}\, t$ $\quad y = -C_1\sin t + C_2\cos t + 2$ /

m) $x' = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}$ / $x = C_1 + 2C_2e^{-t} + 2e^{-t}\ln|e^t - 1|$;
$y' = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}$ $\quad y = -2C_1 - 3C_2e^{-t} - 3e^{-t}\ln|e^t - 1|$ /

n) $x' = x - y + \dfrac{1}{\cos t}$ / $x = C_1\cos t + C_2\sin t + t(\cos t + \sin t) +$
$+ (\cos t - \sin t)\ln|\cos t|$;
$y' = 2x - y$ $\quad y = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t +$
$+ 2\cos t \ln|\cos t| + 2t \sin t$ /

o) $x' = 2x + y - 2z - t + 2$ / $x = C_1e^t + C_2\sin t + C_3\cos t$;
$y' = 1 - x$ $\quad y = t - C_1e^t + C_2\cos t - C_3\sin t$;
$z' = x + y - z - t + 1$ $\quad z = 1 + C_2\sin t + C_3\cos t$ /

3. Najděte partikulární řešení následujících soustav diferenciálních rovnic.

a) $y' = y + z$; $y(0) = 0$, $z(0) = -1$
$z' = -2y + 4z$ / $y = e^{2t} - e^{3t}$; $z = e^{2t} - 2e^{3t}$ /

b) $y' = 3y - z$; $y(0) = 1$, $z(0) = 5$
$z' = 10y - 4z$ / $y = e^{-2t}$; $z = 5\, e^{-2t}$ /

c) $x' = 3x + 8y$; $x(0) = 6$, $y(0) = -2$
$y' = -3y - x$ / $x = 2(2e^t + e^{-t})$, $y = -e^t - e^{-t}$ /

2. Řešte následující okrajové úlohy

a) $y'' - y = 0$; $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$ $\left[y = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2\pi} \right]$

b) $y'' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$ [nemá řešení]

c) $y'' - k^2 y = 0$; $y(0) = v_1$, $y(x_0) = v_2$

$\left[y = \dfrac{1}{\operatorname{sh} k x_0} \left(v_1 \operatorname{sh} k (x_0 - x) + v_2 \operatorname{sh} k x \right) \right]$

d) $y'' - \alpha^2 y = 0$; $y(0) = v$, $y'(x_0) = 0$ $\left[y = v \dfrac{\operatorname{ch} \alpha (x_0 - x)}{\operatorname{ch} \alpha x_0} \right]$

e) $y'' - \alpha^2 s y = 0$; $y(0) = \dfrac{1}{s}$, $y'(x_0) = 0$

$\Big[s < 0$; $y = \dfrac{\cos \alpha \sqrt{-s}\,(x_0 - x)}{s \cos \alpha \sqrt{-s}\, x_0}$ pro $x_0 \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2\alpha\sqrt{-s}}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

pro $x_0 = \dfrac{(2k+1)\pi}{2\alpha\sqrt{-s}}$ nemá řešení;

$s > 0$; $y = \dfrac{\operatorname{ch} \alpha \sqrt{s}\,(x_0 - x)}{s \operatorname{ch} \alpha \sqrt{s}\, x_0} \Big]$

f) $y'' - \lambda^2 y = 0$; $\lambda \neq 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = \dfrac{1}{\lambda}$ $\left[y = \dfrac{1}{\lambda} \dfrac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda} \right]$

g) $y'' - \lambda^2 y = 0$; $\lambda \neq 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = \dfrac{1}{\lambda}$ $\left[y = \dfrac{1}{\lambda^2} \dfrac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda} \right]$

h) $y'' - \lambda^2 y = 0$; $\lambda \neq 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = \dfrac{1}{\lambda}$ $\left[y = \dfrac{1}{\lambda} \dfrac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda} \right]$

i) $y'' - \alpha^2 s^2 y = \alpha^2 g \ell$; $y(0) = y(x_0) = 0$

$\left[y = \dfrac{g \ell}{[illegible]} \left(\operatorname{sh} \alpha s x - \operatorname{sh} \alpha s x_0 + \operatorname{sh} \alpha s (x_0 - x) \right) \right]$

j) $xy'' + y' = 0$; $y(1) = \alpha y'(1)$; $y(x)$ je omezená pro $x \to \infty$ $[y = 0]$

k) $y^{IV} - \lambda^4 y = 0$; $y(0) = y''(0) = 0$, $y(\pi) = y''(\pi) = 0$
$[y = C \sin kx$ pro $\lambda = k$; $k = 1, 2, 3, \dots$
$y = 0$ pro ostatní $\lambda]$

Najděte vlastní čísla a vlastní funkce úlohy $y'' + \lambda y = 0$, je-li

a) $x \in \langle 0, \pi \rangle$, $y(0) = y(\pi) = 0$ $[\lambda_k = k^2, y_k = \sin kx, k \in N]$

b) $x \in \langle 0, \pi \rangle$, $y(0) = y'(\pi) = 0$ $\left[\lambda_k = \frac{(2k-1)^2}{4}, y_k = \sin \frac{2k-1}{2} x, k \in N\right]$

c) $x \in \langle 0, \pi \rangle$, $y'(0) = y(\pi) = 0$ $\left[\lambda_k = \frac{(2k-1)^2}{4}, y_k = \cos \frac{2k-1}{2} x, k \in N\right]$

d) $x \in \langle 0, \pi \rangle$, $y'(0) = y'(\pi) = 0$ $[\lambda_k = k^2, y_k = \cos kx, k = 0, 1, 2, \dots]$

e) $x \in \langle 1, 2 \rangle$, $y(1) = y(2) = 0$ $[\lambda_k = k^2\pi^2, y_k = \sin k\pi x, k \in N]$

f) $x \in \langle 1, 2 \rangle$, $y(1) = y'(2) = 0$ $\left[\lambda_k = \frac{(2k-1)^2\pi^2}{4}, y_k = \cos \frac{2k-1}{2} \pi x, k \in N\right]$

g) $x \in \langle 1, 2 \rangle$, $y'(1) = y(2) = 0$ $\left[\lambda_k = \frac{(2k-1)^2\pi^2}{4}, y_k = \sin \frac{2k-1}{2} \pi x, k \in N\right]$

h) $x \in \langle 1, 2 \rangle$, $y'(1) = y'(2) = 0$ $[\lambda_k = k^2\pi^2, y_k = \cos k\pi x; k = 0, 1, 2, \dots]$

i) $x \in \langle a, b \rangle$, $y(a) = y(b) = 0$
$\left[\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}, y_k = \sin \frac{k\pi(x-a)}{b-a}, k \in N\right]$

j) $x \in \langle a, b \rangle;\ y(a) = y'(b) = 0$

$$\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2},\ y_K = \sin\frac{(2K-1)\pi(x-a)}{2(b-a)},\ K \in N\right]$$

k) $x \in \langle a, b \rangle;\ y'(a) = y(b) = 0$

$$\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2},\ y_K = \cos\frac{(2K-1)\pi(x-a)}{2(b-a)},\ K \in N\right]$$

l) $x \in \langle a, b \rangle;\ y'(a) = y'(b) = 0$

$$\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{(b-a)^2},\ y_K = \cos\frac{K\pi(x-a)}{b-a},\ K = 0, 1, 2, 3, \dots\right]$$

Najděte vlastní čísla a vlastní funkce následujících okrajových úloh.

a) $y'' + 2y' + \lambda y = 0;\ x \in \langle 0, l \rangle,\ y(0) = y(l) = 0$

$$\left[\lambda_K = 1 + \frac{K^2\pi^2}{l^2},\ y_K = e^{-x}\sin\frac{K\pi x}{l},\ K \in N\right]$$

b) $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0;\ x \in \langle 1, l \rangle,\ y(1) = y(l) = 0$

$$\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{(\ln l)^2},\ y_K = \sin\frac{K\pi \ln x}{\ln l}\right]$$

c) $y'' + (\lambda + 1)y = 0;\ x \in \langle 0, 1 \rangle,\ y(0) - y'(0) = 0,\ y(1) - y'(1) = 0$

$$\left[\lambda_K = K^2\pi^2 - 1,\ y_K = \sin(\operatorname{arctg} k\pi + K\pi x),\ K \in N\right]$$

d) $y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0;\ y(l) = 0,\ y$ je omezené pro $x \to 0_+$

$\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{l^2},\ y_K = \frac{1}{x}\sin\frac{K\pi x}{l};\right.$ převeďte danou rovnici na samoadjungovaný tvar $\left.\right]$.