Obsah

10 Diferenciální rovnice

10.1 Motivace

webmath
R.P.Feyman: "Existuje jediný způsob formulace fyzikálních zákonů, a to ve tvaru diferenciálních rovnic."

Nejen fyzika, ale i biologie, chemie nebo ekologie popisují své vztahy pomocí diferenciálních rovnic.

Na účet v bance vložíme v čase $t_0 = 0$ peníze v hodnotě $z(0)$. Při úročení s denním úrokem u máme po t_1 dnech na účtu zůstatek

$$z(t_1) = z(0) + z(0)\, u\, t_1 .$$

Na účtu tedy přibude $z(t_1) - z(0) = z(0)\, u\, t_1$ a rychlost růstu je $\frac{z(t_1)-z(0)}{t_1-0} = z(0)\, u$. "Okamžitou změnu" účtu dostaneme pro $t_1 \to 0$, potom $\lim\limits_{t_1\to t_0} \frac{z(t_1)-z(0)}{t_1-0} = z'(0)$ a

$$z'(0) = z(0)\, u .$$

Uvedená rovnost platí v libovolném čase t . Tedy

$$z'(t) = z(t)\, u$$

a jejím (obecným) řešením je funkce $z(t) = C\,\mathrm{e}^{ut}$, $C \in \mathbb{R}$. Pro (počáteční) podmínku $z(0) = z_0$ dostaneme $z_0 = C\,\mathrm{e}^0 \Rightarrow C = z_0$ a (partikulární) řešení naší úlohy má tvar

$$z(t) = z_0\, e^{ut} .$$

10.2 Diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 10.1 : (diferenciální rovnice 1.řádu)
Rovnice pro neznámou funkci $y = y(x)$, $x \in I$, $I \subset \mathbb{R}$, v níž vystupuje derivace y' a která je zapsána ve tvaru

$$\begin{array}{lll} & F(x,y,y') = 0 & \text{implicitní tvar} \\ \text{nebo} & y' = f(x,y) & \text{explicitní tvar} \end{array} \tag{1}$$

se nazývá **obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu**. Diferencovatelná funkce $y = y(x)$, $x \in I$, která splňuje rovnici (1) pro každé $x \in I$ se nazývá **řešení diferenciální rovnice**.
Podmínka

$$y(x_0) = y_0 \qquad x_0 \in I \tag{2}$$

se nazývá **počáteční podmínka** a úloha (1), (2) se nazývá **počáteční (Cauchyova) úloha**.

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá funkce n-reálných proměnných. Funkce $f = f(x,y)$ je funkce dvou reálných proměnných.

Tečné vektory v rovině-xy mají tvar $(1, y')$, resp. $(1, f(x,y))$.

Izoklina je geometrické místo bodů $[x,y]$, ve kterých tečné vektory k integrálním křivkám jsou rovnoběžné.
Rovnici izoklin píšeme ve tvaru $f(t,x) = C$ (C je konstanta).

Definice 10.2 : (geometrický popis dif. rovnice 1.řádu)
Graf řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice (1) se nazývá **integrální křivka diferenciální rovnice**.
Funkce $f(x,y)$ z rovnice $y' = f(x,y)$ určuje **směrové pole** diferenciální rovnice, což je systém tečných vektorů ke grafu řešení.
Množina bodů $[x,y]$, pro které je funkce $f(x,y)$ konstantní se nazývá **izoklina**.

Příklad 10.1 : Pro diferenciální rovnici $y' = x$ jsou rovnice izoklin tvaru $x = c$, c je libovolné číslo, což jsou přímky rovnoběžné s osou y.

Obecné řešení má tvar $y = \frac{x^2}{2} + C = \varphi(x,C)$. Integrální křivky jsou paraboly. Pro počáteční podmínku $y(0) = 3$ má počáteční úloha (partikulární) řešení tvar $y = \frac{x^2}{2} + 3$.

webmath
Geometricky interpretujeme obecné řešení diferenciální rovnice 1. řádu jako jednoparametrický systém křivek.

Definice 10.3 : **Obecným řešením** diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ se nazývá funkce $\varphi(x,C)$ závislá na volitelném parametru C taková, že k libovolné bodu $[x_0,y_0] \in D(f)$ ($D(f)$ je definiční obor funkce f) existuje (jediný) parametr C_0 takový, že $y_0 = \varphi(x_0,C_0)$ a funkce $y(x) = \varphi(x,C_0)$ řeší danou diferenciální rovnici na I.
Jestliže každým bodem integrální křivky nějakého řešení $\tilde{y}$ diferenciální rovnice prochází jiná integrální křivka, pak $\tilde{y}$ nazýváme **singulárním řešením** rovnice.

Integrální křivka singulárního řešení tvoří tzv. obálku systému křivek obecného řešení. V bodech integrální křivky singulárního řešení je porušena jednoznačnost řešení počáteční úlohy.

Příklad 10.2 : Řešením rovnice
$$y' = y^{\frac{2}{3}}$$
je každá funkce tvaru
$$y(x) = \frac{1}{27}(x+C)^3 \qquad (C \text{ je libovolná konstanta}).$$

Nulová funkce $y(x) = 0$ je však také řešením dané rovnice. Je to singulární řešení, neboť libovolným bodem $[x_0, 0]$ prochází integrální křivka řešení tvaru $y(x) = \frac{1}{27}(x-x_0)^3$.

Cvičení 10.1 : Dokažte, že obecné řešení tzv. Clairautovy rovnice
$$y'^2 - xy' + y = 0$$

je funkce $y(x) = cx - c^2$ a singulární řešení má tvar $y(x) = \frac{1}{4}x^2$. Nakreslete integrální křivky.

[Zderivováním a dosazením do původní rovnice ověříme tvrzení.]

Věta 10.1 : Funkce $y = y(x)$, $x \in I$ je řešením počáteční úlohy (1), (2) právě tehdy, když je řešením integrální rovnice

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{3}$$

<u>Důkaz</u> : Nechť $y(x)$ je řešením Cauchyovy úlohy (1), (2). Integrujeme-li rovnost

$$y'(x) = f(x, y(x))\,, \quad x \in \langle x_0, x_1 \rangle,$$

od x_0 do x, pak dostáváme

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(\xi, f(\xi))\, d\xi\,.$$

Protože $y(x_0) = y_0$, splňuje funkce $y(x)$ integrální rovnici (3). Nechť naopak $y(x)$ je řešením integrální rovnice (3), tj. platí

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi\,, \quad x \in I\,.$$

Potom $y(x_0) = y_0$ a derivováním podle x dostáváme

$$y'(x) = f(x, y(x))\,.$$

Věta 10.2 : (Peanova, Picardova)
Předpokládáme, že funkce $f(x, y)$ je spojitá na obdélníku $D = \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \times \langle y_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$. Dále položíme $M = \max\limits_{[x,y] \in D} f(x, y)\,,\ h = \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{M}\}$.
Potom v intervalu $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ existuje řešení $y(x)$ rovnice $y' = f(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$.

Nechť navíc existuje konstanta $L > 0$ taková, že $\forall\, x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle\,,\ \forall y_1, y_2 \in \langle y_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$ platí

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L\, |y_1 - y_2|\,, \qquad \text{(lipschitzova podmínka)}$$

pak existuje právě jedno řešení úlohy (1), (2).

Dokázat existenci a jednoznačnost řešení úlohy je jedním z hlavních úkolů matematické analýzy

Například rovnice

$$y' = \operatorname{sgn} x$$

řešení nemá.

<u>*Poznámka 10.1*</u>: Důkaz věty (10.2) je založen na **Picardově iterační metodě postupných aproximací**. Definujeme **nultou aproximaci**

$$y_0(x) = y_0 \quad (= konst)$$

a dosadíme ji do pravé strany v (3); dostaneme **první aproximaci**

$$y_1(x) = y_0 + \int\limits_{y_0}^{x} f(\xi, y_0)\, d\xi.$$

Po dosazení do pravé strany v (3) dostaneme **druhou aproximaci**

$$y_2(x) = y_0 + \int\limits_{y_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))\, d\xi.$$

Obecně n-tý krok iteračního procesu je dán formulí (n**-tou aproximací**)

$$y_n(x) = y_0 + \int\limits_{y_0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))\, d\xi.$$

Dostaneme tak **posloupnost postupných aproximací**

$$y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,\ y_n(x),\ \dots,$$

která za předpokladů věty (10.2) konverguje a limitní funkce $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ je řešením dané počáteční úlohy.

<u>*Příklad 10.3*</u>: Určete přibližné řešení počáteční úlohy

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

jako n-tý člen posloupnosti postupných Picardových aproximací. K výpočtu užijeme iterační formuli

$$y_n(x) = 1 + \int\limits_{0}^{x} y_{n-1}(\xi)\, d\xi.$$

Máme tedy

$$
\begin{aligned}
y_0(x) = {} & 1, \\
y_1(x) = {} & 1 + \int_0^x 1 \, d\xi = 1 + x, \\
y_2(x) = {} & 1 + \int_0^x (1+\xi) \, d\xi = 1 + x + \tfrac{x^2}{2}, \\
& \vdots \\
y_n(x) = {} & 1 + \int_0^x \left(1 + \xi + \tfrac{\xi^2}{2} + \ldots + \tfrac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}\right) \, d\xi = \\
& 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3!} + \ldots + \tfrac{x^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Z Taylorova rozvoje funkce e^x lze dokázat, že

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x) = e^x.$$

10.3 Metody řešení diferenciálních rovnic 1. řádu

Poznamenejme, že neexistuje žádná univerzální metoda na řešení všech typů diferenciálních rovnic.

Při řešení diferenciálních úloh se budeme snažit najít obecné řešení úlohy (1) a také řešení počáteční úlohy (1), (2).

Metoda přímé integrace.

1. Chceme najít obecné řešení rovnice

   $$y' = f(x), \quad x \in I\,.$$

   Určíme systém primitivních funkcí k funkci f, tj.

   $$y(x) = F(x) + C\,.$$

2. Chceme-li najít řešení počáteční úlohy

   $$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in I,$$

   pak

   a) ze systému primitivních funkcí $y(x) = F(x) + C$ vybereme takovou, která splňuje počáteční podmínku

   $$y_0 = F(x_0) + C\,.$$

   (Graf funkce y prochází bodem $[x_0, y_0]$.)
   Odtud vypočteme $C = y_0 - F(x_0)$, takže
   $y(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)\,.$

b) nebo využijeme větu (10.1), potom

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi\,.$$

Tento výsledek lze samozřejmě také psát ve tvaru $y(x) = y_0 + F(x) - F(x_0)$, neboť $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi$ (primitivní funkce vyjádřená integrálem s proměnnou horní mezí, viz definice 8.10 v MA1).

Příklad 10.4 : Řešíme počáteční úlohu

$$y' = x^3 + \sin x, \quad y(0) = 1, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Z obecného řešení

$$y(x) = \frac{x^4}{4} - \cos x + C$$

vypočteme konstantu C:

$$1 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2\,.$$

Řešení úlohy má tvar: $y(x) = \frac{x^4}{4} - \cos x + 2\,.$

b) Přímou integrací dostaneme:

$$y(x) = 1 + \int_{0}^{x} [\xi^3 + \sin \xi]\, d\xi = 1 + \frac{x^4}{4} - \cos x + 1\,.$$

Metoda separace proměnných.

Touto metodou řešíme rovnice typu

$$y' = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}, \qquad \text{kde } f_1,\ f_2 \text{ jsou dané funkce.}$$

Rovnici můžeme psát ve tvaru $\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, resp.

$$f_2(y)\, dy = f_1(x)\, dx \quad \text{(separace proměnných)}$$

a chápat jako rovnost dvou diferenciálů. Protože $y = y(x)$, pak integrováním dostaneme rovnost

$$\int_{x_0}^{x} f_2(y(\xi))\, y'(\xi)\, d\xi = \int_{x_0}^{x} f_1(\xi)\, d\xi\,,$$

neboli

$$F_2(y(x)) = F_1(x) + C\,,$$

kde F_1, F_2 jsou primitivní funkce k funkcím f_1, f_2.

Poznámka 10.2: Vztahu $F_2(y(x)) = F_1(x) + C$ říkáme funkcionální rovnice pro neznámou funkci $y(x)$. Také se nazývá **obecný integrál** dané diferenciální rovnice, neboť její řešení $y(x)$ je obecným řešením diferenciální rovnice. Říkáme také, že obecné řešení je obecným integrálem dáno **implicitně**.

Příklad 10.5: Stanovme obecné řešení (obecný integrál) diferenciální rovnice

$$y' = \frac{x}{\sin y}\,.$$

Separací proměnných převedeme rovnici na tvar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sin y} \;\Rightarrow\; \sin y\; dy = x\; dx$$

a dostaneme

$$-\cos y = \frac{x^2}{2} + C \qquad \text{obecný integrál}$$

nebo

$$-x^2 - 2\cos y = 2C \qquad \text{implicitní tvar řešení.}$$

Rovnice umožňující přechod k separaci proměnných.

Rovnici tvaru

$$y' = f(ax + by + c) \qquad \text{rovnice s přímkou}$$

převedeme substitucí $u = ax + by + c$ na rovnici se separovatelnými proměnnými.

Příklad 10.6: Příklad

$$dy\,(2x - y + 1) + dx\,(4x - 2y + 6) = 0$$

vyřešíme substitucí $u = 2x - y + 1 \Rightarrow du = 2\,dx - dy \Rightarrow dy = 2\,dx - du$, potom

$$(2\,dx - du)u + dx\,(2u+4) = 0$$

$$du\,u + dx\,(4u+4) = 0$$

$$dx = \tfrac{1}{4}\,\tfrac{u}{u+1}$$

$$x + C = \tfrac{1}{4}\,(u - \ln|u+1|)$$

$$x + C = \tfrac{1}{4}\,(2x - y + 1 - \ln|2x - y + 2|) \qquad \text{obecný integrál.}$$

Rovnici tvaru

$$y' = f(x,y)\,, \qquad \text{kde} \quad \forall\, t \in \mathbb{R} : f(tx, ty) = f(x,y)$$

převedeme substitucí $u = \frac{y}{x}$ na rovnici se separovatelnými proměnnými.

<u>*Příklad 10.7*</u>: Příklad

$$y' = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

vyřešíme substitucí $u = \frac{y}{x} \Rightarrow u\,x = y \Rightarrow y' = u'\,x + u$, potom

$$u'\,x + u = \mathrm{e}^u + u$$

$$\tfrac{du}{dx}\,x = \mathrm{e}^u$$

$$\mathrm{e}^{-u}\,du = \tfrac{1}{x}\,dx$$

$$-\mathrm{e}^{-u} = \ln|x| + C$$

$$-\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}} = \ln|x| + C \qquad \text{obecný integrál.}$$

10.3.1 Ortogonální systémy integrálních křivek.

Připomeňme, že dvě přímky ve směrnicovém tvaru

$$y = k_1 x + q_1$$

$$y = k_2 x + q_2$$

jsou kolmé, jestliže

$$k_1 \cdot k_2 = -1\,.$$

Z definice (10.2) víme, že integrální křivky rovnice

$$y' = f(x,y)$$

tvoří jednoparametrický systém křivek a že funkce $f(x,y)$ určuje v bodě $[x,y]$ směrnici tečny k jedné z těchto křivek. Potom hodnota $-\frac{1}{f(x,y)}$ určí směrnici přímky kolmé (normály) v tomtéž bodě. Proto obecné řešení (obecný integrál) rovnice

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)}$$

určí systém integrálních křivek ortogonálních k systému původnímu.

Příklad 10.8 :

diferenciální rovnice		"ortogonální" rovnice
$y' = \frac{y}{x}$		$y' = -\frac{x}{y}$
	obecné řešení	
$y(x) = C\,x$		$y^2 + x^2 = C$
systém přímek procházející počátkem		systém kružnic se středem v počátku

Vidíme, že znalost jednoho systému dovoluje určit systém ortogonální. S úlohami tohoto typu se můžeme setkat např. v teorii pole (systém siločar a systém ekvipotenciálních čar).

10.4 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 10.4 : Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = a(x)\,y + b(x)\,, \quad x \in I \tag{4}$$

se nazývá **lineární diferenciální rovnice 1. řádu**. Funkce $a(x)$ se nazývá **koeficient rovnice** a funkce $b(x)$ **pravá strana rovnice** (4). Rovnice

$$y' = a(x)\,y$$

se nazývá **homogenní diferenciální rovnice**.

Řešení rovnice (4) **metodou variace konstanty**.

1. Určíme obecné řešení homogenní rovnice

$y' = a(x)\,y$	separací proměnných
$\int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx$	$A(x)$ je primitivní
$\ln\lvert y\rvert = A(x) + K$	funkce k funkci $a(x)$
$\lvert y\rvert = \mathrm{e}^{A(x)+K}$	$K \in \mathbb{R}\,,$ položíme $C = \pm\mathrm{e}^K$
$\boxed{y_h = C\,\mathrm{e}^{A(x)}}$	obecné řešení homogenní rovnice
$y = \mathrm{e}^{A(x)}$	se nazývá **fundamentální řešení**

2. Řešení nehomogenní rovnice (4) hledáme ve tvaru:

$$y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} \qquad \text{variace konstanty } C\,.$$

Základem metody variace konstanty je hledat řešení y ve tvaru součinu dvou funkcí, tedy $y = C\,y_h$. Po dosazení do (4) dostaneme $C'y_h + Cy_h' = aCy_h + b$, což platí, pokud $C\,y_h' = a\,C\,y_h$ a zároveň $C'\,y_h = b$.

Po dosazení do rovnice (4) dostaneme

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} + C(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\,a(x) = a(x)\,C(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} + b(x)\,.$$

Tedy

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = b(x) \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int \frac{b(x)}{\mathrm{e}^{A(x)}}\,dx$$

a **partikulární řešení** rovnice (4) má tvar

$$\boxed{y_p(x) = \int \frac{b(x)}{\mathrm{e}^{A(x)}}\,dx \cdot \mathrm{e}^{A(x)}\,.}$$

3. Pro obecné řešení y nehomogenní rovnice (4) platí

$$y = y_h + y_p\,, \text{ neboli } \quad y = C\,\mathrm{e}^{A(x)} + \int \frac{b(x)}{\mathrm{e}^{A(x)}}\,dx \cdot \mathrm{e}^{A(x)}\,.$$

Obecné řešení rovnice $y' = a(x)y + b(x)$ je součtem obecného řešení příslušné homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice.

<u>*Příklad 10.9*</u>: Najděte obecné řešení rovnice $y' = y + \mathrm{e}^{2x}$.

1. Homogenní rovnice $y' = y$ má obecné řešení

$$y_h(x) = C\,\mathrm{e}^x \qquad (\mathrm{e}^x \quad \text{fundamentální řešení})\,.$$

2. Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^x, \quad \text{tj.} \quad y' = C'(x)\mathrm{e}^x + C(x)\,\mathrm{e}^x\,.$$

Po dosazení do původní rovnice obdržíme

$$C(x)'\mathrm{e}^x + C(x)\,\mathrm{e}^x = C(x)\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}\,,$$

tj. $\qquad C(x)'\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \mathrm{e}^x + K\,.$

Bez újmy na obecnosti položíme $K = 0$ ($K\,\mathrm{e}^x$ je homogenní řešení) a dostaneme partikulární řešení

$$y_p(x) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}\,.$$

3. Obecné řešení nehomogenní rovnice má tedy tvar

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}\,.$$

10.4.1 Bernoulliova rovnice

Definice 10.5 : Diferenciální rovnice tvaru

$$y' + a(x)\, y = b(x)\, y^n\,,\ n \neq 0, 1\,, \quad x \in I \tag{5}$$

se nazývá **Bernoulliova rovnice**.

Bernoulliovu rovnici vydělíme y^n, dostaneme

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)\, \frac{y}{y^n} = b(x)$$

a pak pomocí substituce

$$z = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad z' = (1-n)\, y^{-n}\, y'$$

ji převedeme na tvar

$$\frac{z'}{1-n} + a(x)\, z = b(x)\,,$$

což je lineární diferenciální rovnice řešitelná metodou variace konstanty.

Příklad 10.10 : Vyřešíme rovnici $y' + x\, y = x\, y^3$.

Nyní $n{=}3$ a $z = y^{1-3} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y'$.

Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$-\frac{z'}{2} + xz = x \quad \Rightarrow \quad z' - 2xz = -2x\,.$$

Vyřešíme lineární rovnici

1. hom. rovnice	2. part. řešení
$z' - 2xz = 0$	$C'\, \mathrm{e}^{x^2} = -2x$
$z_h = C\, \mathrm{e}^{x^2}$	$C = \mathrm{e}^{-x^2}$
	$z_p = \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{e}^{x^2} = 1$
3. obecné řešení	
$z = C\, \mathrm{e}^{x^2} + 1 \ \Rightarrow$	$y^{-2} = C\, \mathrm{e}^{x^2} + 1$

10.5 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

Definice 10.6 : Nechť $a_0(x),\ a_1(x),\ \ldots,\ a_n(x),\ f(x),\ x \in I$ jsou reálné funkce, $a_n(x) \neq 0$. **Lineární diferenciální rovnici n-tého řádu** pro neznámou funkci $y = y(x)$ se nazývá rovnice

$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad x \in I\,. \tag{6}$$

Zkráceně píšeme

$$L[y] = f,$$

říkáme, že L je **lineární diferenciální operátor n-tého řádu**. Je-li $f(x) = 0$, pak se rovnice (6) nazývá **homogenní**, jinak **nehomogenní**.
Funkce $y = y(x)$, která splňuje rovnici (6) pro každé $x \in I$ a pro $x_0 \in I$ splňuje počáteční podmínky

$$y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y_1\,,\ \cdots\,,\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1} \tag{7}$$

se nazývá **řešení počáteční úlohy** (6), (7).

Analogii k Peano-Picardově větě zaručující existenci a jednoznačnost řešení pro diferenciální rovnice 1.řádu je následující věta.

Věta 10.3 : (**o existenci a jednoznačnosti**)
Nechť funkce $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ f$ jsou spojité na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Pak počáteční úloha (6), (7) má právě jedno řešení definované na celém intervalu I.

Příklad 10.11 : Rovnice

$$y'' + 4y = 0$$

je diferenciální rovnice 2. řádu. Tato rovnice má nekonečně mnoho řešení. Jsou to například funkce

$$y_1(x) = \sin 2x\,, \quad y_2(x) = \cos 2x$$

a jejich libovolná lineární kombinace

$$y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 \qquad \text{obecné řešení}\,.$$

Počáteční podmínky $y(0) = 1,\, y'(0) = 0$ splňuje funkce $y = \cos 2x$. Podle předchozí věty (10.3) je tato funkce určena jednoznačně ($a_2 = 1, a_1 = 0, a_0 = 4, f = 0$ jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$).

Dále budeme předpokládat, že $a_0, \ a_1, \ \dots, \ a_n, \ f$ jsou spojité funkce na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a $a_n(x) \neq 0$ na I.

Definice 10.7 : Funkce $y_1(x)\,,\, y_2(x)\,,\, \dots\,,\, y_n(x)\,,\ \ x \in I$ se nazývají **lineárně závislé**, jestliže existují konstanty $c_1, \ c_2, \ \dots, c_n$ takové, že alespoň jedna je nenulová a platí

$$\forall\, x \in I : \quad c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \ldots + c_n\, y_n(x) = 0\,.$$

V opačném případě říkáme, že funkce $y_1(x), \ y_2(x), \ \dots, \ y_n(x)$ jsou **lineárně nezávislé**.

Věta 10.4 : Funkce $y_1(x), \ \dots, \ y_n(x)$, které řeší rovnici $L[y] = 0$ na I, jsou lineárně závislé právě tehdy, když determinant

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = 0\,.$$

Determinant $W(x)$ se nazývá Wronskián.

<u>Důkaz</u> :

a) " $\Rightarrow$ " Podle předpokladu máme lineárně závislé funkce $y_1(x), \ \dots, \ y_n(x)$. Potom existují konstanty $c_1, \ c_2, \ \dots, c_n$ takové, že alespoň jedna je nenulová a platí

$$\forall\, x \in I : \quad c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \ldots + c_n\, y_n(x) = 0\,.$$

Také říkáme, že existuje netriviální lineární kombinace taková, že $c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n = 0$

Postupným derivováním dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \ldots + c_n\, y_n(x) \quad &= 0\,, \\ c_1\, y_1'(x) + c_2\, y_2'(x) + \ldots + c_n\, y_n'(x) \quad &= 0\,, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad &\ \ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x) \quad &= 0\,. \end{aligned}$$

Tato soustava s nulovou pravou stranou má netriviální řešení $(c_1, c_2, \dots, c_n)$. Proto determinant soustavy $W(x)$ musí být roven nule.

b) " $\Leftarrow$ " Důkaz povedeme přímo. Předpokládáme, že existuje $x_0 \in I$ takové, že $W(x_0) = 0$. Potom soustava

$$\begin{array}{ll} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) & = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = 0 \end{array}$$

Operátor L splňuje $L[c_1^* y_1 + \ldots + c_n^* y_n] = c_1^* L[y_1] + \ldots + c_n^* L[y_n]$, říkáme, že je lineární. Zároveň $L[y_i] = 0,\ i = 1, \ldots, n$, tedy $L[y] = 0$.

má nenulové řešení $(c_1^*, \ldots, c_n^*)$. Funkce

$$y(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x) + \ldots + c_n^* y_n(x)$$

splňuje rovnici $L[y] = 0$ a počáteční podmínky

$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = 0\,.$$

V důkazu věty jsme dokázali: $W(x_0) = 0 \Rightarrow y_1, y_2, \ldots, y_n$ jsou lineárně závislé $\Rightarrow W(x) = 0,\ \forall x \in I$.

Tyto podmínky však splňuje i nulová funkce, tedy podle věty o jednoznačnosti (10.3) je $y(x) \equiv 0$ na I a funkce $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jsou lineárně závislé, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 10.12: Funkce $y_1 = \mathrm{e}^{-x},\ y_2 = \mathrm{e}^{x}$ řeší rovnici

$$y''(x) - y(x) = 0 \qquad \text{na} \quad \mathbb{R}$$

a platí

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{x} \\ -\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{x} \end{pmatrix} = 2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Funkce e^{-x}, e^{x} jsou lineárně nezávislé.

Množina K se nazývá jádro operátoru L.

Věta 10.5: Označme $K = \{y(x) : L[y] = 0\}$ množinu všech řešení homogenní rovnice. Množina K je lineární prostor dimenze n.

Důkaz: Nechť funkce $y_1, y_2 \in K$, pak zřejmě také jejich libovolná lineární kombinace $c_1 y_1 + c_2 y_2 \in K$, tedy K je lineární prostor. Ukážeme, že dimenze tohoto prostoru je n.

Označme $y_i \in K,\ i = 0, 1, \ldots, n-1$ takové funkce, které vyhovují počátečním podmínkám

$$y_i^{(j)}(x_0) = \delta_i^j = \begin{cases} 1\,, & j = i \\ 0\,, & j \neq i \end{cases} \tag{8}$$

(δ_i^j - se nazývá Kroneckerovo delta).

Nechť y je řešení rovnice $L[y] = 0$ splňující počáteční podmínky $y(x_0)=c_0,\ y'(x_0)=c_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=c_{n-1}$, pak lze vyjádřit ve tvaru

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\, y_i(x)\,.$$

Přitom funkce $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ jsou podle věty (10.3) lineárně nezávislé, neboť Wronskián

$$\det \begin{pmatrix} y_0(x_0) & y_1(x_0) & \dots & y_{n-1}(x_0) \\ y_0'(x_0) & y_1'(x_0) & \dots & y_{n-1}'(x_0) \\ \dots & & & \\ y_0^{(n-1)}(x_0) & y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = 1$$

vzhledem k počátečním podmínkám (8), tedy tvoří bázi prostoru K.

Definice 10.8 : Báze prostoru K se nazývá **fundamentální systém** homogenní diferenciální rovnice $L[u]=0$. Fundamentální systém je tvořen n lineárně nezávislými funkcemi

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,\ y_n(x), \quad x \in I\,.$$

Funkce

$$y(x)=c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x), \quad \text{kde} \quad c_1, c_2, \dots, c_n$$

jsou libovolné konstanty, se nazývá **obecné řešení homogenní rovnice**.
Volbou konstant $c_1, c_2, \dots, c_n$ nebo počátečních podmínek $y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y_1\,,\ \cdots\,,\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$ získáme řešení (počáteční) úlohy.

Příklad 10.13 : Fundamentální systém rovnice $y'' + y = 0$ je tvořen funkcemi

$$y_1(x) = \cos x\,,\quad y_2(x) = \sin x$$

a funkce

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

je obecným řešením dané rovnice.

10.6 Metody řešení rovnic n-tého řádu

10.6.1 Homogenní rovnice

Eulerova rovnice

Rovnice

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x\, y' + a_0 y = 0\,,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálné konstanty, se nazývá **Eulerova rovnice**. Je to lineární rovnice se speciálními proměnnými koeficienty a její fundamentální systém tvoří funkce ve tvaru

$$y(x) = x^\lambda, \quad (\text{popř. } x^\lambda \ln x, \ldots, x^\lambda \ln^{k-1} x) \quad \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Výklad provedeme na příkladech.

A) (jednoduché kořeny) Pro rovnici

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

chceme stanovit takové hodnoty parametru λ, aby funkce $y(x) = x^\lambda$ byla řešením této rovnice. Protože $y' = \lambda x^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$, $y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}$, pak po dosazení do diferenciální rovnice obdržíme

$$x^3\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3} - 3x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + 6x\lambda x^{\lambda-1} - 6x^\lambda = 0\,,$$

tudíž

$$(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6)\, x^\lambda = 0\,.$$

Tato rovnost je splněna (při $x \neq 0$) pouze pro kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ uvedeného polynomu. Trojice funkcí

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2, \quad y_3(x) = x^3$$

je lineárně nezávislá, neboť příslušný Wronskián je nenulový ($W(x) = 2x^3$, $x \neq 0$), a tvoří tedy fundamentální systém Eulerovy rovnice. Obecné řešení rovnice má tvar

$$y = C_1\, x + C_2\, x^2 + C_3\, x^3\,.$$

B) (vícenásobné kořeny) V případě, že λ je k-násobným kořenem polynomu příslušného Eulerově rovnici, potom k tomuto kořenu máme k lineárně nezávislých řešení tvaru

$$y_1(x) = x^\lambda, \quad y_2(x) = x^\lambda \ln x\,, \quad \ldots \quad y_k(x) = x^\lambda \ln^{k-1} x\,,$$

patřících do fundamentálního systému.

Při řešení rovnice

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

dostaneme:

$y(x) = x^\lambda, y' = \lambda x^{\lambda-1}, y''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$ a po dosazení

$$\begin{aligned} x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + 3x\,\lambda\,x^{\lambda-1} + x^\lambda &= 0\,, \\ \lambda^2 - \lambda + 3\lambda + 1 &= 0\,, \\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 &= 0\,, \\ \lambda_{1,2} &= -1\,. \end{aligned}$$

Do fundamentálního systému rovnice tedy patří funkce $y_1(x) = \frac{1}{x}$, $y_2(x) = \frac{1}{x}\ln x$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = C_1\,\frac{1}{x} + C_2\,\frac{1}{x}\ln x\,.$$

C) (komplexní kořeny)

Jsou-li kořeny polynomu Eulerovy rovnice komplexní, mohou být funkce fundamentálního systému (tj. komplexní funkce reálné proměnné)

$$x^{a+ib}, \quad x^{a-ib}, \qquad \text{resp.} \quad x^{a+ib}\ln^k x, \quad x^{a-ib}\ln^k x\,,$$

nahrazeny reálnými funkcemi

$$\begin{array}{lcl} x^a\cos(b\ln x)\,, & \text{resp.} & x^a\cos(b\ln x)\ln^k x\,, \\ x^a\,\sin(b\ln x)\,, & & x^a\,\sin(b\ln x)\ln^k x\,. \end{array}$$

Využijeme-li vztahu $a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}$ $(a > 0)$ a Eulerovy identity $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i\sin x$, pak pro $x > 0$ dostaneme $x^{ib} = \cos(b\ln x) + i\,\sin(b\ln x)$. (Pro $x < 0$ volíme $\ln(-x)$ místo $\ln x$.)

Poznamenejme, že $L[y_1 + iy_2] = 0 \Leftrightarrow L[y_1] + iL[y_2] = 0 \Leftrightarrow L[y_1]=0 \wedge L[y_2]=0$.

Při řešení rovnice

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

dostaneme:

$$\begin{aligned} x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + x\,\lambda\,x^{\lambda-1} + x^\lambda &= 0\,, \\ \lambda^2 + 1 &= 0\,, \\ \lambda_1 = i \quad \lambda_2 &= -i\,. \end{aligned}$$

Do fundamentálního systému tedy patří funkce $y_1(x) = x^i$, $y_2(x) = x^{-i}$ nebo $y_1(x) = \cos(\ln x)$, $y_2(x) = \sin(\ln x)$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = C_1\,\cos(\ln x) + C_2\,\sin(\ln x)\,.$$

Metoda charakteristické rovnice

Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s **konstantními koeficienty**

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

hledáme ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, (popř. $x\mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$) kde číselný parametr λ je kořenem **charakteristické rovnice (charakteristického polynomu)**

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

A) (jednoduché kořeny) Řešení rovnice

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

hledáme ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$.

Potom $y'(x) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$ a po dosazení do rovnice máme $\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x} - 4\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + 3\mathrm{e}^{\lambda x} = 0$. Hledáme tedy kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0\,,$$

které jsou $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1$. Fundamentální systém rovnice je tedy tvořen funkcemi e^{3x}, e^{x} a obecné řešení rovnice má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{x}\,.$$

B) (vícenásobný kořen) Chceme vyřešit rovnici

$$y''' - 3y'' + 3y' + y = 0\,.$$

Její charakteristická rovnice

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

má trojnásobný $(k=3)$ kořen $\lambda = 1$. V tomto případě je fundamentální systém rovnice tvořen funkcemi

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{x}\,, \quad y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{x}\,, \quad y_3(x) = x^2\mathrm{e}^{x}$$

a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{x} + C_3\,x^2\mathrm{e}^{x}\,.$$

C) (komplexní kořeny) Hledáme obecné řešení rovnice

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Kořeny charakteristického polynomu $\lambda^2+4\lambda+13$ jsou komplexní čísla $\lambda_1 = -2 + 3i, \lambda_2 = -2 - 3i$. Fundamentální systém je tvořen funkcemi

Z lineární algebry víme, že jestliže komplexní číslo $z=a+ib$ je kořenem polynomu, potom také komplexně sdružené číslo $z=a-ib$ je kořenem daného polynomu.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{(-2+3i)x} = e^{-2x}(\cos 3x + i \sin 3x), \\ y_2(x) &= e^{(-2-3i)x} = e^{-2x}(\cos 3x - i \sin 3x), \end{aligned}$$

které lze zapsat jako lineární kombinace funkcí

$$\begin{aligned} \hat{y}_1(x) &= e^{-2x} \cos 3x, \\ \hat{y}_2(x) &= e^{-2x} \sin 3x\,. \end{aligned}$$

Máme tedy jinou bázi lineárního prostoru $K=\{y : L[y]=0\}$ a obecné řešení tak můžeme psát ve tvaru

$$y(x) = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)\,.$$

Cvičení 10.2 : Stanovte obecné řešení systém rovnice

$$y'' - 2y' - 3y = 0\,.$$

[$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.]

Cvičení 10.3 : Vyřešte rovnici

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0\,.$$

[$\lambda_{1,2} = 0$ dvojnásobný kořen a $\lambda_{3,4,5} = 1$ trojnásobný kořen, obecné řešení $y(x) = C_1\, 1 + C_2\, x + C_3\, e^x + C_4\, x\, e^x + C_5\, x^2 e^x$.]

Cvičení 10.4 : Vyřešte rovnici

$$y^{(4)} - +8y'' + 16y = 0\,.$$

[$\lambda_{1,2} = 2i$ dvojnásobný kořen a $\lambda_{3,4} = -2i$ dvojnásobný kořen, obecné řešení $y(x) = C_1\, \cos 2x + C_2\, x\, \cos 2x + C_3\, \sin 2x + C_4\, x\, \sin 2x$.]

Metoda snižování řádu

je speciální metoda používaná v případě, že jedno řešení $y_1(x)$ homogenní rovnice již známe. Potom další partikulární řešení hledáme ve tvaru $y(x) = y_1(x) \cdot z(x)$. Ukážeme si to na příkladu.

<u>*Příklad 10.14*</u> : Chceme stanovit fundamentální systém a obecné řešení diferenciální rovnice

$$(1+x^2)\,y'' - 2xy' + 2y = 0\,.$$

1. Jedno partikulární řešení je $y_1(x) = x$.
2. Druhé řešení hledáme ve tvaru $y(x) = x\,z(x)$, pak

   $$y' = z + x\,z', \quad y'' = 2z' + x\,z''$$

   a dosadíme do původní rovnice, tj.

   $$\begin{aligned} (1+x^2)(2z'+xz'') - 2xz - 2x^2z' + 2xz &= 0 \\ 2z' + 2x^2z' + x^3z'' - 2x^2z' + xz'' + 2xz - 2xz &= 0 \\ 2z' + (x+x^3)z'' &= 0\,. \end{aligned}$$

   Označíme $v = z'$ a dostaneme rovnici 1. řádu (snížení řádu) pro funkci v

   $$2v + (x+x^3)v' = 0\,.$$

   Separací proměnných vypočteme

   $$v(x) = \frac{1+x^2}{x^2}\,, \quad \text{tj.} \quad z(x) = x - \frac{1}{x}\,.$$

3. Druhé partikulární řešení je tedy tvaru

   $$y_2(x) = y_1(x)\cdot z(x) = x\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1\,.$$

4. Fundamentální systém je $y_1(x) = x,\ y_2(x) = x^2 - 1$.
5. Obecné řešení má tvar

   $$y(x) = C_1x + C_2(x^2-1)\,.$$

<u>*Cvičení 10.5*</u> : Vyřešte metodou snižování řádu rovnici

$$y'' - \frac{x}{x-1}\,y' + \frac{1}{x-1}\,y = 0\,,$$

jestliže jedno partikulární řešení je $y_1 = x$.

[Obecné řešení je $y(x) = C_1\,x + C_2\,\mathrm{e}^x$.]

10.6.2 Nehomogenní rovnice

Metoda variace konstant

pro řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic $n-$tého řádu

$$L[y] = a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y = f(x)\,.$$

1. Určíme fundamentální systém $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ a obecné řešení

$$y_h(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \cdots + C_n\, y_n(x)$$

homogenní rovnice $L[y] = 0$.

2. Partikulární řešení nehomogenní rovnice $L[y] = f$ hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + \cdots + C_n(x)\, y_n(x)\,,$$

kde funkce $C_1(x)\,,\ C_2(x)\,,\ \cdots\,,\ C_n(x)$ získáme jako řešení soustavy

$$\begin{array}{ccccccc}
C_1'y_1 & + & C_2'y_2 & + \cdots + & C_n'y_n & = & 0\,,\\
C_1'y_1' & + & C_2'y_2' & + \cdots + & C_n'y_n' & = & 0\,,\\
\vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots\\
C_1'y_1^{(n-2)} & + & C_2'y_2^{(n-2)} & + \cdots + & C_n'y_n^{(n-2)} & = & 0\,,\\
C_1'y_1^{(n-1)} & + & C_2'y_2^{(n-1)} & + \cdots + & C_n'y_n^{(n-1)} & = & \frac{f(x)}{a_n(x)}\,.
\end{array}$$

Po dosazení obecného tvaru partikulárního řešení $y_p(x)$ do původní rovnice, dostaneme jednu rovnici s n neznámými funkcemi $C_1(x)\,,\ \cdots\,,\ C_n(x)\,.$ Prvních $n-1$ rovnic v dané soustavě si tedy můžeme volit.

3. Obecné řešení původní nehomogenní diferenciální rovnice je součtem homogenního a partikulárního řešení

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,.$$

Příklad 10.15 : Stanovme obecné řešení rovnice

$$(1 + x^2)\, y'' - 2x\, y' + 2y = 2\,.$$

1. Určíme obecné řešení homogenní rovnice (viz metoda snižování řádu příklad (10.14))

$$y_h(x) = C_1\, x + C_2\, (x^2 - 1)\,.$$

2. Partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru
$$y_p(x) = C_1(x)\,x + C_2(x)(x^2-1)\,.$$
Po zderivování: $y_p' = C_1'\,x + C_2'\,(x^2-1) + C_1 + 2x\,C_2\,.$ Položíme $C_1'\,x + C_2'(x^2-1) = 0$ a znovu derivujeme $y_p'' = C_1' + 2\,C_2' + 2x\,C_2\,.$ Po dosazení do dané rovnice obdržíme $(1+x^2)(C_1'+2\,C_2'+2x\,C_2) - 2x\,(C_1+2x\,C_2) + 2(C_1\,x + C_2(x^2-1)) = 2\,,$ odtud po úpravě dostaneme $(1+x^2)(C_1' + 2x\,C_2') = 2\,.$

Jestliže y_h je řešením homogenní rovnice $L[y_h] = 0$, pak také $L[C\,y_h] = 0\,, \forall C \in \mathbb{R}$. Jestliže tedy máme správně řešení homogenní rovnice, potom v metodě variace konstant musí vypadnout členy z nederivovanými funkcemi $C_1, C_2\,.$

Dostáváme soustavu algebraických rovnic pro neznámé funkce C_1', C_2':
$$\begin{aligned} C_1'x + C_2'(x^2-1) &= 0\,,\\ C_1' \quad + 2x\,C_2' &= \tfrac{2}{x^2+1}\,. \end{aligned}$$
Odtud
$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 \\ \frac{2}{x^2+1} & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \tfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow C_1(x) = \tfrac{-2x}{1+x^2} + K_1\,,$$
(bez újmy na obecnosti pokládáme : $K_1 = 0$) .

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{2}{x^2+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \tfrac{2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow C_2(x) = \tfrac{-1}{1+x^2} + (K_2 = 0)\,.$$
Partikulární řešení dostáváme ve tvaru
$$y_p(x) = \frac{-2x}{1+x^2}\,x + \frac{-1}{1+x^2}\,(x^2-1) = \frac{-3x^2+1}{1+x^2}\,.$$

3. Obecné řešení úlohy je tedy funkce
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\,x + C_2\,(x^2-1) + \frac{-3x^2+1}{1+x^2}\,.$$

<u>*Cvičení 10.6*</u> : Metodou variace konstant vyřešte počáteční úlohu $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x\,, \quad y(0) = 1\,, y'(0) = 1\,.$

[Obecné řešení $y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\,x\mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$, řešení poč. úlohy $y(x) = \mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$.]

Metoda odhadu

na rozdíl od metody variace konstant je tato metoda použitelná pouze pro rovnice s konstantními koeficienty a se speciální pravou stranou tvaru

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=\mathrm{e}^{ax}(P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx),$$

kde $P_n(x), Q_m(x)$ jsou polynomy stupně n, resp. m; číslo $a+ib$ je tzv. **kritické číslo** pravé strany.

1. Metodou charakteristické rovnice najdeme obecné řešení $y_h(x)$ homogenní rovnice.

2. Partikulární řešení $y_p(x)$ nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

   $$y_p(x) = x^r\mathrm{e}^{ax}(R_k(x)\cos bx + S_k(x)\sin bx)\,.$$

   kde r je násobnost kritického čísla $a + ib$ jako kořene charakteristické rovnice (pokud $a + ib$ není kořenem charakteristické rovnice, pak $r = 0$) a polynomy $R_k(x)$, $S_k(x)$ jsou stupně $k = \max\{n, m\}$.

3. Obecné řešení rovnice má tvar

   $$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,.$$

<u>*Příklad 10.16*</u> : Metodou odhadu stanovíme obecné řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x\,.$$

1. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, má dvojnásobný kořen $\lambda = 1$ a homogenní řešení má tvar

   $$y_h = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,x\mathrm{e}^x\,.$$

2. Z rovnosti

   $$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$$

   vyplývá $a = 1$, $b = 0$, $n = 0$, $m = 0$ $\Rightarrow$ $k = 0$, $R_0(x) = R$, $S_0(x) = S$, kde R, S jsou konstanty. Kritické číslo $a + i\,b = 1$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice, tedy $r = 2$.

Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x^2 \mathrm{e}^x \, R\,,$$

potom $y_p'(x) = R\,[2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x]$, $y_p''(x) = R\,[2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x]$. Po dosazení y_p, y_p', y_p'' do dané rovnice můžeme vypočítat neznámou konstantu R:

$$R\,(2\mathrm{e}^x + 4x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x - 4x\mathrm{e}^x - 2x^2\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x\,,$$

$$\Rightarrow \quad 2\,R = 1, \quad \text{tj.} \quad R = \tfrac{1}{2}\,,$$

a partikulárním řešením je funkce $\quad y_p(x) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x\,.$

3. Obecné řešení má tvar $\;y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\,x\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\,x^2\mathrm{e}^x\,.$

Princip superpozice

Úlohu $L[y] = f_1 + f_2$ rozdělíme na dvě $L[y] = f_1\,,\ L[y] = f_2\,.$ Jestliže funkce y_1 řeší $L[y_1] = f_1$ a funkce y_2 řeší $L[y_2] = f_2\,,$ pak funkce $y = y_1 + y_2$ je řešením původní úlohy $L[y] = f_1 + f_2$.

Příklad 10.17: Rovnici $y'' + 4y = 2\sin x + \cos 3x$ rozdělíme na dvě úlohy

$$y'' + 4y = 2\sin x \qquad \text{a} \qquad y'' + 4y = \cos 3x\,,$$

pak jednotlivá partikulární řešení jsou

$$y_{p_1} = \tfrac{2}{3}\sin x \qquad\qquad y_{p_2} = -\tfrac{1}{5}\cos 3x$$

a partikulární řešení původní rovnice má tvar

$$y_p = \tfrac{2}{3}\sin x - \tfrac{1}{5}\cos 3x\,.$$

10.6.3 Fyzikální aplikace

Kirchhoffův zákon v tzv. RLC obvodu

Nechť $i(t)$ je proud v elektrickém obvodu v závislosti na čase t,
u_R je napětí na odporu $R > 0$,
u_L je napětí na cívce s indukcí $L > 0\,,$
u_C je napětí na kondenzátoru s kapacitou $C > 0\,,$
$u(t) = U_0 \sin \omega t$ je napětí na svorkách zdroje ,

potom platí $u_R + u_L + u_C = u(t)$, nebo-li

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\, d\tau = u(t)\,, \quad t \geq t_0\,.$$

Hledáme-li funkci $i = i(t)$ splňující tento zákon, pak derivováním obdržíme diferenciální rovnici 2. řádu pro neznámou funkci i:

$$L\,\frac{d^2 i}{dt^2} + R\,\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \omega U_0 \cos \omega t\,.$$

Rovnice mechanického systému

Uvažujeme jednoduchý mechanický systém pohybující se po nerovném povrchu. Vertikální pohyb se řídí Newtonovým pohybovým zákonem

$$my''(t) = -ky(t) - \gamma y'(t) + F(t)\,,$$

kde $y = y(t)$ je časově závislá výchylka tělesa od klidové polohy,
$m > 0$ je hmotnost systému,
$k > 0$ je tuhost pružiny,
$\gamma \geq 0$ je koeficient tlumení.

Vnější síla F může mít tvar

1. $F(t) = -[k\varphi(t) + \gamma\dot{\varphi}(t)]$ (buzení vlivem nerovností terénu),
2. $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$ (periodické vnější buzení).

Rovnice elektrického obvodu a jednoduchého mechanického systému se z matematického pohledu neliší, a proto hovoříme o **rovnici kmitů** (elektrických, mechanických). Pravá strana $F_0 \cos \omega_0 t$ představuje tzv. **vnější buzení**, přičemž F_0 je amplituda a ω_0 frekvence vnějšího periodického buzení. K jednoznačnému určení těchto funkcí musíme navíc znát počáteční hodnoty $y(t_0), y'(t_0)$, resp. $i(t_0)$, $\frac{di(t_0)}{dt}$.

Řešení příslušné počáteční úlohy se nazývá **odezva systému** na počáteční stav a na vnější buzení.

10.7 Okrajové úlohy pro rovnice 2. řádu

Okrajovou úlohou nazveme lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)\,, \tag{9}$$

kde $a_2(x) \neq 0\,, a_1(x)\,, a_0(x)\,, f(x)$ jsou funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \alpha_1\, y(a) + \beta_1\, y'(a) &= \gamma_1 \qquad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{R}\,, \\ \alpha_2\, y(b) + \beta_2\, y'(b) &= \gamma_2 \qquad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Podle tvaru okrajových podmínek také dělíme okrajové úlohy na následující typy.

Dirichletova okrajová úloha

Při této úloze hledáme funkci $y = y(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ tak, aby platilo

$$\begin{aligned} &a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \qquad x \in (a, b)\,, \\ &y(a) = \gamma_1,\; y(b) = \gamma_2\,. \end{aligned}$$

kde γ_1, γ_2 jsou daná reálná čísla.

Neumannova okrajová úloha

Nyní hledáme funkci $y = y(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ tak, aby platilo

$$\begin{aligned} &a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \qquad x \in (a, b)\,, \\ &y'(a) = \gamma_1,\; y'(b) = \gamma_2\,. \end{aligned}$$

Příklad 10.18 :

a) Dirichletova úloha

$$\begin{aligned} &y'' + y = 0\,, \qquad x \in (0, \pi)\,, \\ &y(0) = 0\,,\;\; y(\pi) = 0\,. \end{aligned}$$

Obecným řešením úlohy je $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ a z okrajových podmínek dostaneme

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\,, \\ 0 &= C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi\,, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &C_1 = 0\,, \\ &C_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Řešením okrajové úlohy je funkce $y(x) = C_2 \sin x$.

b) Neumannova úloha

$$\begin{aligned} &y'' + y = 0\,, \qquad x \in (0,b)\,,\\ &y'(0) = \gamma_1\,,\ \ y'(h) = \gamma_2\,, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= C_1\cos x + C_2\sin x,\\ y'(x) &= -C_1\sin x + C_2\cos x, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \gamma_1 &= -C_1\sin 0 + C_2\cos 0,\\ \gamma_2 &= -C_1\sin b + C_2\cos b, \end{aligned}$$

$$C_2 = \gamma_1,\ \ \gamma_2 - \gamma_1\cos b = -C_1\sin b\,.$$

Protože $\gamma_1,\ \gamma_2,\ b$ jsou daná čísla, mohou nastat následující situace

1. $\sin b \neq 0$, potom $C_1 = \frac{\gamma_1\cos b - \gamma_2}{\sin b}$ a úloha má tedy jediné řešení
$$y(x) = \frac{\gamma_1\cos b - \gamma_2}{\sin b}\cos x + \gamma_1\sin x.$$
2. $\sin b = 0,\ \gamma_2 - \gamma_1\cos b = 0$, potom má úloha nekonečně mnoho řešení tvaru
$$y(x) = C_1\cos x + \gamma_1\sin x,$$
kde C_1 je libovolné reálné číslo.
3. $\sin b = 0,\ \gamma_2 - \gamma_1\cos b \neq 0$, pak neexistuje řešení dané úlohy. Například
$$y'' + y = 0,\ y'(0) = 1,\ y'(\pi) = 2$$
nemá žádné řešení. Zde $b = \pi,\ \gamma_1 = 1\,,\ \gamma_2 = 2\,.$

Vidíme, že otázky řešitelnosti okrajových úloh jsou mnohem komplikovanější ve srovnání s počátečními úlohami, kde stačila spojitost koeficientů k jednoznačnosti řešení.

Okrajová úloha s parametrem

neboli **Sturmova-Liouvilleova úloha** je speciálním případem okrajové úlohy (9). Nyní hledáme parametr λ a nenulovou funkci $y(x) \neq 0,\ x \in \langle a, b\rangle$, tak, aby platilo

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \lambda y \qquad x \in (a,b)$$

s homogenními okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \alpha_1\, y(a) + \beta_1\, y'(a) &= 0\,,\\ \alpha_2\, y(b) + \beta_2\, y'(b) &= 0\,. \end{aligned}$$

Obecně pro operátorovou rovnici $L[y] = \lambda y$ hledáme vlastní číslo a vlastní funkci, které splňují danou rovnici.

Ta hodnota parametru λ, pro kterou existuje nenulové řešení $y(x)$ této úlohy, se nazývá **vlastní číslo úlohy** a funkce $y(x)$ se nazývá **vlastní funkce úlohy** odpovídající vlastnímu číslu λ.

Příklad 10.19 : Určíme vlastní čísla a vlastní funkce okrajové úlohy

$$-y'' = \lambda y\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y(\pi) = 0\,.$$

Pro $\lambda < 0$ a pro $\lambda = 0$ vyplývá z tvaru obecného řešení, že úloha má pouze nulové řešení (prověřte!).
Pro $\lambda > 0$ má obecné řešení tvar

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Z okrajových podmínek dostáváme soustavu rovnic pro neznámé konstanty $C_1,\ C_2$

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0, \\ 0 &= C_1 \cos\sqrt{\lambda}\pi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi. \end{aligned}$$

Odtud

$$C_1 = 0, \quad C_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0.$$

Aby mohlo být $C_2 \neq 0$ (zajímá nás nenulové řešení!), musí nastat rovnost

$$\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0,\ \text{tj.}\ \sqrt{\lambda}\pi = k\pi,$$

kde $k = 1, 2, 3, \ldots$.
Pro hodnoty $\lambda = \lambda_k = k^2 : (1, 4, 9, 16, \ldots)$ má okrajová úloha nenulové řešení

$$y_k(x) = C_2 \sin kx.$$

Dostáváme tak **posloupnost vlastních čísel**

$$\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$$

a **posloupnost jim odpovídajících vlastních funkcí** je

$$\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots\}.$$

10.8 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

Motivace: Systém lovec-kořist

Nechť funkce y_1 popisuje počet lovců (např. lišek) a funkce y_2 počet kořisti (např. zajíců). Velice zjednodušeně si můžeme představit, že rychlost přibývání lovců (tj. y_1') je přímo úměrná počtu kořisti, neboli $y_1' = k_1\, y_2\,,\ k_1 \in \mathbb{R}$. Zároveň rychlost úbytku kořisti (tj. $-y_2'$) přímo závisí na počtu lovců, tedy $-y_2' = k_2\, y_1\,,\ k_2 \in \mathbb{R}$. Dostáváme tak soustavu dvou diferenciálních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} y_1' &= k_1\, y_2\,, \\ -y_2' &= k_2\, y_1\,. \end{aligned}$$

Obecnou **soustavu lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu** píšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x), \end{aligned}$$

kde $a_{ij}(x),\ b_i(x),\ i,j = 1,\ldots,n$ jsou funkce definované na nějakém intervalu I. Jestliže označíme

$$\mathbb{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x), & a_{12}(x), & \ldots, & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x), & a_{22}(x), & \ldots, & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x), & a_{n2}(x), & \ldots, & a_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \vec{b}(x) &= (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))^T, \\ \vec{y}(x) &= (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))^T, \end{aligned}$$

můžeme soustavu psát v **maticovém tvaru**

$$\vec{y}\,' = \mathbb{A}(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x).$$

Podobně jako v definici (10.6) formulujeme **počáteční úlohu**.

$$\vec{y}\,'(x) = \mathbb{A}(x)\,\vec{y}(x) + \vec{b}(x)\,, \tag{11}$$

$$\vec{y}(x_0) = \vec{x}_0\,, \qquad x_0 \in I,\ \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n \tag{12}$$

Vektorová funkce $\vec{y} = \vec{y}(x)$ splňující rovnici (11) a počáteční podmínky (12) se nazývá **řešení počáteční úlohy**.

Matice $\mathbb{A}(x)$ se nazývá **matice soustavy**, vektor $\vec{b}(x)$ se nazývá **vektor pravých stran**. Je-li $\vec{b}(x) = \vec{0}$, potom se soustava (11) nazývá **homogenní**.

Vektorovou funkci $\vec{y} = \vec{y}(x)$ řešící počáteční úlohu můžeme geometricky interpretovat jako parametrické rovnice křivky, fyzikálně pak jako polohový vektor pohybujícího se bodu ve fázovém prostoru. Hovoříme o **fázové křivce** nebo **trajektorii soustavy**.

Poznámka 10.3: Každá soustava n diferenciálních rovnic 1.řádu $\vec{y}\,' = \mathbb{A}\vec{y} + \vec{b}(x)$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} \end{pmatrix}, \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}, \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Na soustavy diferenciálních rovnic používáme stejné metody jako pro rovnici jedinou. Použití těchto metod je však složitější, zvláště když matice $\mathbb{A}$ nemá speciální tvar (diagonální, trojúhelníkový, Jordanův).

je ekvivalentní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu

$$y_1^{(n)} + p_{(n-1)} y_1^{(n-1)} + \dots + p_1 y_1' + p_0 y_1 = f(x)\,.$$

Připomeňme, že všechna řešení homogenní rovnice $L[y] = 0$ lze zapsat ve tvaru $y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$, kde funkce $y_1, y_2, \cdots, y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice (viz definice (10.8) a věta (10.5)). Podobně lze ukázat, že všechna řešení homogenní soustavy $\vec{y}\,' = \mathbb{A}(x)\vec{y}$ se dají vyjádřit jako lineární kombinace jednoho (zvoleného) fundamentálního systému.

10.9 Metody řešení soustavy diferenciálních rovnic

Metoda převodu na jednu rovnici n-tého řádu (eliminační metoda)

Převodem na rovnici 2. řádu najdeme řešení homogenní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 2y_2\,, \\ y_2' &= y_1 + y_2\,. \end{aligned}$$

Obecně soustavu $\vec{y}\,'(x) = \mathbb{A}(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$ převádíme na jednu rovnici n-tého řádu derivováním, např. první rovnice, a postupnou eliminací ostatních neznámých funkcí.

Z 2. rovnice vyjádříme $y_1 = y_2' - y_2$, zderivujeme $y_1' = y_2'' - y_2'$ a obě rovnice dosadíme do 1. rovnice. Dostaneme

$$y_2'' - y_2' = 4(y_2' - y_2) - 2y_2 \Rightarrow y_2'' - 5y_2' + 6y_2 = 0\,.$$

Obecné řešení této rovnice má tvar $y_2(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$, potom $y_1(x) = (C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x})' - (C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}) = 2C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$. Obecným vektorem řešení soustavy je vektorová funkce

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} 2C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} \\ C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} \end{pmatrix} = C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}}_{\vec{y}_1} + C_2 \underbrace{\begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}}_{\vec{y}_2}\,.$$

Říkáme, že vektorové funkce $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}$ tvoří **fundamentální systém** soustavy a matice $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}$ se nazývá **fundamentální matice** soustavy.
Označíme-li vektor konstant $\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, pak řešení soustavy můžeme psát ve tvaru $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \mathbb{Y} \cdot \vec{C}$.

Všimněme si, že čísla $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ jsou vlastní čísla matice soustavy $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a vektory $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jsou jim odpovídající vlastní čísla. Obecné řešení soustavy tedy můžeme psát ve tvaru $\vec{y}(x) = C_1\vec{h}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\vec{h}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$. Tento poznatek zobecníme v následujícím paragrafu.

Metoda fundamentálního systému a fundamentální matice

Nyní máme homogenní soustavu n diferenciálních rovnic s **konstantními** koeficienty

$$\vec{y}\,' = \mathbb{A}\vec{y}\,, \quad x \in I\,. \tag{13}$$

Řešení soustavy (13) hledáme ve tvaru $\vec{y} = \vec{h}\mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $\vec{h}$ je konstantní vektor. Po dosazení do (13) dostaneme $\lambda\vec{h}\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathbb{A}\vec{h}\mathrm{e}^{\lambda x}$, nebo-li

$$(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \vec{0}\,, \qquad \text{kde } \mathbb{I} \text{ je jednotková matice.}$$

Tudíž λ je vlastní číslo matice $\mathbb{A}$ a $\vec{h}$ je odpovídající vlastní vektor. Různá násobnost vlastního čísla vede k následujícím možnostem.

a) Nechť λ_i, $i = 1, \ldots, n$ jsou **navzájem různá vlastní čísla** (obecně komplexní) matice $\mathbb{A}$ a $\vec{h}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ jsou odpovídající lineárně nezávislé vlastní vektory. Potom vektorové funkce

V případě, že máme n různých vlastních čísel matice $\mathbb{A}$, pak každé je jednonásobné.

$$\vec{y}_i(x) = \vec{h}_i\mathrm{e}^{\lambda_i x}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

jsou lineárně nezávislá řešení homogenní soustavy $\vec{y}\,' = \mathbb{A}\vec{y}$ a tvoří **fundamentální systém** dané homogenní soustavy. Matice $\mathbb{Y}(x)$ (řádu n), jejíž sloupce jsou tvořeny fundamentálním systémem, tj.

$$\mathbb{Y}(x) = \left(\vec{h}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \vec{h}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \ldots, \vec{h}_n \mathrm{e}^{\lambda_n x}\right)$$

se nazývá **fundamentální maticí** soustavy (13).

Obecné řešení soustavy (13) definujeme jako vektorový násobek fundamentální matice

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C}\,,$$

resp. v rozepsané podobě

$$\vec{y}(x) = C_1 \vec{h}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \vec{h}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n \vec{h}_n \mathrm{e}^{\lambda_n x},$$

kde $\vec{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ je libovolný konstantní vektor.

<u>*Příklad 10.20*</u>: Určíme fundamentální matici a obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= \;5y_1 - 2y_2 - 2y_3, \\ y_2' &= \;-2y_1 + y_2 + y_3, \\ y_3' &= \;14y_1 - 6y_2 - 6y_3. \end{aligned}$$

Zde máme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 14 & -6 & -6 \end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 & -1 \\ -14 & 6 & \lambda + 6 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice A jsou:
$\lambda_1 = 0$, $\vec{h}_1 = (0, 1, -1)^T$ (řešení soustavy $-\mathbb{A}\vec{h} = \vec{0}$),
$\lambda_2 = 1$, $\vec{h}_2 = (1, 0, 2)^T$ (řešení soustavy $(\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \vec{0}$),
$\lambda_3 = -1$, $\vec{h}_3 = (1, -1, 4)^T$ (řešení soustavy $(-\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \vec{0}$).
Fundamentální matice má tedy tvar

$$\mathbb{Y}(x) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ 1 & 0 & -\mathrm{e}^{-x} \\ -1 & 2\mathrm{e}^x & 4\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}$$

a obecné řešení má tvar

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C} = C_1 \vec{h}_1 + C_2 \vec{h}_2 \mathrm{e}^x + C_3 \vec{h}_3 \mathrm{e}^{-x}.$$

b) Nechť λ_i je r_i-**násobným vlastním číslem** matice $\mathbb{A}$.

V tomto případě je situace složitější v závislosti na počtu lineárně nezávislých vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$ příslušných vlastnímu číslu λ. Abychom se vyhnuli použití Jordanova tvaru matice $\mathbb{A}$, musíme se spokojit s konstatováním, že ve fundamentálním systému, fundamentální matici a v obecném řešení vystupují lineární kombinace funkcí typu (viz také metodu charakteristické rovnice pro diferenciální rovnici n-tého řádu)

$$\mathrm{e}^{\lambda_i x}, \quad x\mathrm{e}^{\lambda_i x}, \quad x^2\mathrm{e}^{\lambda_i x}, \quad \dots \quad , x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_i x}, \quad k \le r_i\,.$$

Vektorové funkce, které ve fundamentálním systému přísluší vlastnímu číslu λ_i budeme hledat ve tvaru

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} P_{i1}(x) \\ P_{i2}(x) \\ \vdots \\ P_{in}(x) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_i x}\,,$$

kde koeficienty polynomů $P_{ij}(x)$ stupně nejvýše $r_i - 1$ určíme z požadavku, aby funkce $\vec{y}(x)$ byla řešením soustavy a abychom dostali chybějící lineárně nezávislá řešení. Sestrojíme pak fundamentální matici $\mathbb{Y}(x)$ a obecné řešení vyjádříme ve tvaru

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \mathbb{C}\,, \quad \vec{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T\,.$$

Příklad 10.21 : Stanovme obecné řešení, fundamentální systém a fundamentální matici soustavy $\vec{y}\,' = \mathbb{A}\vec{y}$ tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2\,, \\ y_2' &= y_1\,. \end{aligned}$$

Matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dané soustavy má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2} = 1$ a jeden vlastní vektor $\vec{h} = (1,1)^T$. Odpovídající řešení $\vec{y}(x) = \vec{h}\mathrm{e}^x$ nestačí k určení obecného řešení. Budeme jej proto hledat ve tvaru

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 x \\ b_1 + b_2 x \end{pmatrix} \mathrm{e}^x\,.$$

Dosazením do soustavy $\vec{y}\,' = \mathbb{A}\vec{y}$ dostaneme

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2x \\ b_1 + b_2x \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 + a_2x \\ b_1 + b_2x \end{pmatrix} \mathrm{e}^x$$

neboli

$$\begin{aligned} a_1 + a_2x + a_2 \; &= 2a_1 + 2a_2x - b_1 - b_2x\,, \\ b_1 + b_2x + b_2 \; &= a_1 + a_2x\,. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$b_2 = a_2\,, \quad b_1 = a_1 - a_2\,;$$

takže obecné řešení má tvar

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2x \\ (a_1 - a_2) + a_2x \end{pmatrix} \mathrm{e}^x = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + a_2 \begin{pmatrix} x \\ -1 + x \end{pmatrix} \mathrm{e}^x.$$

Fundamentální matici sestavíme z funkcí fundamentálního systému, tj.

$$\mathbb{Y}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & x\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & (-1+x)\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$$

a snadno prověříme, že platí $\mathbb{Y}' = \mathbb{A}\mathbb{Y}$.

Pozorování: obecné řešení lze upravit na tvar

$$\vec{y}(x) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + a_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \mathrm{e}^x = a_1 \vec{h} \mathrm{e}^x + a_2 (\vec{v} + x\vec{h})\ \mathrm{e}^x,$$

kde $\vec{h} = (1,1)^T$ je vlastní vektor matice $\mathbb{A}$ odpovídající dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_{1,2} = 1$ a $\vec{v}$ je nenulové řešení nehomogenní soustavy $(\mathbb{A} - \lambda_{1,2}\mathbb{I})\vec{v} = \vec{h}$.

K vícenásobnému vlastnímu číslu může patřit více lineárně nezávislých vlastních vektorů, popřípadě "řetězec vektorů".

<u>Příklad 10.22</u> : Najdeme obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_2 + y_3 \\ y_3' &= y_3 \end{aligned}$$

Kořeny charakteristické rovnice

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^3 = 0$$

jsou

$$\lambda_{1,2,3} = 1\,.$$

Vlastní číslo $\lambda = 1$ je trojnásobné. Obecné řešení proto hledáme ve tvaru

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2x + a_3x^2 \\ b_1 + b_2x + b_3x^2 \\ c_1 + c_2x + c_3x^2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x .$$

Dosazením do původní soustavy a po vydělení e^x dostaneme

$$\begin{aligned} &a_2 + 2a_3x + a_1 + a_2x + a_3x^2 = a_1 + a_2x + a_3x^2 \\ &b_2 + 2b_3x + b_1 + b_2x + b_3x^2 = b_1 + b_2x + b_3x^2 + c_1 + c_2x + c_3x^2 \\ &c_2 + 2c_3x + c_1 + c_2x + c_3x^2 = c_1 + c_2x + c_3x^2 . \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\begin{array}{lll} a_3 = a_3 & 2a_3 + a_2 = a_2 & a_2 + a_1 = a_1 \\ b_3 = b_3 + c_3 & 2b_3 + b_2 = b_2 + c_2 & b_2 + b_1 = b_1 + c_1 \\ c_3 = c_3 & 2c_3 + c_2 = c_2 & c_2 + c_1 = c_1 , \end{array}$$

neboli $a_2 = a_3 = 0, a_1 \in \mathbb{R}, b_2 = c_1, b_3 = 0, b_1 \in \mathbb{R}, c_2 = c_3 = 0,$ $c_1 \in \mathbb{R}$. Obecné řešení má tedy tvar

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 + c_1x \\ c_1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + b_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + c_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \mathrm{e}^x .$$

Vlastnímu číslu $\lambda = 1$ přísluší dva lineárně nezávislé vlastní vektory $\vec{h}_1 = (1,0,0)^T$, $\vec{h}_2 = (0,1,0)^T$ a s vektorem $\vec{h}_2$ tvoří řetězec vektor $\vec{v} = (0,0,1)^T$.

<u>*Příklad 10.23*</u>: Stanovme obecné řešení a fundamentální matici soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 , \\ y_2' &= -y_2 + 4y_3 , \\ y_3' &= y_1 - 4y_3 . \end{aligned}$$

Kořeny charakteristické rovnice

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & -4 \\ -1 & 0 & \lambda + 4 \end{pmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$$

jsou

$$\lambda_{1,2} = -3, \ \lambda_3 = 0.$$

Vlastnímu číslu $\lambda_3 = 0$ přísluší vektor $\vec{h}_3 = (1, 1, \frac{1}{4})^T$ a dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_{1,2} = -3$ přísluší jeden vlastní vektor $\vec{h}_1 = (1, -2, 1)^T$. Obecné řešení hledáme proto ve tvaru

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 x \\ b_1 + b_2 x \\ c_1 + c_2 x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{0 \cdot x} .$$

Dosazením do soustavy určíme vztahy mezi $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$, tj.

$$\begin{aligned} 2a_1 - a_2 + b_1 &= 0 , & 2a_1 + b_2 &= 0 , \\ 2b_1 - b_2 + 4c_1 &= 0 , & 2b_2 + 4c_2 &= 0 , \\ -c_1 - c_2 + a_1 &= 0 , & -c_2 + a_2 &= 0 . \end{aligned}$$

Pomocí a_1, a_2 vyjádříme ostatní koeficienty:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 - 2a_2 , & b_2 &= -2a_2 , \\ c_1 &= a_1 - a_2 , & c_2 &= a_2 . \end{aligned}$$

Takže obecné řešení soustavy má tvar

$$\begin{aligned} \vec{y}(x) = & \begin{pmatrix} a_1 + a_2 x \\ (a_2 - 2a_1) - 2a_2 x \\ (a_1 - a_2) + a_2 x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \\ & = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} + a_2 \begin{pmatrix} x \\ 1 - 2x \\ -1 + x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \\ & = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} + a_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \mathrm{e}^{-3x} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \\ & = a_1 \vec{h}_1 \mathrm{e}^{-3x} + a_2 (\vec{v} + x \vec{h}_1) \mathrm{e}^{-3x} + a_3 \vec{h}_3 , \end{aligned}$$

kde $(\lambda_{1,2}\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h}_1 = \vec{0}, (\lambda_{1,2}\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{v} = \vec{h}_1, (\lambda_3\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h}_3 = \vec{0}$. Fundamentální matice soustavy má tedy tvar

$$\mathbb{Y}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} & x\mathrm{e}^{-3x} & 1 \\ -2\mathrm{e}^{-3x} & (1 - 2x)\mathrm{e}^{-3x} & 1 \\ \mathrm{e}^{-3x} & (-1 + x)\mathrm{e}^{-3x} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} ,$$

a proto

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{a} , \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T .$$

Metoda variace konstant

Nyní máme nehomogenní soustavu diferenciálních rovnic

$$\vec{y}\,' = \mathbb{A}(x)\vec{x} + \vec{b}(x)\,, \quad x \in I \tag{11}$$

a metodou **variace konstant** nalezneme její řešení.

1. Nejdříve vyřešíme homogenní soustavu $\vec{y}\,' = \mathbb{A}(x)\vec{y}$. Řešení homogenní soustavy má tvar

   $$\vec{y}_h(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C}\,,$$

   kde $\mathbb{Y}(x)$ je fundamentální matice soustavy a $\vec{C}$ je vektor konstant.

2. Partikulární řešení rovnice (11) hledáme ve tvaru

   $$\vec{y}_p(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C}(x)\,,$$

   kde $\vec{C}(x)$ je vektor funkcí. Po dosazení do soustavy (11) máme

   $$\mathbb{Y}'(x)\vec{C}(x) + \mathbb{Y}(x)\vec{C}'(x) = \mathbb{A}\mathbb{Y}(x)\vec{C}(x) + \vec{b}(x)\,.$$

   Protože $\mathbb{Y}' = \mathbb{A}\mathbb{Y}$, tak platí

   $$\begin{aligned} \mathbb{Y}(x)\,\vec{C}'(x) &= \vec{b}(x) \\ \vec{C}'(x) &= \mathbb{Y}^{-1}(x)\vec{b}(x)\ . \end{aligned}$$

   Přímou integrací určíme

   $$\vec{C}(x) = \int \mathbb{Y}^{-1}(\xi)\vec{b}(\xi)\ d\xi$$

   a partikulární řešení soustavy (11) dostaneme ve tvaru $y_p(x) = \mathbb{Y}(x) \int \mathbb{Y}^{-1}(\xi)\vec{b}(\xi)\ d\xi\,.$

3. Obecné řešení nehomogenní soustavy má proto tvar

   $$\vec{y}(x) = \vec{y}(x)_h + \vec{y}_p(x) = \mathbb{Y}(x)\left(\vec{C} + \int \mathbb{Y}^{-1}(\xi)\vec{b}(\xi)\ d\xi\right)\,,$$

   kde $\vec{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ je libovolný konstantní vektor.

   Příklad 10.24 : Metodou variace konstant řešíme soustavu

   $$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 2y_2 + \mathrm{e}^x\,, \\ y_2' &= y_1 + y_2 + \mathrm{e}^x\,. \end{aligned}$$

1. Najdeme fundamentální matici homogenní soustavy
$$\mathbb{Y}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$
2. Protože
$$\mathbb{Y}^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-3x} & -2\mathrm{e}^{-3x} \\ -\mathrm{e}^{-2x} & 2\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix},$$
tak partikulární řešení soustavy má tvar
$$\vec{y}_p(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-\xi} \end{pmatrix} d\xi = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{x} \\ -\mathrm{e}^{x} \end{pmatrix}.$$
Pokud nechceme počítat inverzní matici k fundamentální, pak vektor $\vec{C}(x)$ získáme vyřešením soustavy $\mathbb{Y}(x)\,\vec{C}'(x)=\vec{b}(x)$, neboli
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{3x}C_1' + \mathrm{e}^{2x}C_2' &= \mathrm{e}^{x} \\ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3x}C_1' + \mathrm{e}^{2x}C_2' &= \mathrm{e}^{x}\,, \end{aligned}$$
jinou metodou.
3. Obecným řešením úlohy je vektorová funkce
$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{x} \\ -\mathrm{e}^{x} \end{pmatrix},$$
kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty.

11 Posloupnosti a řady funkcí

Motivace Při řešení počáteční úlohy

$$y'(x) = y(x)\,, \qquad y(0) = 1$$

můžeme formálním derivováním dostat

$$y''(x) = y'(x)\,, \cdots, y^{(n+1)}(x) = y^{(n)}(x)\,, \cdots \Rightarrow y^{(n)}(0) = 1\,.$$

Taylorův rozvoj funkce y v bodě 0 tedy bude mít tvar

$$y(x) = y(0) + y'(0)(x-0) + \cdots \frac{y^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Rovnici $y' = y$ řeší exponenciální funkce e^x, jejíž Taylorův rozvoj je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Řešení úlohy jsme dostali ve tvaru tzv. mocninné řady, kterou budeme zkoumat v této kapitole.

11.1 Posloupnosti funkcí

Definice 11.1 : Předpokládejme, že funkce $f_1, f_2, f_3, \ldots$ jsou definovány na množině $M \subset \mathbb{R}$. Potom zobrazení $F : n \to f_n\,,\ n \in \mathbb{N}$ se nazývá **posloupnost funkcí na množině** M. Značíme $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, zkráceně $\{f_n\}$.

Příklad 11.1 : $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\,, \qquad M = \mathbb{R}\,.$

Definice 11.2 : Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je **omezená na množině** M, existuje-li konstanta $K > 0$ taková, že pro všechna $x \in M$ a pro všechna $n = 1, 2, \ldots$ platí

$$|f_n(x)| \le K\,.$$

Příklad 11.2 : Posloupnost $f_n(x) = \cos nx$ je omezená na množině $M = \mathbb{R}$ konstantou $K \ge 1$.

Definice 11.3 : Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **konverguje v bodě** $x_0 \in M$, když číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje. Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **konverguje bodově na množině** M, když pro každé $x \in M$ číselná posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje. Množinu M pak nazýváme **oborem bodové konvergence** a na M je definována funkce $f = f(x)$ vztahem

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,, \quad x \in M\,.$$

Funkce f se nazývá **bodová limitní funkce** posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$, značíme $f_n \to f$.

<u>*Příklad 11.3*</u>: Posloupnost $f_n(x) = \frac{x}{n}$ konverguje bodově k funkci $f = 0$ na množině $M = \mathbb{R}$.

Posloupnost $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$, $M = \langle 0, 1\rangle$ má bodovou limitu $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0, 1) , \\ 1 & x = 1 . \end{cases}$

Poslední příklad ilustruje situaci, kdy posloupnost spojitých funkcí konverguje bodově k nespojité funkci. Proto bodovou konvergenci "vylepšíme".

Definice 11.4 : Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **konverguje stejnoměrně na množině** M k funkci $f = f(x)$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0 .$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$. Funkci f nazýváme **stejnoměrnou limitou**.

<u>*Poznámka 11.1*</u>: Uvedeme ekvivalentní definice konvergence posloupnosti funkcí.

1. *Bodová konvergence na M*:

$$\forall\, x \in M\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon, x)\ \forall\, n > n_0 :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon ,$$

2. *Stejnoměrná konvergence na M*:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon)\ \forall\, n > n_0\ \forall\, x \in M :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

<u>*Příklad 11.4*</u>: (pokračování příkladu (11.3))

Posloupnost $\{x^n\}$ na $\langle 0, 1\rangle$ nekonverguje stejnoměrně. Platí totiž

$$\sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |x^n - f(x)| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Zvolme $0 < \delta < 1$. Potom na intervalu $\langle\, 0, \delta\,\rangle$ posloupnost $\{x^n\}$ konverguje stejnoměrně, neboť pro $x \in \langle 0, \delta\rangle$ je $f(x) = 0$ a

$$\sup_{x\in\langle 0,\delta\rangle} |x^n| = \delta^n \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty .$$

Zároveň platí $\lim\limits_{x\to 1_-} x^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = 0 .$

Jinými slovy:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1_-} x^n(x) = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1\,.$$
$$\lim_{x\to 1_-} \lim_{n\to\infty} x^n(x) = \lim_{x\to 1_-} 0 = 0\,.$$

Vidíme, že limity nelze zaměnit.

<u>*Příklad 11.5*</u> : Nechť $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \ldots$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0 \quad \text{na} \quad \mathbb{R}$$

a protože

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\sin nx|}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0\,, \qquad \text{tak} \quad f_n \rightrightarrows 0\,.$$

Zároveň

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cos(n0) = +\infty\,,$$

ale

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(0))' = f'(x) = 0\,.$$

Vidíme, že derivace limitní funkce není limitou posloupnosti derivací. Říkáme, že danou posloupnost $\{f_n\}$ nelze "derivovat člen po členu".

<u>*Příklad 11.6*</u> : Nechť $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $x \in \langle 0, 1\rangle$. Potom

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \langle 0, 1\rangle\,.$$

Zároveň pro integrály členů posloupnosti platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

avšak

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0\,.$$

Opět vidíme, že nelze zaměnit pořadí limitování a integrování, tj. limita posloupnosti integrálů není rovna integrálu z limity. Říkáme, že danou posloupnost nelze "integrovat člen po členu".

Věta 11.1 : (Postačující podmínka spojitosti, diferencovatelnosti a integrovatelnosti limitní funkce, záměnnosti limit)

a) Je-li $\{f_n\}$ posloupnost spojitých funkcí na intervalu I, která na I konverguje stejnoměrně k funkci f, potom funkce $f = f(x)$ je také spojitá na I.

b) Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ Riemannovsky integrovatelných funkcí ($f_n \in \mathcal{R}(I)$, $I = \langle a, b\rangle$) konverguje stejnoměrně na I k funkci $f(x)$, potom $f \in \mathcal{R}(I)$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

c) Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ konverguje v nějakém bodě $x_0 \in I = \langle a, b\rangle$, f_n jsou diferencovatelné funkce na I a posloupnost derivací $\{f_n'\}$ konverguje stejnoměrně na I, potom i posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na I, limitní funkce $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ je diferencovatelná funkce na I a platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]' = f'(x)\,.$$

d) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b) a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to a+} f_n(x) = c_n$. Pak existují vlastní limity $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ a jsou si rovny.

11.2 Funkční řady

Příklad 11.7 : Výraz

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

je řadou funkcí $1, x, \frac{x^2}{2!}, \ldots$ definovaných na $\mathbb{R}$. Pro každé pevné $x \in \mathbb{R}$ dostáváme číselnou řadu, která konverguje, neboť podle d'Alembertova kritéria je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \ \ (< 1), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Definice 11.5 : Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na množině M. Potom výraz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

se nazývá **nekonečná řada funkcí na množině** M. Funkce

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

se nazývá **n-tý částečný součet řady** a $\{s_n(x)\}$ je **posloupnost částečných součtů řady**.
Existuje-li

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)\ , \quad x \in M\ ,$$

potom funkce $s(x),\ x \in M$, se nazývá **součet řady** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
Říkáme, že **řada konverguje** k funkci $s(x)$.

Příklad 11.8 : Řada

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots$$

je geometrickou řadou s kvocientem $q = \frac{1}{1+x^2} < 1\,,\ x \neq 0\,$, a tedy konverguje pro každé $x \in (-\infty, +\infty)$ (pro $x = 0$ je sice $q = 1$, ale řada se skládá ze samých nul). Její součet je

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2}{\frac{x^2}{1+x^2}} = \begin{cases} 1 + x^2 & x \neq 0\,, \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Tedy součet řady spojitých funkcí existuje, ale *není* to spojitá funkce.

Poznámka 11.2 :

K tomu, aby součet $s(x)$ řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, kde $f_n(x)$ jsou spojité funkce, byl spojitý, potřebujeme podle věty (11.1), aby posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}$ konvergovala k součtu $s(x)$ stejnoměrně.

Věta 11.2 : (Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence řady funkcí)
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ je řada funkcí na množině M a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je číselná řada s nezápornými členy $b_n \geq 0$. Nechť dále platí

$$|f_n(x)| \leq b_n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \forall\, x \in M$$

a řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje. Potom řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně a absolutně na M (tj. konverguje stejnoměrně na M také řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$).

Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ se nazývá **majoranta** řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Příklad 11.9 : Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ konverguje podle vět (11.1) a (11.2) stejnoměrně ke spojité funkci, neboť její majoranta $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní.

11.3 Mocninné řady

Definice 11.6 : Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

se nazývá **mocninná řada se středem v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$.

Věta 11.3 :

1. Konverguje-li mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ v bodě $x_1 \neq x_0$, potom konverguje absolutně v každém bodě x otevřeného intervalu určeného nerovností
$$|x-x_0| < |x_1-x_0|\,.$$
2. Diverguje-li mocninná řada v bodě x_2, potom diverguje v každém bodě x splňujícím nerovnost
$$|x-x_0| > |x_2-x_0|\,.$$

<u>Důkaz</u> : ad 1) Z nutné podmínky pro konvergenci řady $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x_1-x_0)^n$ dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n(x_1-x_0)^n| = 0$ (věta 5.1 MA1). Zároveň z konvergence posloupnosti plyne její omezenost (věta 4.4 MA1), tj. $\exists\, K > 0 : |a_n(x_1 - x_0)^n| \leq K$.

Tedy pro $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ platí

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n(x_1 - x_0)^n| \cdot \left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^n \leq K \cdot q^n,$$

kde $q = \left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right| < 1$ a podle srovnávacího kritéria (věta 5.3 MA1) řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ konverguje absolutně.

ad 2) Důkaz této části věty provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje bod x_3 takový, že $|x_3 - x_0| > |x_2 - x_0|$ a řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x_3 - x_0)^n$ konverguje. Potom podle bodu 1 musí konvergovat také řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x_2 - x_0)^n$, a to je spor.

<u>*Důsledek 11.1*</u>: Z předchozí věty (11.3) vyplývá, že existuje číslo $R \geq 0$ takové, že mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje absolutně pro x splňující nerovnost

$$|x - x_0| < R\,, \qquad \text{tj. pro } x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

a diverguje pro x splňující nerovnost

$$|x - x_0| > R\,, \quad \text{tj. pro } x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty).$$

Definice 11.7 : (Poloměr konvergence)
Číslo $R \geq 0$ s výše uvedenou vlastností se nazývá **poloměr konvergence** mocninné řady. Interval $(x_0 - R, x_0 + R)$ se nazývá **obor konvergence** mocninné řady.
V případě, že mocninná řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, klademe $R = +\infty$.

<u>*Poznámka 11.3*</u>: O konvergenci či divergenci mocninné řady v krajních bodech $x_0 - R$ a $x_0 + R$ nelze obecně nic říci. V těchto bodech řada buď konverguje, nebo diverguje v závislosti na vlastnostech posloupnosti $\{a_n\}$.

Příklad 11.10: a) Máme řadu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Pro pevné $x \in \mathbb{R}$ zkoumáme absolutní konvergenci této řady pomocí podílového kritéria (věta 5.6 MA1). Protože

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \ \ (<1)\,,$$

tak daná řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tj. $R = +\infty$.

b) Máme řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Nyní použijeme limitní odmocninové kritérium (věta 5.6 MA1). Protože

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = |x|\,,$$

tedy daná řada konverguje pro všechna x splňující $|x| < 1$, diverguje pro všechna x splňující $|x| > 1$ a poloměr konvergence $R = 1$.

V krajních bodech oboru konvergence musíme vyšetřit danou řadu samostatně.

Pro $x = -1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje podle Leibnizova kritéria (věta 5.10 MA1).

Pro $x = 1$ dostaneme harmonickou řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje (příklad 5.3 MA1).

Výpočet poloměru konvergence mocninné řady

Použijeme-li odmocninové kritérium, pak obecně chceme, aby platilo $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x-x_0| < 1.$

Podobně z podílového kritéria plyne $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0| < 1.$

Z odmocninového (Cauchyova) kritéria lze odvodit pro poloměr konvergence vzorec:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,.$$

Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, pak z podílového (d'Alembertova) kritéria dostaneme

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}\,.$$

Věta 11.4 : (Stejnoměrná konvergence mocninné řady)
Nechť $R \in (0, \infty)$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $0 < \varepsilon < R$, potom mocninná řada konverguje stejnoměrně na uzavřeném intervalu $\langle x_0 - R + \varepsilon, x_0 + R - \varepsilon \rangle$.

Důkaz : Podle věty (11.3) řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje absolutně uvnitř oboru konvergence, tj. číselná řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n(R-\varepsilon)^n|$ konverguje. Pro všechna $|x - x_0| \leq R - \varepsilon$ platí $|a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n(R-\varepsilon)^n|$. Podle Weierstrassova kritéria (věta (11.2)) tedy mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně pro všechna x splňující podmínku $|x - x_0| \leq R - \varepsilon$.

Věta 11.5 : (o derivaci a integraci mocninné řady)
Mocninné řady

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}[a_n(x-x_0)^n], \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n dt$$

mají stejný poloměr konvergence R jako řada

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$$

a platí $s'(x) = g(x)$, $F'(x) = s(x)$ pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Důkaz : Řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}[a_n(x-x_0)^n] = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}] = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} (m+1)a_{m+1}(x-x_0)^m]$ má poloměr konvergence

$$R' = \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{|(m+1)a_{m+1}|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{(m+1)}\sqrt[m]{|a_{m+1}|}} = R\,,$$

kde R je poloměr konvergence původní řady $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Z tvrzení věty (11.1) vyplývá, že na uzavřeném intervalu $I = \langle x_0 - R + \varepsilon, x_0 + R - \varepsilon \rangle$ řady $g(x), s(x)$ konvergují stejnoměrně a podle věty (11.1 c) platí

$$s'(x) = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n\right]' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}[a_n(x-x_0)^n] = g(x)$$

pro každé $x \in I$. Protože $\varepsilon > 0$ je libovolně malé, tak tvrzení věty platí pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Pro (integrální) řadu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n dt$ je důkaz podobný.

Důsledek 11.2: Mocninnou řadu lze uvnitř oboru konvergence derivovat a integrovat člen po členu, tj. derivace součtu se rovná součtu derivací a integrál součtu se rovná součtu integrálů uvnitř oboru konvergence.

Příklad 11.11: Pomocí předchozí věty (11.5) najdeme součet řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Jejím derivováním dostaneme geometrickou řadu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Zpětně po integrování platí $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x| \quad \text{pro} \quad x \in (-1,1)$.

Definice 11.8 : Nechť funkce $f = f(x)$ má derivace všech řádů v bodě x_0. Mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n ,$$

se nazývá **Taylorova řada** funkce f. Jestliže se navíc součet Taylorovy řady rovná funkci f, pak se funkce f nazývá **analytická funkce** na oboru konvergence.

Poznámka 11.4: Příklady analytických funkcí jsou
$e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$, $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.
Každá mocninná řada je Taylorovou řadou svého součtu, *ale ne každá* Taylorova řada funkce f konverguje k funkci f. Například funkce $f(x) = |x|$ má v bodě $x_0 = 1$ všechny derivace a její Taylorova řada je $1\,(x-1)^0 + 1\,(x-1)^1 = x$, což není původní funkce (pro $x < 0$).
Úloha nalézt Taylorovu řadu funkce f se nazývá **rozvoj funkce f v mocninnou řadu**.

Mocninné řady se používají v teorii aproximací, při konstrukci primitivních funkcí, při řešení diferenciálních rovnic a velmi často v teorii funkcí komplexní proměnné.

Taylorova metoda řešení počátečních úloh

Předpokládejme, že řešení $y(x)$ počáteční úlohy má v bodě x_0 derivace všech řádů. Řešení pak hledáme ve tvaru

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

a hodnoty $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $\dots$ určíme z diferenciální rovnice a z počátečních podmínek.

Příklad 11.12: Řešíme počáteční úlohu

$$y'' = xy, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = 3\,.$$

Z počátečních podmínek plyne

$$y(x) = 4 + 3(x - 0) + \frac{y''(0)}{2!}(x - 0)^2 + \dots\,.$$

Z rovnice dostaneme postupným derivováním:

$$\begin{aligned}
&y''(x) = x\,y(x) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y''(0) = 0\,y(0) = 0\,, \\
&y'''(x) = y(x) + x\,y'(x) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y'''(0) = y(0) + 0\cdot y'(0) = 1\cdot 4\,, \\
&y^{IV}(x) = y'(x) + y'(x) + x\,y''(x) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y^{IV}(0) = 2y'(0) + 0\cdot y''(0) = 2\cdot 3\,, \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&y^{(n)}(x) = (n-2)y^{(n-3)}(x) + x\,y^{(n-2)}(x) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y^{(n)}(0) = (n-2)y^{(n-3)}(0)\,.
\end{aligned}$$

Obecně

$$\begin{aligned}
&y^{(3n)}(0) = (3n-2)(3n-5)\cdots 4\cdot 1\cdot 4\,, \\
&y^{(3n+1)}(0) = (3n-1)(3n-4)\cdots 5\cdot 2\cdot 3\,, \\
&y^{(3n+2)}(0) = 0\,.
\end{aligned}$$

Po dosazení do předpokládaného tvaru řešení dostaneme:

$$\begin{aligned}
y(x) &= 4 + 3x + \tfrac{4}{3!}x^3 + \tfrac{3}{4!}x^4 + \dots \\
&= 4 + 3x + \sum_{n=1}^{\infty} 4\tfrac{(3n-2)(3n-5)\cdots 4\cdot 1}{(3n)!}x^{3n} + 3\tfrac{(3n-1)(3n-4)\cdots 5\cdot 2}{(3n+1)!}x^{3n+1}.
\end{aligned}$$

Poznámka 11.5: Aby výše uvedený formální postup byl oprávněný, musíme dokázat konvergenci vypočtené Taylorovy řady. To však může být daleko komplikovanější než celý předcházející výpočet.

Metoda neurčitých koeficientů
(pro řešení diferenciálních rovnic)

Tato metoda se používá ke stanovení fundamentálního systému lineární diferenciální rovnice. Předpokládáme, že řešení $y(x)$ je ve tvaru mocninné řady se středem v bodě 0, tedy

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots .$$

Formálním derivováním "člen po členu" dostáváme

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \text{atd.}$$

Po dosazení do rovnice a využití počátečních podmínek vypočítáme koeficienty $a_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$.

<u>*Příklad 11.13*</u> : Řešíme počáteční úlohu

$$y'' = xy\,, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,.$$

Po dosazení za $y(x), y''(x)$ obdržíme:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}] x^n + 2a_2 = 0\,.$$

Odtud plyne:

$$2a_2 = 0\,, \qquad a_3 = \tfrac{a_0}{3\cdot 2}\,, \qquad a_4 = \tfrac{a_1}{4\cdot 3}\,, \qquad a_5 = \tfrac{a_2}{5\cdot 4} = 0\,,$$
$$a_6 = \tfrac{a_3}{6\cdot 5} = \tfrac{a_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}\,, \qquad a_7 = \tfrac{a_4}{7\cdot 6} = \tfrac{a_1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}\,, \qquad \text{atd.}$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0\Big(1 + \tfrac{x^3}{2.3} + \tfrac{x^6}{2.3.5.6} + \ldots + \tfrac{x^{3n}}{2.3.5.6\ldots(3n-1)3n} + \ldots\Big) \\ &\quad + a_1\Big(x + \tfrac{x^4}{3.4} + \tfrac{x^7}{3.4.6.7} + \ldots + \tfrac{x^{3n+1}}{3.4.6.7\ldots 3n(3n+1)} + \ldots\Big)\,. \end{aligned}$$

Z počátečních podmínek obdržíme

$$a_0 = y(0) = 0, \quad a_1 = y'(0) = 1.$$

Je možné ukázat, že výše uvedená mocninná řada má poloměr konvergence $R = +\infty$, tj. řešení počáteční úlohy je definováno na celém $\mathbb{R}$.

Poznámka 11.6: Obecné řešení rovnice $y'' = xy$ můžeme tedy psát ve tvaru $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$, kde

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \tfrac{x^3}{2\cdot 3} + \tfrac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \dots, \\ y_2(x) &= x + \tfrac{x^4}{3\cdot 4} + \tfrac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots . \end{aligned}$$

Funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislá řešení dané rovnice, která tvoří fundamentální systém.

11.4 Trigonometrické Fourierovy řady

Dosud jsme funkce hledali ve tvaru mocninné řady, vyjadřovali jsme je v "bázi polynomů" 1, x, x^2, … . Nyní zavedeme novou "bázi trigonometrických" funkcí $\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$.

Definice 11.9 : (Fourierova řada podle základního systému) Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle -\pi, \pi\rangle)$. **Trigonometrická řada**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

jejíž koeficienty jsou určeny vzorci

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos k\xi \, d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin k\xi \, d\xi, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

se nazývá **Fourierova řada funkce f podle (základního) trigonometrického systému** $\left\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \dots\right\}$. Koeficientům a_k, b_k určeným uvedenými vzorci se říká **Fourierovy koeficienty** funkce f a příslušné Fourierově řadě se také říká **Fourierův rozvoj** funkce f.

Poznámka 11.7: Chceme formálně vyjádřit funkci f ve tvaru $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. Po vynásobení funkcí $\sin nx$ a integrování dostaneme $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx =$ $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin nx \, dx + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \sin nx \, dx$.
Zároveň pro $k = n$ je $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 \, dx = \pi$, jinak ale platí $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = 0$ a $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx \, dx = 0$. Odtud plynou vztahy pro a_k, b_k.

Fourierovy řady (pokud konvergují) představují "analytické" vyjádření 2π-periodických funkcí získaných měřením periodických dějů (kmitů, signálů, apod.).

Definice 11.10 : (Fourierova řada podle obecného systému)
Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a, a+T \rangle)$, $T > 0$. Trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi kx}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kx}{T} \right),$$

jejíž koeficienty jsou určeny vzorci

$$a_k = \frac{2}{T} \int\limits_a^{a+T} f(\xi) \cos \frac{2\pi k\xi}{T}\, d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int\limits_a^{a+T} f(\xi) \sin \frac{2\pi k\xi}{T}\, d\xi, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

se nazývá **Fourierova řada funkce f podle (obecného) trigonometrického systému**

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos \frac{2\pi x}{T}, \sin \frac{2\pi x}{T}, \cos \frac{4\pi x}{T}, \sin \frac{4\pi x}{T}, \dots \right\}.$$

Příklad 11.14 : Stanovíme Fourierovu řadu funkce $f(x) = x,\ x \in \langle -\pi, \pi)$ podle *základního* trigonometrického systému, tj. ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Vypočteme koeficienty a_k , b_k :

Integrál liché funkce na symetrickém intervalu je nulový

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \xi \cos k\xi\, d\xi = 0\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

Integrál sudé funkce na symetrickém intervalu $\langle -a, a \rangle$ se rovná dvojnásobku daného integrálu na polovičním intervalu $\langle 0, a \rangle$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \xi \sin k\xi\, d\xi = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \xi \sin k\xi\, d\xi = (-1)^{k-1} \frac{2}{k},\ k = 1, 2, \dots.$$

Výsledek píšeme ve tvaru:

$$f(x) \sim 2 \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k} + \dots \right]$$

Podle definice je Fourierova řada periodická funkce, proto se funkce f definována na intervalu $\langle a, a+T \rangle$ dodefinuje vztahem $f(x + kT) = f(x)\,,\ x \in \langle a, a+T \rangle\,,\ k \in \mathbb{Z}$. Dostaneme tzv. **T-periodické prodloužení** funkce f a zkoumáme, zda vypočtená Fourierova řada konverguje a jak součet této řady souvisí s funkcí f .

Věta 11.6 : Je-li funkce f z definice (11.10) spojitá nebo po částech spojitá, případně obecněji Riemannovsky integrovatelná na příslušném intervalu, potom pro její Fourierovy koeficienty platí

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} b_k = 0\,.$$

Věta 11.7 : Když číselná řada $\frac{1}{2}|a_0| + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$ konverguje, pak trigonometrická řada $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ konverguje absolutně a stejnoměrně pro $x \in (-\infty, +\infty)$ a její součet $s(x)$ je spojitá 2π-periodická funkce a a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty.

Důkaz : plyne z nerovnosti $|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \le |a_k| + |b_k|$ a z věty (11.2) (Weierstrassovo kritérium).

Věta 11.8 : Nechť f je T-periodická funkce a f' je po částech spojitá funkce. Potom její Fourierova řada podle (obecného) trigonometrického systému konverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ k součtu $s(x)$, který je T-periodický a platí

$$s(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

kde $f(x_+) = \lim\limits_{\xi\to x+} f(\xi)\,,\ f(x_-) = \lim\limits_{\xi\to x-} f(\xi)\,.$

Příklad 11.15 : Vypočítáme Fourierovu řadu 2π-periodického prodloužení funkce $f(x) = x^2$, $x \in \langle -\pi, \pi)$ podle základního trigonometrického systému.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi^2 \, d\xi = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi^2 \cos k\xi \, d\xi = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \xi^2 \cos k\xi \, d\xi = 4\,\frac{(-1)^k}{k^2}\,,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi^2 \sin k\xi \, d\xi = 0\,, \quad k = 1, 2, 3, \dots\,.$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right].$$

Protože periodické prodloužení funkce f je spojitá funkce a má po částech spojitou derivaci, platí podle věty (11.8) rovnost $s(\pi)=f(\pi) \Rightarrow \frac{\pi^2}{3}-4\left[\cos\pi-\frac{\cos 2\pi}{2^2}+\frac{\cos 3\pi}{3^2}-\ldots\right]=\pi^2$. Tedy

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,.$$

<u>*Cvičení 11.1*</u> : Najděte Fourierovu řadu funkce

$$f(x)=\begin{cases} 0\,, & -\pi\le x\le 0,\\ x\,, & 0<x<\pi,\end{cases}$$

podle základního trigonometrického systému, tj. ve tvaru

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

$[\,f(x)\sim\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\ldots\right)+\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots\right).\,]$

V literatuře se místo přívlastku "Fourierova" užívá také přívlastek "harmonická" (analýza, syntéza; pozor však: Fourierova řada $\neq$ harmonická řada).

Základní úloha Fourierovy analýzy

K dané periodické funkci $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ (tj. např. k periodickému prodloužení funkce dané na intervalu $\langle a,a+T\rangle$) máme určit

a) *frekvence* ω_k harmonických složek,

b) *amplitudy* r_k harmonických složek (tj. koeficienty $a_k,\ b_k$),

c) *fáze* v_k harmonických složek,

neboli Fourierovu řadu funkce f vyjádřit ve tvaru

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2\pi kx}{T}+b_k\sin\frac{2\pi kx}{T}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\overbrace{r_k\sin(\omega_k x+\varphi_k)}^{\text{tzv. harmonická složka}}\quad,$$

$$\text{potom}\quad r_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2},\quad \omega_k=\frac{2\pi k}{T},\quad \varphi_k=\operatorname{arctg}\frac{a_k}{b_k}\,.$$

Základní úloha Fourierovy syntézy

Ze známých *frekvencí, amplitud a fází* určit ("rekonstruovat") funkci $f(x)$, která je součtem řady $\sum_{k=0}^{\infty} r_k\sin(\omega_k x+\varphi_k)$, a určit její hodnoty ve vybraných bodech $x\in\mathbb{R}$.

11.5 Obecné Fourierovy řady

Definice 11.11 : (A) Označme $L_1(\langle a,b\rangle)$ množinu (prostor) funkcí f (reálných nebo komplexních) proměnné $x\in\langle a,b\rangle$ takových, že integrál $\int_a^b |f(x)|\ dx$ existuje, včetně případu, že funkce f je na $\langle a,b\rangle$ integrovatelná v nevlastním smyslu. Podobně symbolem $L_2(\langle a,b\rangle)$ označíme množinu funkcí f, pro než integrál $\int_a^b |f(x)|^2\ dx$ existuje ve výše zmíněném smyslu.

(B) Pro každé dvě funkce $f,g\in L_2(\langle a,b\rangle)$ definujeme **skalární součin** těchto funkcí jako reálné číslo

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\ dx \qquad \text{(pro reálné funkce)},$$

případně jako komplexní číslo

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\ dx \qquad \text{(pro komplexní funkce)}.$$

Nezáporné číslo

$$\|f\|_2=\sqrt{(f,f)}=\left(\int_a^b |f(x)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

se nazývá **norma** funkce f v prostoru $L_2(\langle a,b\rangle)$ (tzv. L_2-norma).

(C) Funkce $f,g\in L_2(\langle a,b\rangle)$ se nazývají **ortogonální** (ortogonální na $\langle a,b\rangle$; ortogonální ve smyslu uvedeného skalárního součinu; ortogonální v $L_2(\langle a,b\rangle)$), platí-li

$$(f,g)=0\,.$$

(D) Posloupnost $\{\varphi_k\}$ (spočetný systém) funkcí $\varphi_k\in L_2(\langle a,b\rangle)$, $k=1,2,3,\ldots$ se nazývá **ortogonální systém** (na $\langle a,b\rangle$, resp. v $L_2(\langle a,b\rangle)$), platí-li

$$(\varphi_k,\varphi_j)\begin{cases} =0\,, & k\neq j\,,\\ \neq 0\,, & k=j\,.\end{cases}$$

Zatím předpokládáme, že funkce f jsou Riemannovsky integrovatelné.
Obecně se však značení $L_1(\langle a,b\rangle)$ používá pro tzv. Lebesgueovsky integrovatelné funkce, ke kterým patří i funkce, které nemají Riemannův integrál (např. Dirichletova funkce).

Poznámka 11.8: Lze snadno ověřit, že námi definovaný skalární součin splňuje následující obecné vlastnosti :

a) $(f, g) = (g, f)$,

b) $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$,

c) $(\alpha f, g) = \alpha(f, g),\ \alpha \in \mathbb{R}$,

d) $(f, f) \geq 0$, když $(f, f) = 0$, pak $f(x) = 0$ s.v. (skoro všude - tzn. s výjimkou spočetně mnoha bodů).

Cvičení 11.2: Dokažte, že funkce $\frac{1}{\sqrt{x}} \in L_1(\langle 0, 1\rangle)$, ale $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin L_2(\langle 0, 1\rangle)$. $[\int\limits_0^1 |\frac{1}{\sqrt{x}}|\, dx = 2,\quad \int\limits_0^1 |\frac{1}{\sqrt{x}}|^2\, dx = \infty]$

Příklady ortogonálních systémů

1. *Systém sinů* $\{\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \sin kx,\ \ldots\}$ je ortogonálním systémem na $\langle 0, \pi\rangle$, tj.

$$\int\limits_0^\pi \sin jx \sin kx\, dx = 0 \qquad \text{pro}\quad k \neq j;$$

dále pak

$$\|\sin kx\|_2 = \left[\int\limits_0^\pi (\sin kx)^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Funkce systému jsou 2π-periodické.

2. *Obecný systém sinů* $\left\{\sin\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \sin\frac{k\pi x}{l},\ \ldots\right\}$ je ortogonálním systémem na $\langle 0, l\rangle$. Zde

$$\int\limits_0^l \sin\frac{j\pi x}{l} \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx = 0 \qquad \text{pro}\ k \neq j,$$

$$\left\|\sin\frac{k\pi x}{l}\right\|_2 = \left[\int\limits_0^\pi \left(\sin\frac{k\pi x}{l}\right)^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{l}{2}}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Funkce systému jsou $2l$-periodické $(2l = T)$.

3. *Systém kosinů* $\left\{\frac{1}{2},\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos kx,\ \ldots\right\}$ je ortogonálním systémem na $\langle 0, \pi\rangle$.
   Zde
   $$\left\|\frac{1}{2}\right\|_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \|\cos kx\|_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$
   Funkce systému jsou 2π-periodické.

4. *Obecný systém kosinů* $\left\{\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{k\pi x}{l},\ \ldots\right\}$ je ortogonálním systémem na $\langle 0, l\rangle$. Zde
   $$\left\|\frac{1}{2}\right\|_2 = \frac{\sqrt{l}}{2}, \quad \left\|\cos\frac{k\pi x}{l}\right\|_2 = \sqrt{\frac{l}{2}}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$
   Funkce systému jsou $2l$-periodické.

5. *Trigonometrický systém*
   $\left\{\frac{1}{2},\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos kx,\ \sin kx,\ \ldots\right\}$ je ortogonálním systémem na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$, resp. na každém intervalu $\langle c, c + 2\pi\rangle$. Zde máme
   $$\left\|\frac{1}{2}\right\|_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \|\cos kx\|_2 = \sqrt{\pi}, \quad \|\sin kx\|_2 = \sqrt{\pi}.$$
   Uvědomte si, že funkce $\sin x,\ \sin 2x$ jsou ortogonální jak na $\langle 0, \pi\rangle$, tak na $\langle -\pi, \pi\rangle$.

6. *Obecný trigonometrický systém*
   $\left\{\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{k\pi x}{l},\ \sin\frac{k\pi x}{l},\ \ldots\right\}$ je ortogonálním systémem na intervalu $\langle -l, l\rangle$, resp. na každém intervalu $\langle c, c + 2l\rangle$. Platí totiž vzorce
   $$\int_c^{c+2l} \cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{j\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0 & k \neq j, \\ l & k = j \neq 0, \\ 2l & k = j = 0, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \left\|\frac{1}{2}\right\|_2 = \sqrt{\frac{l}{2}}, \\ \left\|\cos\frac{k\pi x}{l}\right\|_2 = \sqrt{l}, \\ \end{array}$$
   $$\int_c^{c+2l} \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{j\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0 & k \neq j, \\ l & k = j \neq 0, \\ 2l & k = j = 0, \end{cases} \quad \left\|\sin\frac{k\pi x}{l}\right\|_2 = \sqrt{l},$$
   $$\int_c^{c+2l} \cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{j\pi x}{l}\,dx = 0 \qquad \text{pro všechna } k,\ j.$$
   Funkce systému jsou $2l$-periodické.

7. *Systém Legendreových polynomů* $\big\{P_k(x)\big\} = \big\{1,\ x,\ \frac{1}{2}(3x^2-1),\ \frac{1}{2}(5x^3-3x),\ \dots\ ,\ \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\ \dots\big\}$ je ortogonálním systémem na $\langle -1,1\rangle$, neboť platí

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_j(x)\,dx = 0, \quad k \neq j;$$

$$\left(\int_{-1}^{1} \big(P_k(x)\big)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|P_k(x)\|_2 = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}.$$

Funkce tohoto systému nejsou periodické.

Příklad 11.16: Vlastní funkce $v_k(x)$ okrajové úlohy

$$Lv = -(p(x)v')' + q(x)v = \lambda v, \quad v(0) = v(1) = 0, \ \ x \in (0,1)$$

příslušné navzájem různým vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ tvoří ortogonální systém na $\langle 0,1\rangle$.

Definice 11.12: Nechť $f \in L_2$ a nechť $\{\varphi_k\} \subset L_2$ je ortogonální systém ve smyslu skalárního součinu v L_2. Čísla

$$c_k = \frac{(f,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|_2^2}$$

se nazývají **Fourierovy koeficienty funkce f podle ortogonálního systému $\{\varphi_\mathbf{k}\}$** a řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$$

se nazývá **Fourierovou řadou** funkce f podle ortogonálního systému $\{\varphi_k\}$.

Příklad 11.17: Pro funkci $f \in L_2(\langle c, c+2l\rangle)$ a pro obecný trigonometrický systém sestrojíme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

$$c_0 = a_0, \quad c_1 = a_1, \quad c_2 = b_1, \quad \dots \quad \text{atd.}\,,$$

v níž

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{(f,\frac{1}{2})}{\|\frac{1}{2}\|_2^2} = \frac{\int\limits_c^{c+2l} f(x)\frac{1}{2}\,dx}{\frac{l}{2}} = \frac{1}{l}\int\limits_c^{c+2l} f(x)\,dx,\\
a_k &= \frac{(f,\cos\frac{k\pi x}{l})}{\|\cos\frac{k\pi x}{l}\|_2^2} = \frac{1}{2}\int\limits_c^{c+2l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad k=1,2,\dots,\\
b_k &= \frac{(f,\sin\frac{k\pi x}{l})}{\|\sin\frac{k\pi x}{l}\|_2^2} = \frac{1}{2}\int\limits_c^{c+2l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad k=1,2,\dots .
\end{aligned}
$$

Příklad 11.18: Pro funkci $f \in L_2(\langle 0,\pi\rangle)$ a pro systém $\{\sin x,\ \sin 3x,\ \sin 5x,\ \dots\}$ sestrojíme řadu

$$b_1\sin x + b_3\sin 3x + b_5\sin 5x + \dots,$$

kde

$$b_k = \frac{(f,\sin kx)}{\|\sin kx\|_2^2} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k \text{ liché.}$$

Zde vycházíme ze skutečnosti, že i tento "neúplný" systém sinů je ortogonálním systémem na $\langle 0,\pi\rangle$.

Příklad 11.19: Pro funkci $f \in L_2(\langle 0,\pi\rangle)$ a pro systém sinů $\{\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \dots\}$ sestrojíme řadu

$$b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \dots\ ,$$

v níž jsou koeficienty b_k určeny stejným vzorcem jako v předcházejícím příkladě, ale pro $k = 1,2,3,\dots$.

Poznámka 11.9: Poslední dva příklady nás upozorňují na závažnou skutečnost. Například pro funkci $f(x) = \sin 2x$, $x \in \langle 0,\pi\rangle$ budou všechny koeficienty b_k Fourierovy řady podle "neúplného" systému sinů nulové (součet řady je nulová funkce) a koeficienty b_k Fourierovy řady podle "úplného" systému budou nulové s výjimkou $b_2 = 1$. Součtem této řady pak bude přímo funkce $f(x) = \sin 2x$. V obecnější poloze si zde opět klademe otázku, jakou souvislost má součet Fourierovy řady $s(x)$ s funkcí $f(x)$, pro níž byla Fourierova řada konstruována.

Věta 11.9 : (Minimální vlastnost Fourierových koeficientů)
Nechť $\{\varphi_k\}$ je ortogonální systém (v L_2) a nechť

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x), \quad \text{kde } \ c_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|_2^2} \ ,$$

je částečný součet Fourierovy řady funkce $f \in L_2$ a c_k jsou příslušné Fourierovy koeficienty. Nechť dále

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k \varphi_k(x)$$

je libovolná lineární kombinace funkcí daného ortogonálního systému. Potom platí

$$\|f - s_n(x)\|_2 = \min_{\sigma_n} \|f - \sigma_n(x)\|_2 \, ,$$

tj. ze všech lineárních kombinací typu $\sigma_n(x)$ má nejmenší vzdálenost od funkce f ta lineární kombinace, v níž jsou koeficienty rovny Fourierovým koeficientům.

Důkaz : Druhá mocnina vzdálenosti vzhledem k L_2-normě je

$$\|f-\sigma_n(x)\|_2^2 = \|f - \sum_{k=1}^{n} d_k \varphi_k\|_2^2 = \Big(f - \sum_{k=1}^{n} d_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} d_k \varphi_k\Big) =$$
$$= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^{n} d_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_k d_j (\varphi_k, \varphi_j) =$$
$$= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^{n} d_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} d_k^2 \|\varphi_k\|_2^2 = \phi(d_1, d_2, \ldots, d_n),$$

kde ϕ je kvadratická funkce proměnných $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Z nutných podmínek minima $\frac{\partial \phi}{\partial d_k} = 0, \ k = 1, 2, \ldots, n$ dostaneme

$$-2(f, \varphi_k) + 2 d_k \|\varphi_k\|_2^2 = 0,$$

tj.

$$d_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|_2^2} = c_k.$$

Protože $\frac{\partial^2 \phi}{\partial d_k^2} = 2\|\varphi_k\|_2^2 > 0, \ \frac{\partial^2 \phi}{\partial d_k \, \partial d_j} = 0$, funkce ϕ nabývá minima pro $d_k = c_k$.

Z předcházejícího důkazu vyplývá, že

$$\begin{aligned}\phi(c_1, c_2, \ldots, c_n) &= \|f\|_2^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k(f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|_2^2 = \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|_2^2, \quad \text{neboť} \quad (f, \varphi_k) = c_k \|\varphi_k\|_2^2.\end{aligned}$$

Protože

$$\|f - s_n(x)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|_2^2 \geq 0,$$

pak pro každé $n = 1, 2, \ldots$ platí

$$\gamma_n \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|_2^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Posloupnost $\{\gamma_n\}$ je rostoucí a omezená, a proto řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|_2^2$ konverguje a platí tzv. *Besselova nerovnost*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|_2^2 \leq \|f\|_2^2,$$

z níž plyne

$$\lim_{k \to +\infty} c_k = 0\,.$$

Poznámka 11.10:

(i) Obsah věty (11.9) lze ilustrovat obrázkem, v němž s_n je ortogonálním průmětem funkce $f \in L_2$ do konečnědimenzionálního podprostoru určeného lineárně nezávislým systémem funkcí $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$.

(ii) Platí $(f - s_n, s_n) = 0$.

Věta 11.10 : Fourierova řada funkce $f \in L_2$ podle ortogonálního systému $\{\varphi_k\}$ konverguje silně k funkci f právě tehdy, když platí tzv. *Parsevalova rovnost*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Důkaz : vyplývá z důsledku věty (11.9), tj. ze vztahu

$$\|f - s_n(x)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|_2^2\,.$$

Funkce f je tedy silná limita (limita ve smyslu normy v L_2) posloupnosti $\{s_n(x)\}$.

Poznámka 11.11: Konverguje-li Fourierova řada funkce f vzhledem k úplnému systému stejnoměrně, pak konverguje silně, a platí tedy Parsevalova rovnost. Obrácené tvrzení už neplatí.

Poznámka 11.12: Řada $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|_2^2$ konverguje -viz důkaz věty (11.9). Protože

$$\|s_{n+p}(x) - s_n(x)\|_2^2 = \| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \varphi_k \|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 \|\varphi_k\|_2^2 ,$$

potom posloupnost $\{s_n(x)\}$, a tedy i řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ konverguje. Není-li splněna Parsevalova rovnost, pak obecně $\{s_n(x)\}$ nekonverguje k funkci f, ale k nějaké funkci

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) ,$$

a platí pouze $(f - s, \varphi_k) = 0,\ k = 1, 2, 3, \ldots$, a nikoliv $f = s$.

Poznámka 11.13:

(i) Splnění Parsevalovy rovnosti je ekvivalentní požadavku, aby neexistovala nenulová funkce, která by byla ortogonální ke všem funkcím $\varphi_k,\ k = 1, 2, \ldots$.

(ii) Ortogonální systém $\{\varphi_k\}$ je *uzavřený v* L_2, když neexistuje nenulová funkce, která by byla ortogonální ke všem funkcím systému.

(iii) Ortogonální systém $\{\varphi_k\}$ je *úplný*, právě když platí aspoň jedna podmínka:

  a) příslušná Fourierova řada funkce f konverguje (silně) k funkci f,

  b) platí Parsevalova rovnost.

(iv) Když systém $\{\varphi_k\}$ je úplný, pak je uzavřený.

(v) Systém sinů $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ je ortogonálním systémem na $\langle -\pi, \pi \rangle$, nikoliv však uzavřeném. Součet Fourierovy řady funkce f podle neuzavřeného systému obecně není roven funkci f.

Příklad 11.20 : Fourierova metoda řešení okrajové úlohy.

Fourierovy řady se uplatňuji v celé řadě aplikací. Jsou například velmi užitečným nástrojem řešení okrajových úloh (tzv. Fourierova metoda), dále se pak využívají v numerické matematice (problém minimalizace chyby aproximace). V neposlední řadě se o teorii Fourierových řad opírá teoreticky i prakticky důležitá Galerkinova metoda.

Mějme okrajovou úlohu

$$-y'' = x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad x \in (0,1).$$

1. krok: Určíme vlastní čísla a vlastní funkce pomocné okrajové úlohy

$$-v'' = \lambda v, \quad v(0) = 0, \quad v(1) = 0.$$

Dostaneme systém vlastních funkcí

$$v_k(x) = \sin k\pi x \quad (\text{ ortogonálních na } \langle 0,1\rangle)$$

a jim odpovídající vlastní čísla $\lambda_k = (k\pi)^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

2. krok: Vyjádříme pravou stranu rovnice ve tvaru Fourierovy řady podle získaného ortogonálního systému vlastních funkcí.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\pi x, \quad c_k = 2\int_0^1 x \sin k\pi x \, dx = \begin{cases} \frac{1}{k\pi}, & k \text{ liché}, \\ -\frac{1}{k\pi}, & k \text{ sudé}. \end{cases}$$

3. krok: Řešení $y(x)$ hledáme ve tvaru řady

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin k\pi x.$$

Za předpokladu, že lze řadu derivovat (dvakrát), dosadíme do rovnice (okrajové podmínky jsou splněny)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 d_k \sin k\pi x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\pi x.$$

Odtud

$$d_k = \frac{c_k}{(k\pi)^2} = \begin{matrix} \frac{1}{(k\pi)^3}, & \text{k}lich, \\ -\frac{1}{(k\pi)^3}, & \text{k}sud. \end{matrix}$$

Takže funkce

$$y(x) = \frac{1}{\pi^3}\left(\frac{\sin \pi x}{1^3} - \frac{\sin 2\pi x}{2^3} + \frac{\sin 3\pi x}{3^3} - \frac{\sin 4\pi x}{4^3} + \ldots\right)$$

je řešením dané okrajové úlohy.

12 Skalární funkce více reálných proměnných

12.1 Prostor $\mathbb{R}^\mathbf{n}$

Symbolem $\mathbb{R}^n$ označujeme **množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel**, tj. $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]\}$, $x_i \in \mathbb{R}$. Množinu $\mathbb{R}^n$ chápeme buď jako množinu bodů, nebo jako **vektorový prostor**, pokud v této množině zavedeme algebraické operace splňující axiómy lineárního prostoru. Vektory značíme $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, čísla x_i, $i = 1, \dots, n$ se nazývají **složky (souřadnice)** vektoru (bodu).

Vektorový prostor, v němž je definován skalární součin se nazývá **eukleidovský prostor**. Pro skalární součin se také používá značení $(\vec{x}, \vec{y})$.

Definice 12.1 : Nechť $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, potom pomocí následujících vztahů definujeme

1. **skalární součin** vektorů $\vec{x}, \vec{y}$
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,,$$
2. **normu vektoru** $\vec{x}$
$$\|\vec{x}\,\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}\,,$$
3. **vzdálenost** bodů $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ("délka vektoru $\vec{x} - \vec{y}$ ")
$$\rho(\vec{x}, \vec{y}\,) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,.$$

Z uvedených definic bezprostředně plyne:

1. Pro libovolné $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

   a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}\,,$

   b) $(\vec{x} + \vec{y}\,) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}\,,$

   c) $(\alpha \vec{x}\,) \cdot \vec{y} = \alpha \vec{x} \cdot \vec{y}$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}\,,$

   d) $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$ pro $\vec{x} \neq \vec{0}\,.$

Vektor $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ se nazývá **nulový vektor**.

2. Pro libovolné $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí:

   a) $\|\vec{x}\,\| > 0$ pro $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\|\vec{0}\,\| = 0\,,$

   b) $\|\alpha \vec{x}\,\| = |\alpha|\, \|\vec{x}\,\|$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}\,,$

   c) $\|\vec{x} + \vec{y}\,\| \leq \|\vec{x}\,\| + \|\vec{y}\,\|$ (trojúhelníková nerovnost).

3. Pro libovolné $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ platí:

   a) $\rho(\vec{x}, \vec{y}\,) \geq 0\,; \quad \rho(\vec{x}, \vec{y}\,) = 0$, právě když $\vec{x} = \vec{y}$,

   b) $\rho(\vec{x}, \vec{y}\,) = \rho(\vec{y}, \vec{x}\,)$,

   c) $\rho(\vec{x}, \vec{z}\,) \leq \rho(\vec{x}, \vec{y}\,) + \rho(\vec{y}, \vec{z}\,)$.

4. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí Cauchyova-Schwarzova nerovnost

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}\,| \leq \|\vec{x}\,\| \cdot \|\vec{y}\,\|$$

tj.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

5. Pro nenulové $\vec{x}, \vec{y}$ existuje číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, které se nazývá **úhlem vektorů** $\vec{x}, \vec{y}$, takové, že

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\,\| \cdot \|\vec{y}\,\|}\,,$$

neboť $|\vec{x} \cdot \vec{y}\,| \leq \|\vec{x}\,\| \cdot \|\vec{y}\,\| \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\,\|\cdot\|\vec{y}\,\|} \leq 1$ a odtud vyplývá $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\,\| \cdot \|\vec{y}\,\| \cos\varphi$ pro jisté $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$.

<u>*Cvičení 12.1*</u> : Dokažte ekvivalenci trojúhelníkové nerovnosti a Schwarzovy nerovnosti.

[$\|\vec{x}\,\|^2 + 2\|\vec{x}\,\|\,\|\vec{y}\,\| + \|\vec{y}\,\|^2 = (\|\vec{x}\,\| + \|\vec{y}\,\|)^2 \geq \|\vec{x} + \vec{y}\,\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}\,) = (\vec{x}, \vec{x}\,) + (\vec{x}, \vec{y}\,) + (\vec{y}, \vec{x}\,) + (\vec{y}, \vec{y}\,) = \|\vec{x}\,\|^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}\,) + \|\vec{y}\,\|^2 \Leftrightarrow \|\vec{x}\,\|\,\|\vec{y}\,\| \geq |(\vec{x}, \vec{y}\,)|$.]

Z geometrického pohledu je okolí bodu vlastně koule, jejíž povrch je tvořen **sférou** $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon\}$. Podobně nazýváme **kvádrem** množinu $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i;\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$.

Jestliže nadefinujeme otevřené množiny, potom hovoříme o topologii daného prostoru.

Definice 12.2 : (okolí, otevřená množina v $\mathbb{R}^n$)
Množinu $U(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$ nazveme **okolí bodu** $\mathbf{x}_0$.
Množinu $P(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$ nazveme **prstencové okolí bodu** $\mathbf{x}_0$.
Řekneme, že bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ je **vnitřním bodem** množiny Ω, jestliže existuje okolí $U_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ takové, že $U_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$.
Množinu vnitřních bodů množiny Ω značíme $\operatorname{int}\Omega$ a nazýváme **vnitřkem** množiny Ω.
Množina Ω se nazývá **otevřená**, když $\Omega = \operatorname{int}\Omega$ (je tvořena pouze vnitřními body).
Množina Ω se nazývá **souvislá**, jestliže její libovolné dva body lze spojit křivkou a Ω je **oblast**, jestliže je otevřená a souvislá.

Okolí hromadného bodu obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny Ω.
Kolem izolovaného bodu existuje okolí, které celé neleží v Ω.
Část okolí hraničního bodu leží v množině, část vně množiny Ω.

Uzavřená množina se rovná svému uzávěru, obsahuje svou hranici.

Definice 12.3 : (uzavřená množina)
Bod $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se nazývá **hromadný bod** množiny Ω, jestliže každé jeho prstencové okolí $P(\mathbf{x}_0)$ obsahuje alespoň jeden bod $\mathbf{x} \in \Omega$.
Takový bod množiny Ω, který není hromadným bodem se nazývá **izolovaný bod**.
Bod $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ je hraničním bodem Ω, když každé jeho okolí $U(\mathbf{x}_0)$ obsahuje jak body $\mathbf{x} \in \Omega$, tak body $\mathbf{y} \notin \Omega$.
Hranice množiny Ω je tvořena jejími hraničními body. Značíme ji $\partial\Omega$.
Uzávěr množiny Ω je množina $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.
Řekneme, že množina Ω je **uzavřená**, jestliže $\Omega = \overline{\Omega}$.
Řekneme, že množina Ω je **omezená**, jestliže
$\exists\, K \in \mathbb{R}\ \forall\, \mathbf{x} \in \Omega: \ \|\mathbf{x}\| < K$.

Definice 12.4 : (posloupnost v $\mathbb{R}^n$)
Zobrazení $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ přiřazující každému $k \in \mathbb{N}$ bod (vektor) $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **posloupnost (bodů, vektorů)** v $\mathbb{R}^n$. Značíme $f = \{\mathbf{x}_k\}$.

Protože máme eukleidovský vektorový prostor $\mathbb{R}^n$, hovoříme o konvergenci vzhledem k eukleidovské normě. Analogicky definujeme konvergenci vzhledem k jiné normě či jiné metrice.

Definice 12.5 : (konvergentní posloupnost)
Posloupnost $\{\mathbf{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ je **konvergentní** v $\mathbb{R}^n$, jestliže

$$\exists\, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N}: k > k_0 \ \Rightarrow\ \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon .$$

Píšeme $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$, resp. $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$ pro $k \to +\infty$.

Věta 12.1 : (konvergence po složkách)
Posloupnost $\{\mathbf{x}_k\}$ je konvergentní v $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když posloupnosti všech složek $\{x_{ki}\}$ jsou konvergentní v $\mathbb{R}$, tj.

$$\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{ki} \to x_{0i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

<u>Důkaz</u> : plyne ze vztahů

$$|x_{ki} - x_{0i}| \le \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - x_{0i})^2} .$$

Poznamenejme, že uzavřená množina obsahuje limity všech konvergentních posloupností prvků této množiny, tj. platí: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená ($\Omega = \overline{\Omega}$) právě tehdy, když každá konvergentní posloupnost prvků z Ω má limitu v Ω.

12.2 Základní vlastnosti funkcí v $\mathbb{R}^n$

Definice 12.6 : (funkce n-proměnných)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zobrazení $f : \Omega \to \mathbb{R}$ přiřazující každému **argumentu $\mathbf{x} \in \Omega$ funkční hodnotu** $f(\mathbf{x})$ se nazývá **reálná funkce n reálných proměnných** definovaná na Ω.
Značíme $f : \mathbf{x} \to f(\mathbf{x})$, $f = f(\mathbf{x})$. ,
Množina

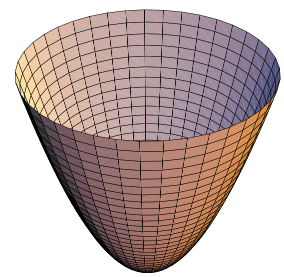
$$G = \{[\mathbf{x}, f(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \mathbf{x} \in \Omega\}$$

se nazývá **graf funkce** f.
Množina

$$H_C = \{\mathbf{x} \in \Omega : \ f(\mathbf{x}) = C\}\,, \ C \in \mathbb{R}\,,$$

se nazývá **hladina (vrstevnice) funkce** f. (Je to množina bodů definičního oboru, v nichž funkce f nabývá stejné funkční hodnoty).

Definičním oborem $D(f)$ funkce f je tedy množina Ω.



<u>*Příklad 12.1*</u> : Grafem funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ je *paraboloid* a její hladiny jsou kružnice o poloměru $\sqrt{C}$.

Definice 12.7 : (limita funkce n-proměnných)
Nechť je dána funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a nechť $\mathbf{x}_0$ je hromadný bod množiny Ω. Jestliže $\exists L \in \mathbb{R}$ takové, že

1. $\forall \{\mathbf{x}_k\},\ \mathbf{x}_k \in \Omega,\ \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0 : \ \ \mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0 \ \Rightarrow \ f(\mathbf{x}_k) \to L$,
2. $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0\, \forall \mathbf{x} \in \Omega,\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$,
3. $\forall\, U(L) \subset \mathbb{R}\ \exists\, P(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R} : \ \ f(\Omega \cap P(\mathbf{x}_0)) \subset U(L)$,

pak řekneme, že funkce f má v bodě $\mathbf{x}_0$ limitu L (vlastní) a píšeme

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L\,.$$

Jednotlivé podmínky v definici limity jsou ekvivalentní.
Také se nazývají Heineho, Cauchyho, popř. topologická definice limity.

<u>*Cvičení 12.2*</u> : Modifikujte Cauchyho definici limity pro

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{\mathbf{x} \to \infty} f(\mathbf{x}) = L\,.$$

[$\forall K > 0\, \exists \delta(K) > 0\, \forall \mathbf{x} \in \Omega,\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) > K$,
$\forall \varepsilon > 0\, \exists K > 0\, \forall \mathbf{x} \in \Omega,\ \|\mathbf{x}\| > K \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$,]

Příklad 12.2 :

Vypočítáme limitu funkce $f(x,y) = x^3 - y^3$ v bodě $[1,2]$.

Nechť $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ jsou libovolné posloupnosti reálných čísel takové, že $x_k \to 1$ a $y_k \to 2$.

Pak $x_k^3 \to 1$, $y_k^3 \to 8 \Rightarrow f(x_k,y_k) = x_k^3 - y_k^3 \to 1 - 8 = -7$.
Tedy $\lim\limits_{[x,y]\to[1,2])} (x^3 - y^3) = -7$.

Příklad 12.3 : Stanovme $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{y}{x}$.

Zvolíme posloupnost $\{x_k, y_k\} = \{\frac{1}{k}, \frac{c}{k}\}$, $c \in \mathbb{R}$, pak dostaneme $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\frac{c}{k}}{\frac{1}{k}} = c$. Vidíme, že daná funkce nemá v bodě $[0,0]$ limitu.

(Číslo c můžeme volit libovolně, tedy neexistuje jediné číslo L, ke kterému se blíží funkční hodnoty funkce f.)

Věta 12.2 : (jednoznačnost limity, algebra limit)

1. Má-li funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ limitu (vlastní), je tato limita jediná.
2. Existují-li $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L_f$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = L_g$, potom platí $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x}) = L_f \pm L_g$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = L_f \cdot L_g$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{L_f}{L_g}$, $L_g \neq 0$.

Důkaz : Analogicky jako u funkcí jedné proměnné.

Definice 12.8 : (částečné limity, vícenásobné limity v $\mathbb{R}^2$)
Mějme funkci $f = f(x,y)$ definovanou v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Existuje-li pro každé pevné y

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y),$$

nazývá se **částečná (parciální) limita** funkce f v proměnné x. Existuje-li

$$L_1 = \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

nazývá se **dvojnásobnou limitou** funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.
Analogicky definujeme pro pevné x

$$\psi(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y) \quad \text{a} \quad L_2 = \lim_{x\to x_0} \psi(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

Příklad 12.4 : Pro funkci $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ najdeme dvojnásobné limity v bodě $[0,0]$.

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0\,.$$

Limitu funkce f budeme hledat "po přímkách" $y = kx$, potom

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{k^2x^2+x^2} = \frac{k}{k^2+1}\,,$$

tudíž hledaná limita neexistuje.

Příklad 12.5 : Hledáme limity funkce f, kde

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} & x\neq 0,\ y\neq 0,\\ 0 & x=0,\ y=0\,,\end{cases}$$

v okolí bodu $[0,0]$.

Z odhadu $\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|+|y|$ plyne $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)=0$, ale limity $\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$, $\lim\limits_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}$ neexistují, tudíž neexistují ani dvojnásobné limity.

Existence a rovnost dvojnásobných limit nezaručí existenci limity funkce v bodě a obráceně z existence limity nevyplývá existence dvojnásobných limit.
Přesto, jestliže existuje (dvojná) limita a "vnitřní limity", pak existují dvojnásobné limity.

Věta 12.3 : (vztah dvojné a dvojnásobných limit)
Nechť funkce $f = f(x,y)$ je definovaná (aspoň) v prstencovém okolí $P([x_0,y_0])$ bodu $[x_0,y_0]$ a existuje limita

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L.$$

Nechť dále existují částečné limity

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y), \quad [x_0,y]\in P([x_0,y_0]),$$

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \psi(x), \quad [x,y_0]\in P([x_0,y_0]).$$

Potom existují dvojnásobné limity

$$L_1 = \lim_{y\to y_0}\varphi(y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

$$L_2 = \lim_{x\to x_0}\psi(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

a platí $L_1 = L_2 = L$. (Tedy existence $L, \varphi(x), \psi(x)$ je postačující podmínkou pro existenci L_1, L_2 a jejich rovnost L.)

Důkaz : Je založen na skutečnosti, že za uvedených předpokladů pro dostatečně malé δ a body $[x, y]$ splňující $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ platí $|\varphi(y) - f(x, y)| < \varepsilon_1$ a $|f(x, y) - L| < \varepsilon_2$. Odtud dostaneme $|\varphi(y) - L| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Funkce f je spojitá, když pro každou posloupnost $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$, posloupnost funkčních hodnot $\{f(\mathbf{x}_k)\}$ konverguje k číslu $f(\mathbf{x}_0)$. V izolovaném bodě $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ se funkce f považuje za spojitou, je-li v tomto bodě definovaná.
Jestliže v bodě nespojitosti existuje vlastní limita funkce f, pak říkáme, že nespojitost je odstranitelná.

Definice 12.9 : (Spojitost)
Funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je **spojitá** v hromadném bodě $\mathbf{x}_0$ množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jestliže

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Funkce f je **spojitá na množině** Ω, je-li spojitá v každém bodě $\mathbf{x} \in \Omega$. Bod $\mathbf{x}_0$ je **bodem nespojitosti** funkce, není-li v něm funkce f spojitá.

Věta 12.4 : (vlastnosti spojitých funkcí)

1. Součet, rozdíl, součin, podíl (vyjma nulových bodů jmenovatele) spojitých funkcí je funkce spojitá.

2. Je-li f definovaná v nějakém okolí $\mathbf{x}_0$, spojitá v bodě $\mathbf{x}_0$ a $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, potom existuje okolí $U(\mathbf{x}_0)$ bodu $\mathbf{x}_0$, v němž

$$\operatorname{sgn} f(\mathbf{x}) = \operatorname{sgn} f(\mathbf{x}_0) \ , \quad \forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \ .$$

3. (O mezihodnotě). Je-li f spojitá na souvislé množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a když pro $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ je $f(\mathbf{x}_1) \neq f(\mathbf{x}_2)$, potom pro každé číslo $\overline{y}$ ležící mezi čísly $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)$ existuje aspoň jedno $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ takové, že $f(\mathbf{x}_0) = \overline{y}$.

4. (Weierstrass). Je-li funkce f spojitá na **kompaktní** (tzn. omezené a uzavřené) množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, potom je na Ω omezená a existují body $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_M \in \Omega$ takové, že

$$f(\mathbf{x}_m) = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x}) \ ; \quad f(\mathbf{x}_M) = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x})$$

(těmto číslům se říká minimum, resp. maximum funkce na množině Ω).

5. Je-li funkce f spojitá na kompaktní množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, potom je na Ω stejnoměrně spojitá, tj. pro každé dvě posloupnosti $\{\mathbf{x}_m\}, \{\mathbf{x}_k\}$ z Ω takové, že $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k\| \to 0$, platí $|f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_k)| \to 0$.

<u>*Příklad 12.6*</u> :

1. Funkce $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ je spojitá v každém bodě $[x,y] \neq (0,0)$, ale v bodě $(0,0)$ spojitá není, a navíc nespojitost není odstranitelná.

2. Funkce $f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} & xy \neq 0\,, \\ 0 & xy = 0\,, \end{cases}$

   je spojitá v bodě $[0,0]$, avšak v každém okolí tohoto bodu existují body nespojitosti (body souřadnicových os).

3. Funkce $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0\,, \\ 0 & x^2+y^2 = 0\,, \end{cases}$

   je spojitá v bodě $[0,0]$, což dokážeme přechodem k polárním souřadnicím. Položíme $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, potom
   $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{r\to 0\\ \varphi\in\langle 0,2\pi)}} \frac{r^3\cos\varphi(\sin\varphi)^2}{r^2} = 0\,.$

12.3 Derivace a diferenciál

Definice 12.10 : (derivace podle vektoru, parciální derivace)
Mějme funkci $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ a existuje okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$.
Je dán (pevný) vektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s})|_{t=0} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{s}}\,,$$

pak se nazývá **derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ podle vektoru $\vec{\mathbf{s}}$** (nebo také **variace funkce** f v bodě $\mathbf{x}_0$) ,
je-li $\vec{s}$ jednotkový vektor, tj. $\|\vec{s}\| = 1$, pak se tato limita nazývá **derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ ve směru $\vec{\mathbf{s}}$.**
Jestliže $\vec{s} = \vec{e}_i$ (jednotkový vektor ve směru osy x_i), potom

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{e}_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$$

a hovoříme o **parciální derivaci funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ podle $\mathbf{x}_i$** a funkce f se nazývá **derivovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$ podle proměnné $\mathbf{x}_i$**.

Příklad 12.7: Uvažujeme funkci $f(x,y) = xy^2$, vektor $\vec{s} = (s_1, s_2) = (1,2)$ a bod $[x_0, y_0] = [1,1]$. Potom dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{s}} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+ts_1,y_0+ts_2)-f(x_0,y_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)(1+t\cdot 2)^2-1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1+4t+4t^2+t+4t^2+4t^3-1}{t} = 5\,, \\
\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{e}_1} = \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t\cdot 1,1+t\cdot 0)-f(1,1)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)(1+t\cdot 0)^2-1}{t} = 1\,, \\
\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{e}_2} = \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t\cdot 0,1+t\cdot 1)-f(1,1)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t\cdot 0)(1+t\cdot 1)^2-1}{t} = 2\,.
\end{aligned}$$

Z definice (12.10) pro funkci dvou proměnných plyne

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}\,, \qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}\,.$$

Obecně platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_{01},\ldots,x_{0i}+t\,,\ x_{0i+1},\ldots,x_{0n}) - f(x_{01},\ldots,x_{0n})}{t}\,.$$

Z uvedených vztahů vyplývá, že parciální derivace počítáme derivováním podle příslušné proměnné (ostatní proměnné se chovají jako konstanty). Například

$$\frac{\partial (xy^2)}{\partial x} = y^2\,, \qquad \frac{\partial (xy^2)}{\partial y} = 2xy\,.$$

Geometrický význam derivace ve směru

Máme funkci $f:\Omega \to \mathbb{R}$, vnitřní bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, vektor $\vec{s}$ s jednotkovou normou $\|\vec{s}\| = 1$ a úsečku $p:\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\vec{s}$, $t \in I$, $I = (-\delta,\delta)$, $\delta > 0$, $p \subset \Omega$.

Položíme $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s})$, potom graf funkce $g : I \to \mathbb{R}$ je dán průnikem grafu funkce f a roviny ϱ, která obsahuje úsečku p a je kolmá k rovině-xy.

Platí

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{s}}\,.$$

Hodnota derivace funkce f ve směru $\vec{s}$ je tudíž rovna směrnici tečny $\tau \in \varrho$ ke grafu funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$. Tato směrnice se rovná tangens úhlu tečny τ a přímky p (prodloužení úsečky p).

Definice 12.11 : (diference, totální diferenciál)
Je dán vnitřní bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pro libovolné $\mathbf{x} \in \Omega$ označíme $\vec{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Vektor $\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ $(= \Delta\mathbf{x} = d\mathbf{x}\,,\ h_i = dx_i)$ nazveme **diferencí argumentu**.

1. Funkci proměnné $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$
$$\Delta f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$
nazveme **diferencí funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ vzhledem k $\vec{\mathbf{h}}$** (tzv. **totální diference**).

2. Funkce f se nazývá **diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$**, existuje-li okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$, vektor $\vec{A} = (A_1, A_2, \ldots A_n)$, a funkce $\omega(\vec{h})$ (proměnné $\vec{h}$) splňující podmínku
$$\lim_{\|\vec{h}\| \to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$
tak, že $\forall\, \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$ platí
$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \vec{A} \cdot \vec{h} + \omega(\vec{h})\,.$$
Funkce f je **diferencovatelná na** Ω, je-li diferencovatelná v každém bodě $\mathbf{x} \in \Omega$.

3. U diferencovatelné funkce se lineární forma $\vec{A} \cdot \vec{h}$ nazývá **(totálním) diferenciálem** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ a značí se
$$df = df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \vec{A} \cdot \vec{h}\,, \quad \vec{h} \in \mathbb{R}^n$$
a vektor $\vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ se nazývá **totální derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$** nebo také **gradient** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$. Užívá se označení
$$\vec{A} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{x}_0)\,.$$
Diferenciál pak zapisujeme ve tvaru
$$df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{h} = \nabla f(\mathbf{x}_0)\, \vec{h} = f'(\mathbf{x}_0)\, d\mathbf{x}\,.$$

<u>*Příklad 12.8*</u> : Určíme diferenciál funkce $f(x, y) = xy^2$ v bodě $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$. Platí

$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) =$
$(x_0 + h_1)(y_0 + h_2)^2 - x_0 y_0^2 = y_0^2 h_1 + 2x_0 y_0 h_2 + 2y_0 h_1 h_2 + x_0 h_2^2 + h_1 h_2^2.$

Odtud $A_1 = y_0^2$, $A_2 = 2x_0y_0$, $\omega(\vec{h}) = 2y_0h_1h_2 + x_0h_2^2 + h_1h_2^2$.
Zbývá dokázat $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$, tedy $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{2y_0h_1h_2+x_0h_2^2+h_1h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$

$$\begin{bmatrix} h_1 = r\cos\varphi \\ h_2 = r\sin\varphi \end{bmatrix} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi\in\langle 0,2\pi)}} \frac{2y_0r^2\cos\varphi\sin\varphi + x_0r^2\sin^2\varphi + r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r} = 0.$$

Diferenciál funkce $f = xy^2$ v bodě $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$ má tvar $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = (y_0^2, 2x_0y_0)\cdot\vec{h} = y_0^2h_1 + 2x_0y_0h_2$.

12.4 Vlastnosti diferencovatelných funkcí

Věta 12.5 : (vlastnosti diferencovatelné funkce)
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, potom

1. je v bodě $\mathbf{x}_0$ spojitá,
2. existuje v bodě $\mathbf{x}_0$ derivace funkce f podle libovolného vektoru $\vec{s}$ (tedy existují i všechny parciální derivace) a platí
$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial\vec{s}} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot\vec{s},$$
3. pokud v $\mathbb{R}^n$ uvažujeme kartézský souřadnicový systém a za bázi volíme jednotkové vektory ve směru os systému, pak
$$A_i = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}, \quad \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{\mathbf{x}_0}.$$

Pro funkci $f(x,y) = xy^2$, bod $[x_0, y_0] = [1,1]$ a směr $\vec{s} = (1,2)$ z příkladu (12.7) máme $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial\vec{s}} = (y_0^2, 2x_0y_0)\cdot\vec{s} = (1,2)\cdot(1,2) = 5$.

Gradient výše uvedené funkce má v kartézském systému tvar $\operatorname{grad} f = (y^2, 2xy)$.

Důkaz :

1. Na okolí $U(\mathbf{x}_0)$ bodu $\mathbf{x}_0$ platí podle předpokladu $f(\mathbf{x}_0+\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot\vec{h} + \omega(\vec{h})$ a pro $\|\vec{h}\| \to 0$ je $\frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} \to 0 \Rightarrow \omega(\vec{h}) \to 0$, pak také $f(\mathbf{x}_0+\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) \to 0$, tedy funkce f je spojitá v bodě $\mathbf{x}_0$.
2. Nyní volíme $\vec{h} = t\vec{s}$, pak platí $f(\mathbf{x}+t\vec{s}) - f(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x})\cdot t\vec{s} + \omega(t\vec{s})$, kde $\frac{\omega(t\vec{s})}{\|t\vec{s}\|} \to 0 \Rightarrow \frac{\omega(t\vec{s})}{t} \to 0$.
Odtud plyne $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial\vec{s}} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0+t\vec{s}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot\vec{s}$.
3. Pouze v kartézském souřadnicovém systému, tj. ve standardní bázi $\mathbb{R}^n$, je $\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + \ldots + A_n\vec{e}_n$, tedy
$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial\vec{e}_i} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot\vec{e}_i = (A_1, \ldots, A_n)\cdot\vec{e}_i = A_i.$$

Důsledek 12.1: věty (12.5) Diferenciál funkce f v bodě $\mathbf{x}$ (v kartézském souřadnicovém vyjádření) můžeme psát ve tvaru

$$df(\mathbf{x},\vec{h}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}dx_n\,, \quad \vec{h} = d\mathbf{x}\,.$$

Například diferenciál funkce $f(x,y) = xy^2$ má tvar

$$df(\mathbf{x},(dx,dy)) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x}dx + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y}dy = y^2\,dx + 2xy\,dy\,.$$

Příklad 12.9: Uvedeme funkci, která má v bodě $[0,0]$ parciální derivace, ale není v tomto bodě spojitá:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0\,, & xy = 0\,. \\ 1\,, & xy \neq 0\,. \end{cases}$$

Potom $\lim\limits_{[x,y]\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje, avšak existují limity

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{f(0+h_1,0) - f(0,0)}{h_1} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0\,,$$

$$\lim_{h_2\to 0} \frac{f(0,0+h_2) - f(0,0)}{h_2} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0\,.$$

Příklad 12.10: Funkce, která má parciální derivace v celém $\mathbb{R}^2$, ale je v bodě $[0,0]$ nespojitá:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}\,, & x^2+y^2 > 0\,, \\ 0\,, & x^2+y^2 = 0\,. \end{cases}$$

Podobně jako v předcházejícím příkladě z definice vypočteme
$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0\,,\ f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\,;$ avšak $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$ neexistuje, neboť $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}\,.$

Příklad 12.11: Funkce, která má parciální derivace v celém $\mathbb{R}^2$, je spojitá v $\mathbb{R}^2$ (viz příklad (12.6),3.), ale není diferencovatelná v bodě $[0,0]$:

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Potom platí

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = f_x(0,0) = 0\,, \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = f_y(0,0) = 0$$

(na osách je funkce f nulová).
Pokud by funkce f byla diferencovatelná v počátku, pak pro vektor $\vec{h}$ s dostatečně malou normou musí platit

$f([0,0] + (h_1,h_2)) - f(0,0) = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2+h_2^2} = \omega(\vec{h})$

a $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0\,.$

Avšak limita $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \lim\limits_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \frac{h_1h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,(h_1^2+h_2^2)}$ neexistuje, tedy funkce f není diferencovatelná v počátku.

Na příkladech jsme ukázali, že existence parciálních derivací není v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ekvivalentní diferencovatelnosti. Ekvivalence je platná pouze v $\mathbb{R}$ (věta 7.2, MA I).

Věta 12.6 : (postačující podmínka diferencovatelnosti)
Nechť funkce f má v okolí $U(\mathbf{x}_0)$ bodu $\mathbf{x}_0$ parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Jsou-li tyto parciální derivace spojité v bodě $\mathbf{x}_0$, potom je funkce f diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$.

Důkaz : Pro jednoduchost se omezíme na funkci dvou proměnných, tedy $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$. Volíme vektor $\vec{h}$ tak, aby $\mathbf{x}_0 + \vec{h} \in U(\mathbf{x}_0)$, potom funkce $f(x, y_0)$ proměnné x je spojitá na intervalu $\langle x_0, x_0 + h_1\rangle$ a derivovatelná na intervalu $(x_0, x_0 + h_1)$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (věta 7.7, MA I) potom $\exists\, \vartheta_1 \in (0,1)$ takové, že platí

$$f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0 + \vartheta_1 h_1, y_0)h_1\,,$$

a podobně $\exists\, \vartheta_2 \in (0,1)$ takové, že platí

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0+h_1, y_0) = f'_y(x_0+h_1, y_0+\vartheta_2 h_2)h_2\,.$$

Pro diferenci $\Delta f(x_0, y_0, h_1, h_2) = \Delta f$ funkce f tedy máme

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0)\\ &= f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0+h_1, y_0) + f(x_0+h_1, y_0) - f(x_0, y_0)\\ &= f'_y(x_0 + h_1, y_0 + \vartheta_2 h_2)h_2 + f'_x(x_0 + \vartheta_1 h_1, y_0)h_1\,.\end{aligned}$$

Označíme-li

$$\begin{aligned}\omega_1(h_1, h_2) &= f'_x(x_0 + \vartheta_1 h_1, y_0) - f'_x(x_0, y_0),\\ \omega_2(h_1, h_2) &= f'_y(x_0 + h_1, y_0 + \vartheta_2 h_2) - f'_y(x_0, y_0)\,,\end{aligned}$$

pak diferenci Δf můžeme psát ve tvaru

$$\Delta f = f'_x(x_0, y_0)h_1 + f'_y(x_0, y_0)h_2 + \underbrace{\omega_1 h_1 + \omega_2 h_2}_{\omega(\vec{h})} .$$

Zbývá dokázat rovnost $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$. Platí

$\left|\frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}\right| = \left|\frac{\omega_1 h_1 + \omega_2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right| \le |\omega_1 + \omega_2| \le |f'_x(x_0 + \vartheta_1 h_1, y_0) - f'_x(x_0, y_0)| + |f'_y(x_0 + h_1, y_0 + \vartheta_2 h_2) - f'_y(x_0, y_0)| \to 0$,

kde platnost limitního přechodu pro $\|\vec{h}\| \to 0$ vyplývá ze spojitosti parciálních derivací v bodě $[x_0, y_0]$.

Tedy funkce f je v bodě $[x_0, y_0]$ diferencovatelná.

Pozor, obrácené tvrzení k větě (12.6) neplatí. Funkce $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ je diferencovatelná v počátku, její parciální derivace podle x však zde není spojitá.

Věta 12.7 : (algebra diferenciálu a gradientu)
Nechť funkce f, g jsou diferencovatelné na množině Ω a pro body $\mathbf{x} \in \Omega$ označíme $df = df(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$, $dg = dg(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \operatorname{grad} g(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$, potom na Ω platí

$$\begin{aligned}
&d(cf) = c\,df , && \operatorname{grad}(cf) = c \operatorname{grad} f , \\
&d(f \pm g) = df \pm dg , && \operatorname{grad}(f \pm g) = \operatorname{grad} f \pm \operatorname{grad} g , \\
&d(fg) = g\,df + f\,dg , && \operatorname{grad}(fg) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g , \\
&d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2} , && \operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g}{g^2} , \quad g(\mathbf{x}) \ne 0 .
\end{aligned}$$

<u>Důkaz</u> : Je podobný jako u funkcí jedné proměnné. (MA1, věta 7.3)

Věta 12.8 : (diferenciál a derivace složené funkce)
Nechť funkce $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ jsou diferencovatelné v bodě $[x_0, y_0]$ a funkce $f(u, v)$ je diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0]$, kde $u_0 = u[x_0, y_0]$, $v_0 = v[x_0, y_0]$. Potom složená funkce $f(u[x, y], v[x, y])$ je diferencovatelná v $[x_0, y_0]$ a platí (v bodě $[x_0, y_0]$)

$$\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial u}\, du + \frac{\partial f}{\partial v}\, dv \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial x}} dx + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial y}} dy .
\end{aligned}$$

Celou větu (12.8) lze formulovat a dokázat pro složenou funkci $f(\vec{u}(\mathbf{x})) = f(u_1, \ldots, u_m)$. Potom
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} .$$

Také hovoříme o "řetězovém pravidlu".

<u>*Příklad 12.12*</u>: Funkce $u(x,y) = -2xy$, $v(x,y) = x + y$ jsou diferencovatelné na $\mathbb{R}^2$ a funkce $f(u,v) = u + v^2$ je také diferencovatelná na $\mathbb{R}^2$.

Pro diferenciál složené funkce $f(u(x,y), v(x,y))$ tedy na $\mathbb{R}^2$ platí

$$\begin{aligned} df &= 1\,du + 2v\,dv \\ &= 1\,[(-2y)\,dx - 2x\,dy] + 2(x+y)(dx+dy) \\ &= 2x\,dx + 2y\,dy\,. \end{aligned}$$

Zároveň $f(u(x,y), v(x,y)) = -2xy + (x+y)^2 = x^2 + y^2$, tedy $df = 2x\,dx + 2y\,dy$.

<u>*Příklad 12.13*</u>: (derivace paraboloidu podél kružnice)

Nechť $f(x,y) = x^2+y^2$ a $x(r,t) = r\cos t$, $y(r,t) = r\sin t$.

Potom $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{df}{dx}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{df}{dy}\dfrac{dy}{dt} = 2x(-r\sin t) + 2y(r\cos t) = 2r^2(-\cos t\sin t + \sin t\cos t) = 0$.

Věta 12.9 : (vlastnosti gradientu)
Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}$.

i) Položíme-li $\vec{z} = \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{x})}{\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|}$, tedy $\|\vec{z}\| = 1$, potom platí $\left|\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec{z}}\right| = \max\limits_{\|\vec{s}\|=1} \left|\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec{s}}\right|$, $\vec{s}$ je libovolný vektor (změna funkce ve směru gradientu je největší).

ii) Vektor $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) (\neq \vec{o})$ je kolmý k tečné varietě (přímka, rovina, ...) hladiny $H = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$ v bodě $\mathbf{x}_0$.

<u>Důkaz</u> :

i) Z věty (12.5) plyne $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec{s}} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \vec{s}$. Z Cauchy – Schwarzovy nerovnosti dostaneme pro $\|\vec{s}\| = 1$ vztah

$$\left|\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec{s}}\right| \le \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\| \cdot \|\vec{s}\| = \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|\,.$$

Zároveň pro vektor $\vec{z}$ platí

$$\left|\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec{z}}(\mathbf{x})\right| = \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\| \cdot \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{x})}{\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|} = \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|\,.$$

Odtud plyne první tvrzení věty.

Při přechodu k polárním souřadnicím $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ má jednotkový vektor ve "směru r" tvar $\vec{\tilde{e}}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ a pro jednotkový vektor ve "směru φ" platí $\vec{\tilde{e}}_2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$.

Matice přechodu M od báze $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ k bázi $\vec{\tilde{e}}_1, \vec{\tilde{e}}_2$ má tedy tvar $M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Nyní vyjádříme gradient funkce $f = f(x,y)$ v novém souřadném systému, tedy

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi, \frac{\partial f}{\partial x}(-\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi\right)$.

Zároveň z diferenciálu složené funkce plyne $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$ a $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos\varphi$.

Odtud vyplývá, že gradient funkce f v polárních souřadnicích má tvar

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right).$$

ii) Pro jednoduchost volíme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Hladinu $H = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = C)\}$ popíšeme parametricky $x = x(t), y = y(t)$. Tedy $f(x(t), y(t)) = C$. Funkci f budeme nyní derivovat podle proměnné t (podél hladiny H). Potom platí

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \operatorname{grad} f \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}\right) = 0\,.$$

Odtud je vidět, že tečný vektor $(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t})$ k hladině je kolmý ke $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Příklad 12.14: Máme k funkci $f(x, y) = x^3 - y^2$, bodu $B = [1, 2]$ a vektoru $\vec{v} = (3, 4)$ určit směr největšího růstu v bodě B a derivaci podle vektoru $\vec{v}$.

Směr největšího růstu funkce f v bodě B je dán vektorem $\operatorname{grad} f(1, 2) = (3x^2, -2y)_{[1,2]} = (3, -4)$.

Pro derivace podle vektoru $\vec{v}$ platí

$\frac{\partial f(1,2)}{\partial \vec{v}} = \operatorname{grad} f(1, 2) \cdot \vec{v} = (3, -4) \cdot (3, 4) = 0\,.$

Vidíme, že vektor $\vec{v} = (3, 4)$ je tečný vektor k hladině

$H = \{[x, y] : x^3 - y^2 = -7\}$ v bodě $B = [1, 2]$.

Definice 12.12 : (tečné lineární variety)

Graf lineární funkce $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$u(\mathbf{x}) = \vec{a}\cdot\mathbf{x} + d = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + d\,, \quad \text{kde } \vec{a} \in \mathbb{R}^n,\ d \in \mathbb{R}\,.$$

se nazývá **nadrovina** v $\mathbb{R}^{n+1}$ a prochází-li bodem $[\mathbf{x}_0, u_0]$, má rovnici

$$u - u_0 = \vec{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = a_1(x_1 - x_{01}) + \cdots + a_n(x_n - x_{0n})\,.$$

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \neq \vec{o}$, potom

1. **tečná nadrovina k hladině** $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$ funkce f procházející bodem $\mathbf{x}_0$ má rovnici
$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0\,.$$
2. **tečná nadrovina ke grafu funkce** $u = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ v bodě grafu $[\mathbf{x}_0, u_0] \in \mathbb{R}^{n+1}$, kde $u_0 = f(\mathbf{x}_0)$, je dána rovnicí
$$u - u_0 = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\,.$$

Libovolný vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ tečné nadroviny k hladině je kolmý k vektoru $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$.

Pro $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má tečná nadrovina k hladině (tj. přímka) tvar $f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0) = 0$ a tečná nadrovina ke grafu funkce (tj. rovina) má tvar $u - u_0 = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0)$.

<u>*Poznámka 12.1*</u>: Graf funkce $u = f(\mathbf{x})$ je vlastně nulovou hladinou funkce $g(\mathbf{x}, u) = f(\mathbf{x}) - u = 0$.
Tečná nadrovina k hladině funkce g v bodě $[\mathbf{x}_0, u_0]$ má tedy tvar $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}_0) \cdot ([\mathbf{x}, u] - [\mathbf{x}_0, u_0]) = 0$ a odtud dostaneme $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - 1(u - u_0) = 0$.

<u>*Příklad 12.15*</u>: Je dána funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Hladiny této funkce jsou kulové plochy, které leží v $\mathbb{R}^3$; graf funkce f leží v $\mathbb{R}^4$. Hladina procházející bodem $[x_0, y_0, z_0]$ má rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = u_0$, $\quad u_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$.

Tečná rovina k této hladině v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ má rovnici

$$a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0) = 0, \quad \vec{a} = \operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0),$$

tj.

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0.$$

Tečná nadrovina ke grafu této funkce leží v $\mathbb{R}^4$ a má rovnici

$$u - u_0 = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0).$$

<u>*Cvičení 12.3*</u>: Ke grafu funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v $\mathbb{R}^2$ určete rovnici tečné roviny (v $\mathbb{R}^3$) v bodě $B = [1, 2, ?]$.
[$B = [1, 2, f(1, 2)] = [1, 2, 5]$, $\operatorname{grad} f(1, 2) = (2x, 2y)_{[1,2]} = (2, 4) \Rightarrow$ tečná rovina je $\quad u - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$.]

Definice 12.13 : (směr růstu, poklesu)
Vektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$, $(\|\vec{s}\| = 1)$ se nazývá **směrem růstu (poklesu)** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$, jestliže

$$\exists\, \delta > 0 : \; f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s}) > (<) f(\mathbf{x}_0), \quad \forall\, t \in (0, \delta),$$

tj. ve směru $\vec{s}$ se hodnota funkce f zvětšuje (zmenšuje).

Věta 12.10 : (směr růstu, poklesu diferencovatelné funkce)
Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$. Vektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$, je **směrem růstu (poklesu)** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$, jestliže

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{s} > 0 \qquad (\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{s} < 0).$$

(Tedy vektory $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$ a $\vec{s}$ svírají ostrý (tupý) úhel.)

<u>*Příklad 12.16*</u>: Určete, zda vektor $\vec{s} = (1, 3)$ je směrem růstu(poklesu) funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $B = [1, 1]$.
Protože $\operatorname{grad} f(1, 1) \cdot \vec{s} = (2, 2) \cdot (1, 3) = 8 > 0$, tak vektor $\vec{s}$ je směrem růstu funkce f v bodě B.

12.5 Derivace a diferenciály vyšších řádů. Taylorova věta.

Věta 12.11 : (věta o střední hodnotě)

i) (Složková verze). Nechť funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a na nějakém okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ bodu $\mathbf{x}_0 = [x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}]$ existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom pro každý bod $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ existují $\xi_i \in (x_{0i}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ tak, že platí formule

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \; & \frac{\partial f(\xi_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1}\,(x_1 - x_{01}) + \\ & \frac{\partial f(x_{01}, \xi_2, x_3, \ldots, x_n)}{\partial x_2}\,(x_2 - x_{02}) + \\ & \cdots + \frac{\partial f(x_{01}, x_{02}, \ldots, \xi_n)}{\partial x_n}\,(x_n - x_{0n})\,. \end{aligned}$$

ii) (Vektorová verze). Nechť funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, která obsahuje body $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, $0 \le t \le 1$. Potom existuje $\tau \in (0, 1)$ takové, že platí

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\,.$$

Důkaz :

a) (pro jednoduchost je uveden pro funkci 2 proměnných:) Z existence parciálních derivací funkce $f = f(x, y)$ vyplývá, že ve směru os lze použít Lagrangeovu větu o střední hodnotě z MA I (věta 7.7). Potom

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= (f(x,y) - f(x_0,y)) + (f(x_0,y) - f(x_0,y_0)) \\ &= \frac{\partial f(\xi_1, y)}{\partial x}\,(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, \xi_2)}{\partial y}\,(y - y_0)\,. \end{aligned}$$

b) Označíme $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Z předpokladu plyne, že funkce $g(t)$ je spojitá na $\langle 0, 1\rangle$ a diferencovatelná na $(0, 1)$. Proto existuje $\tau \in (0, 1)$ tak, že

$$g(1) - g(0) = g'(\tau)(1 - 0)\,.$$

Zároveň platí $g(1) = f(\mathbf{x})$, $g(0) = f(\mathbf{x}_0)$ a

$$\begin{aligned} g'(\tau) &= \lim_{t\to\tau} \tfrac{f(\mathbf{x}_0+t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))-f(\mathbf{x}_0+\tau(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{t-\tau} \quad (t-\tau=r) \\ &= \lim_{r\to 0} \tfrac{f(\mathbf{x}_0+\tau(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+r(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))-f(\mathbf{x}_0+\tau(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{r} \quad \text{(z definice)} \\ &= \tfrac{\partial f(\mathbf{x}_0+\tau(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{\partial(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} \quad \text{(z věty (12.5))} \\ &= \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0+\tau(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\,. \end{aligned}$$

Odtud již plyne tvrzení b) věty.

Definice 12.14 : (druhá parciální derivace)
Nechť funkce $f:\Omega\to\mathbb{R}$ má parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ v okolí $U(\mathbf{x}_0)$ bodu $\mathbf{x}_0$. Existuje-li

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0+t\vec{e}_j)}{\partial x_i}-\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\Big|_{\mathbf{x}_0},$$

nazývá se **druhá parciální derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$** .
Označujeme

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\Big|_{\mathbf{x}_0}=\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j\partial x_i}\,.$$

Podobně definujeme

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\right)\Big|_{\mathbf{x}_0}=\frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}\,.$$

Nechť funkce f je diferencovatelná na okolí $U(\mathbf{x}_0)$. Je-li každá z funkcí $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$, $i=1,2,\dots,n$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, říkáme, že funkce f je v bodě $\mathbf{x}_0$ **dvakrát diferencovatelná**.

Pokud je funkce f dvakrát diferencovatelná, pak existují diferenciály jejich parciálních derivaci a tedy i druhé parciální derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$.

Věta 12.12 : (záměnnost parciálních derivací)
Je-li funkce f dvakrát diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, potom

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j\partial x_i}\,,\qquad i,j=1,2,\dots,n\,;$$

tj. druhé derivace jsou záměnné.

Důkaz : Pro jednoduchost provedeme důkaz pouze pro funkci dvou proměnných $f=f(x,y)$. Položíme $\mathbf{x}_0=[x_0,y_0]$, zvolíme $h\in\mathbb{R}$ tak, že $[x_0+h,y_0+h]\in U(\mathbf{x}_0)$ a definujeme

$$F(h)=\tfrac{1}{h^2}\big[f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+h)+f(x_0,y_0)\big].$$

Označíme $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$. Z předpokladu existence parciálních derivací funkce f na okolí $U(\mathbf{x}_0)$ a věty (12.1) (o střední hodnotě) plyne existence čísla $\tau_x \in (0,1)$ takového, že

$$F(h) = \frac{1}{h}\left[f_x(x_0+\tau_x h, y_0+h) - f_x(x_0+\tau_x h, y_0)\right].$$

Z diferencovatelnosti parciálních derivací funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ vyplývá

$$f_x(x_0+\tau_x h, y_0+h) - f_x(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)\tau_x h + f_{yx}(x_0, y_0)h + o(h).$$

Pro "malé $o(h)$" platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0\,.$$

$$f_x(x_0+\tau_x h, y_0) - f_x(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)\tau_x h + o(h)\,.$$

Tedy

$$F(h) = f_{yx}(x_0, y_0) + \frac{o(h)}{h} \to f_{yx}(x_0, y_0)\,.$$

Analogicky dostaneme

$$F(h) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[f_y(x_0+h, y_0+\tau_y h) - f_y(x_0, y_0+\tau_y h)\right] \to f_{xy}(x_0, y_0)\,.$$

Neboli

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)\,.$$

Příklad 12.17: Funkce $f(x,y) = x^2 y$ má parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

a pro smíšené parciální derivace platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x\,.$$

Věta 12.13 :
Jsou-li parciální derivace $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j = 1,2,\dots,n$ spojité v bodě $\mathbf{x}_0$, pak funkce f je dvakrát diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$.

Důkaz : Ze spojitosti druhých derivací plyne z věty (12.6) diferencovatelnost prvních derivací funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$, tedy funkce f je dvakrát diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$.

Definice 12.15 : (druhý diferenciál)
Předpokládejme, že funkce f má v bodech $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$ diferenciál $df(\mathbf{x}, \vec{h}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \vec{h}$ vzhledem k přírůstku $\vec{h}$. Pro pevné $\vec{h}$ je $df(\mathbf{x}, \vec{h}) : U(\mathbf{x}_0) \to \mathbb{R}$ funkcí $\mathbf{x}$. Diferenciál funkce $df(\mathbf{x}, \vec{h})$ (proměnné $\mathbf{x}$) v bodě $\mathbf{x}_0$ opět vzhledem k $\vec{h}$ se nazývá **druhým diferenciálem funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$** a značí se

$$d(df(\mathbf{x}, \vec{h}))|_{\mathbf{x}_0} = d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \ ; \quad \vec{h} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) \, .$$

Platí

$$df(\mathbf{x}, \vec{h}) - df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) + \omega(\vec{h}) \, , \qquad \lim_{\|\vec{h}\| \to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} \to 0 \, .$$

Diferenciál k-tého řádu definujeme rekurentně

$$d(d^{k-1} f(\mathbf{x}, \vec{h})) = d^k f(\mathbf{x}, \vec{h}) \, .$$

U dvakrát diferencovatelné funkce f existují diferenciály parciálních derivací, tedy i gradientu a proto i diferenciál diferenciálu.

Pro dvakrát diferencovatelnou funkci f dostaneme

$$\begin{aligned} d^2 f(\mathbf{x}, \vec{h}) &= d(df(\mathbf{x}, \vec{h})) = d(\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \vec{h}) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right) h_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right) h_j h_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i} h_j\right) h_i \, . \end{aligned}$$

V maticové symbolice je $\vec{h}^T = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$.

Takže

$$d^2 f(\mathbf{x}, \vec{h}) = \vec{h} \cdot \mathbb{H}(\mathbf{x}) \cdot \vec{h}^T \, ,$$

kde $\mathbb{H}(\mathbf{x})$ je **Hessova matice** s prvky $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
Druhý diferenciál je kvadratická forma v proměnné $\vec{h}$.

<u>*Příklad 12.18*</u> : Pro funkci $f(x, y) = x^2 + xy$ je

$$\begin{aligned} df &= (y + 2x)\, dx + x\, dy \, , \\ d^2 f &= d(y+2x)\, dx + d(x)\, dy = (2\, dx + 1\, dy)\, dx + (1\, dx + 0\, dy)\, dy \\ &= 2\, dx^2 + 2\, dxdy + 0\, dy^2 \, , \end{aligned}$$

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d^2 f = (dx, dy) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Formální pravidlo pro výpočet diferenciálu vyššího řádu funkce $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^k f \, .$$

Druhá derivace ve směrech $\vec{s}$, $\vec{r}$

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \vec{r}\, \partial \vec{s}} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\operatorname{grad} f(\mathbf{x} + t\vec{r}) \vec{s}^T - \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \vec{s}^T\right] = \vec{r} \cdot \mathbb{H}(\mathbf{x}) \cdot \vec{s}^T \, .$$

Věta 12.14 : (Taylorova věta)
Nechť funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je v okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ bodu $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ $(k+1)$-krát diferencovatelná. Potom pro každé $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$ položíme $\vec{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ a **Taylorův rozvoj** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ je dán vztahem

$$f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)=df(\mathbf{x}_0,\vec{h})+\frac{d^2f(\mathbf{x}_0,\vec{h})}{2!}+\cdots+\frac{d^kf(\mathbf{x}_0,\vec{h})}{k!}+R_{k+1}(\mathbf{x}_0,\vec{h}),$$

kde

$$R_{k+1}(\mathbf{x}_0,\vec{h}) = \frac{1}{(k+1)!}d^{k+1}f(\mathbf{x}_0+\vartheta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),\vec{h}), \quad 0<\vartheta<1\,.$$

Důkaz : Položíme $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))$. Vyjádříme jednotlivé derivace funkce g pomocí funkce f:

$$g'(0)=\lim_{t\to 0}\tfrac{g(t)-g(0)}{t}=\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=df(\mathbf{x},\vec{h})\,,$$

$$g'(t)=\lim_{\xi\to t}\tfrac{g(\xi)-g(t)}{\xi-t}=\lim_{\xi\to t}\tfrac{f(\mathbf{x}_0+\xi\vec{h})-f(\mathbf{x}_0+t\vec{h})}{\xi-t}=\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0+t\vec{h})\cdot\vec{h},$$

$$g''(0) = \lim_{t\to 0}\tfrac{g'(t)-g'(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\tfrac{\operatorname{grad}[f(\mathbf{x}_0+t\vec{h})-f(\mathbf{x}_0)]}{t}\cdot\vec{h}$$

$$=\left(\lim_{t\to 0}\tfrac{1}{t}\left(\tfrac{\partial(f(\mathbf{x}_0+t\vec{h})-f(\mathbf{x}_0))}{\partial x_1}\right),\ \cdots,\ \lim_{t\to 0}\tfrac{1}{t}\left(\tfrac{\partial(f(\mathbf{x}_0+t\vec{h})-f(\mathbf{x}_0))}{\partial x_n}\right)\right)\cdot\vec{h}$$

$$=\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}h_1+\ldots+\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}h_n\,,\ \cdots,\ \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}h_1+\ldots+\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}h_n\right)\cdot\vec{h}$$

$$=\vec{h}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}\cdot\vec{h}^T = \vec{h}\cdot\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\cdot\vec{h}^T$$

$$= d^2f(\mathbf{x}_0,\vec{h})\,.$$

Analogicky postupujeme při výpočtu $g''(t),\ g'''(t)\cdots$. Protože funkce f je $(k+1)$-krát diferencovatelná, pak i funkce g je $(k+1)$-krát diferencovatelná a z Taylorova rozvoje (MA1 věta 7.9) funkce jedné reálné proměnné dostaneme

$$g(t)-g(0) = \frac{g'(0)}{1!}t+\frac{g''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{g^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}t^{k+1},\ \xi\in(0,t)\,.$$

Odtud a z rovnosti $g(1)-g(0) = f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)$ plyne tvrzení věty.

<u>*Příklad 12.19*</u>: Taylorův rozvoj funkce $f(x,y)=x$ v bodě $\mathbf{x}_0=[x_0,y_0]$ pro $k=1$ je dán vztahy:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+R_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}),$$

$$R_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{x})=\tfrac{1}{2!}\Big(\tfrac{\partial^2 f(\xi_0,\eta_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\tfrac{\partial^2 f(\xi_0,\eta_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)$$
$$+\tfrac{\partial^2 f(\xi_0,\eta_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\Big),\quad \xi_0\in(x_0,x)\,;\ \eta_0\in(y_0,y).$$

Tedy $\quad x-x_0=1\cdot(x-x_0)+0\,.$

Taylorovu formuli používáme pro **aproximaci** diference $\Delta f=f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)$ pomocí diferenciálů.

<u>*Příklad 12.20*</u>: Pro funkci $f(x,y)=xy$ lze diferenci $\Delta f=xy-x_0y_0$ psát ve tvaru

$$\Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)\ \approx\ \tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\,\Delta x+\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\,\Delta y\,,$$
$$xy-x_0y_0\ \approx\ y_0\,\Delta x+x_0\,\Delta y$$

kde chyba aproximace je

$$R_2(x_0,y_0,x,y)\ =\ \Delta x\cdot\Delta y=(x-x_0)\cdot(y-y_0)\,.$$

12.6 Řešitelnost funkcionálních rovnic

Motivační příklady:

1. Řešíme-li diferenciální rovnici $(2x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0$, pak dostaneme funkcionální rovnici $x^2+xy+y^2-C=0$.

   Kdy a kde existuje řešení uvedené funkcionální rovnice ?

2. Řešením rovnice $y^2-x=0$ jsou např. funkce
$$y=\sqrt{x}\,,\quad y=-\sqrt{x}\,,\quad x\geq 0$$
   (množiny dvojic $(x,\sqrt{x})$, $(x,-\sqrt{x})$).
   Pro $x<0$ není rovnice řešitelná v $\mathbb{R}$ (neexistuje reálná funkce $y=f(x)$, která by splňovala rovnici).
   Pro $x\geq 0$ je rovnice řešitelná, má dvě spojitá řešení a nekonečně mnoho nespojitých řešení.
   Pro $x\geq 0$, $y\geq 0$ je rovnice řešitelná jednoznačně, tj. mezi nezápornými funkcemi existuje jediné řešení.

Definice 12.16 : (řešení funkcionální rovnice)
Mějme funkci $F(\mathbf{x},y):\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ a uvažujeme rovnici o $n+1$ neznámých $F(\mathbf{x},y)=0$. Funkce $y=f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\Omega$ se nazývá **globálním řešením** této rovnice, jestliže
$$\forall\,\mathbf{x}\in\Omega:\quad F(\mathbf{x},f(\mathbf{x}))=0\,.$$
Jestliže $\forall\,\mathbf{x}\in U(\mathbf{x}_0)\subset\Omega:\ F(\mathbf{x},f(\mathbf{x}))=0$, pak $y=f(\mathbf{x})$ se nazývá **lokálním řešením** dané rovnice.

Při popisu řešení rovnice $F(\mathbf{x},y)=0$ vlastně zkoumáme "nulovou" hladinu funkce $F(\mathbf{x},y)$.

Při tom nás zajímá:
1. Jak zaručíme **existenci** řešení rovnice.
2. Jak zaručíme **existenci jediného** řešení.
3. Jaké jsou vlastnosti řešení (**spojitost**, **diferencovatelnost**).

Věta 12.15 : (o globální řešitelnosti)
Předpokládáme, že funkce $F=F(x,y)$ je definována na obdélníku $\langle a,b\rangle\times\langle c,d\,\rangle\subset\mathbb{R}^2$ a pro každé pevné $x_0\in\langle a,b\rangle$ je $F(x_0,y)$ spojitá funkce v proměnné y. Jestliže platí $F(x,c)\cdot F(x,d)\leq 0\quad\forall x\in\langle a,b\rangle$, potom existuje alespoň jedna funkce $y=y(x)$ definovaná na $\langle a,b\rangle$ taková, že je řešením rovnice $F(x,y)=0$, tj. platí
$$F(x,y(x))=0\quad\forall x\in\langle a,b\rangle\,.$$

Funkce $y=f(\mathbf{x})$, se také nazývá **implicitní řešení** rovnice $F(\mathbf{x},y)=0$.

Důkaz : Nechť $x_0\in\langle a,b\rangle$ je libovolné, ale pevné, pak funkce $h(y)=F(x_0,y)$ je spojitá na $\langle c,d\rangle$ a splňuje podmínku $h(c)\cdot h(d)\leq 0$. Podle věty 6.6 z MA1 existuje alespoň jedno číslo y_0 takové, že platí

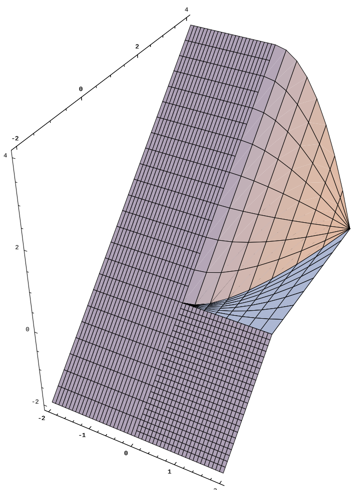
$$h(y_0) = 0\,, \quad \text{tj.} \quad F(x_0, y_0) = 0\,.$$

Tímto způsobem ke každému $x \in \langle a, b\rangle$ určíme $y \in \langle c, b\rangle$, neboli existuje alespoň jedna funkce $y = y(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, která splňuje rovnici $F(x, y) = 0 \;\; \forall x \in \langle a, b\rangle$.

Předchozí věta zaručuje pouze existenci globálního řešení, nikoliv jednoznačnost (může existovat další funkce $\overline{y} = \overline{y}(x)$, která je řešením). Jednoznačnost zaručíme jistou podmínkou monotonie.

Nutnost spojitosti parciální derivace F_y ilustruje příklad funkce $F(x, y) =$

$$\begin{cases} y - x^2 & y - x^2 \geq 0, \\ & x \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ 0 & y - x^2 \leq 0, \\ & x \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ y & x \leq 0 \vee y \leq 0, \end{cases}$$



která je diferencovatelná v bodě $[0, 0]$, ale na okolí počátku neexistuje právě jedno řešení $y = y(x)$ rovnice $F(x, y) = 0$.

Věta 12.16 : (o lokální řešitelnosti, o implicitní funkci)
Předpokládáme, že:

1. funkce $F = F(x, y)$ je definovaná a spojitá na nějakém okolí $U([x_0, y_0])$ bodu $[x_0, y_0]$,
2. je splněna rovnost $F(x_0, y_0) = 0$,
3. funkce $F_y = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ je definovaná na okolí $U([x_0, y_0])$, spojitá v bodě $[x_0, y_0]$ a $\frac{\partial F[x_0,y_0]}{\partial y} \neq 0$.

Potom:

a) existuje okolí I bodu x_0 a existuje funkce $y = y(x)$ definovaná na I;

b) tato funkce $y = y(x)$ je jediným (lokálním) řešením rovnice $F(x, y) = 0$ na I, tj. $F(x, y(x)) = 0 \;\; \forall x \in I$;

c) funkce $y = y(x)$ je spojitá na I a splňuje podmínku $y_0 = y(x_0)$.

<u>Důkaz</u> :

Nechť $F_y(x_0, y_0) = \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} > 0$ (pro $F_y(x_0, y_0) < 0$ je důkaz podobný). Ze spojitosti funkce F_y plyne, že existuje okolí $\tilde{U}([x_0, y_0])$ bodu $[x_0, y_0]$, ve kterém je $F_y[x, y] > 0$ (plyne z věty (12.4) 2.) . Volíme $y_1 < y_0 < y_2$ tak, že $[x_0, y_1], [x_0, y_2] \in \tilde{U}([x_0, y_0])$. Protože $F_y > 0$, tak funkce $F(x, y)$ je rostoucí funkcí v proměnné y na $\tilde{U}([x_0, y_0])$. Zároveň $F[x_0, y_0] = 0$, tedy $F(x_0, y_1) < 0$ a $F(x_0, y_2) > 0$.

Ze spojitosti funkcí $F(x, y_1)$, $F(x, y_2)$ plyne, že existuje otevřený interval I obsahující x_0, ve kterém $F(x, y_1) < 0$ a $F(x, y_2) > 0$ pro každé $x \in I \subset \tilde{U}([x_0, y_0])$.

Tedy funkce F je spojitá na $I \times \langle y_1, y_2 \rangle$ rostoucí v proměnné y a $F(x, y_1) \cdot F(x, y_2) < 0$. Z předchozí věty (12.15) a monotonie v y vyplývá, že ke každému $x \in I$ existuje právě jedno $y(x)$ takové, že $F(x, y(x)) = 0$.

Nyní dokážeme, že tato funkce $y = y(x)$ je na intervalu I spojitá.

Nechť $x_n \to \overline{x} \subset I$. Ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} y(x_n) = y(\overline{x})$. Víme, že $y_1 < y_n = y(x_n) < y_2$ pro každé n. Předpokládejme pro spor, že $y_n \not\to \overline{y} = y(\overline{x})$, potom

i) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \tilde{y} \neq \overline{y}$. V tomto případě ze spojitosti funkce F na okolí bodu $[x_0, y_0]$ plyne $0 = F(x_n, y_n) \to F(\overline{x}, \tilde{y}) = 0$, což je však spor s již dokázanou jednoznačností nulového bodu $\overline{y}$, který odpovídá $\overline{x} \in I$ $(F(\overline{x}, \overline{y}) = 0)$.

ii) nebo $\limsup y_n > \liminf y_n$. Z definice supréma vyplývá, že existuje vybraná posloupnost $\{y_{n_k}\}$ z posloupnosti $\{y_n\}$ taková, že $y_{n_k} \to y_s = \limsup y_n$. Zároveň $F(x_{n_k}, y_{n_k}) = 0$, tedy opět ze spojitosti funkce F plyne $F(\overline{x}, y_s) = 0$. Podobně dostaneme rovnost $F(\overline{x}, y_i) = 0$, kde $y_i = \liminf y_n$. To je znovu spor s jednoznačností bodu $\overline{y}$.

Věta 12.17 : (O derivaci řešení)
Jsou-li splněny všechny předpoklady věty (12.16) o funkci $F(x, y)$ a navíc funkce $F(x, y)$ je diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$ (nebo jsou-li F_x, F_y spojité v bodě $[x_0, y_0]$), potom lokální řešení $y = y(x)$ rovnice $F(x, y) = 0$ je funkce diferencovatelná v bodě x_0 a platí

$$y'(x_0) = -\frac{F_x[x_0, y_0]}{F_y[x_0, y_0]}.$$

<u>Důkaz</u> : Víme, že existuje interval I obsahující bod x_0 a funkce $y = y(x)$ definovaná na I tak, že $F(x, y(x)) = 0$ $\forall x \in I$, funkce $y = y(x)$ je spojitá na I a splňuje podmínku $y_0 = y(x_0)$.

Z diferencovatelnosti funkce $F(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ vyplývá

$0 = F(x,y(x)) - F(x_0,y_0) = F_x(x_0,y_0)h_1 + F_y(x_0,y_0)h_2 + \omega(\vec{h})$; $\quad \frac{\omega(\vec{h})}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \to 0$, $\quad \vec{h} = (h_1,h_2) = (x-x_0, y(x)-y_0)$.

Vydělíme uvedenou rovnost $\|\vec{h}\|$ a upravíme

$$0 = F_x(x_0,y_0)\frac{h_1}{\|\vec{h}\|} + F_y(x_0,y_0)\frac{h_2}{\|\vec{h}\|} + \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} =$$

$$F_x(x_0,y_0)\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} + F_y(x_0,y_0)\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} + \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} =$$

$$F_x(x_0,y_0)\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)^2}} + F_y(x_0,y_0)\frac{\frac{y-y_0}{x-x_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)^2}} + \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}\,.$$

Ze spojitost funkce $y = y(x)$ plyne, když $x - x_0 = h_1 \to 0$, pak $h_2 = y(x) - y(x_0) \to 0$ a také $\|\vec{h}\| \to 0$.

Nyní budeme pro spor předpokládat, že $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{y-y_0}{x-x_0} = \pm\infty$, pak z předchozí rovnosti limitním přechodem pro $x \to x_0$ dostaneme $0 = F_y(x_0,y_0)$, což je spor s předpokladem.

Opět upravíme poslední rovnost do tvaru

$$0 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)^2}}\left(F_x(x_0,y_0) + F_y(x_0,y_0)\,\frac{y-y_0}{x-x_0}\right) + \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}\,,$$

a limitním přechodem pro $x \to x_0$ dostaneme

$$0 = \lim_{x\to x_0}\left(F_x(x_0,y_0) + F_y(x_0,y_0)\,\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)$$
$$= F_x(x_0,y_0) + F_y(x_0,y_0)\,y'(x_0)\,.$$

Odtud již plyne tvrzení věty.

Poznámka 12.2: Věty (12.15), (12.16), (12.17) jsou speciální případy tzv. **věty o implicitní funkci**. Implicitní funkcí se obvykle nazývá funkce, kterou my zde označujeme jako lokální řešení funkcionální rovnice. Vzorec $F_x + F_y\,y' = 0$ z věty (12.17) se také často nazývá vzorcem pro "implicitní derivování".

Příklad 12.21: Rovnice $x - y^2 = 0$ v okolí bodu $[0,0]$ nemá podle věty (12.16) zaručenou jednoznačnou (lokální) řešitelnost, neboť $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y|_{[0,0]} = 0$. V okolí bodu $[0,0]$ má daná rovnice dvě řešení $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$.

V bodě $[1,1]$ je $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y\Big|_{[1,1]} \neq 0$ a úloha má jedno řešení $y = \sqrt{x}$ a její derivaci v bodě $x_0 = 1$ lze stanovit z rovnice $1 - 2y \cdot y' = 0$, tj. $y'(1) = \frac{x}{2y}\Big|_{[1,1]} = \frac{1}{2}$.

Naše předchozí úvahy můžeme rozšířit i na rovnici o větším počtu neznámých nebo na soustavu rovnic o větším počtu neznámých. To je obsahem následující věty, kterou uvedeme bez důkazu.

Věta 12.18 : (Obecná věta o lokální řešitelnosti)
Předpokládejme, že

1. funkce $F = F(\mathbf{x}, y) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ je diferencovatelná v bodě $[\mathbf{x}_0, y_0] \in \mathbb{R}^{n+1}$ a v jeho okolí;
2. platí $F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$;
3. funkce $F_y(\mathbf{x}, y)$ ($n+1$ proměnných) je spojitá a nenulová v bodě $[\mathbf{x}_0, y_0]$.

Potom platí:

a) existuje okolí $U(\mathbf{x}_0)$ bodu $\mathbf{x}_0$, okolí $U(y_0)$ bodu $y_0 \in \mathbb{R}$ a funkce $y = y(\mathbf{x})$ definovaná v okolí $U(\mathbf{x}_0)$,

b) funkce $y = y(\mathbf{x})$ je jediným řešením rovnice $F(\mathbf{x}, y) = 0$ v okolí $U(\mathbf{x}_0)$, tj. platí $F(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall\ \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$, $y(\mathbf{x}) \in U(y_0)$,

c) tato funkce je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$ a platí

$$\begin{aligned} y_0 &= y(\mathbf{x}_0)\,, \\ \frac{\partial y(\mathbf{x})}{\partial x_i} &= -\frac{F_{x_i}(\mathbf{x}_0, y_0)}{F_y(\mathbf{x}_0, y_0)}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

<u>*Příklad 12.22*</u> : Mějme rovnici $xy + xz + yz - 11 = 0$. Posuďme řešitelnost této rovnice v okolí bodu $M = [1,2,3]$. Funkce $F(x,y,z) = xy + xz + yz - 11$ je diferencovatelná podle všech proměnných (tj. v $\mathbb{R}^3$) a $F_y = x+z$, $F_z = x+y$. Dále je $F_z(M) = 3 \neq 0$, a tedy v okolí bodu M existuje

jediné řešení $z = f(x,y)$ dané rovnice, toto řešení je diferencovatelné a platí

$$z_x(1,2) = \frac{\partial z(1,2)}{\partial x} = -\frac{F_x(M)}{F_z(M)} = -\left.\frac{y+z}{x+y}\right|_M = -\frac{5}{3}\,,$$
$$z_y(1,2) = \frac{\partial z(1,2)}{\partial y} = -\frac{F_y(M)}{F_z(M)} = -\left.\frac{x+z}{x+y}\right|_M = -\frac{4}{3}\,.$$

V tomto případě řešení rovnice můžeme stanovit explicitně: $z = \frac{11-xy}{x+y}$ a příslušné derivace pak vypočítat derivováním.

<u>*Příklad 12.23*</u>: (Nejednoznačná řešitelnost funkcionálních rovnic)

Věty (12.15) – (12.18) uvádí podmínky jednoznačné řešitelnosti rovnic $F(x,y) = 0$, resp. $F(\mathbf{x},y) = 0$.

V aplikacích nás však často zajímají takové body (tzv. **singulární body rovnice**) $[\overline{x},\overline{y}] \in \mathbb{R}^2$, v nichž platí

$$F(\overline{x},\overline{y}) = 0\,, \quad F_x(\overline{x},\overline{y}) = 0\,, \quad F_y(\overline{x},\overline{y}) = 0\,.$$

V tomto případě si pomůžeme parametrizací a hledáme dvojici funkcí (křivku) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$ splňující podmínky

$$\forall\, t \in I:\ F(x(t),y(t)) = 0\,,$$
$$\exists\, \overline{t} \in I:\ \overline{x} = x(\overline{t})\,,\ \overline{y} = y(\overline{t}) \quad \text{(křivka prochází bodem } \overline{x},\overline{y}\text{)}.$$

Je zřejmé, že v okolí singulárních bodů rovnice nemusí být zmíněná křivka grafem žádné funkce typu $y = f(x)$, resp. $x = \varphi(y)$.

Bod $[\overline{x},\overline{y}] = [0,0]$ je singulárním bodem rovnice

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0\,, \quad a > 0\,.$$

Zde

$$x(t) = \frac{3at}{1+t^3}\,, \quad y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}\,, \quad t \neq -1,\ \ \overline{t} = 0\,.$$

Křivka se nazývá Descartův list. V okolí bodu $[0,0]$ má daná rovnice čtyři řešení.

Zde poznamenejme, že neumíme poskytnout obecnou metodu, jak k dané rovnici stanovit uvedenou dvojici parametrických funkcí. Geometricky řečeno jde o problém, jak nejvhodněji parametrizovat křivku, která je dána rovnicí.

13 Základní pojmy optimalizace v $\mathbb{R}^n$

13.1 Lokální a globální extrémy

Definice 13.1 : (Extrémy) Máme funkci $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.
(A) Číslo $f(\mathbf{x}_0)$ je **lokálním minimem (maximem)** funkce f, když existuje okolí $U(\mathbf{x}_0)$ bodu $\mathbf{x}_0$ takové, že platí

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \quad (f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})) \quad \forall\, \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \Omega.$$

Bod $\mathbf{x}_0$ je pak **bodem lokálního minima (maxima)** na množině Ω. Píšeme

$$f(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \Omega} f(\mathbf{x}), \quad \big(f(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \Omega} f(\mathbf{x})\big).$$

(B) Číslo $f(\mathbf{x}_0)$ je **globálním minimem (maximem)** funkce f na Ω, platí-li

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \quad (f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \Omega\,.$$

Píšeme

$$f(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x}), \quad \big(f(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x})\big).$$

Bod $\mathbf{x}_0$ je pak **bodem globálního minima (maxima)** na množině Ω.
Pokud pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ platí **ostré** nerovnosti, potom hovoříme o **ostrém (lokálním) minimu (maximu)**. Extrémem funkce f rozumíme maximum nebo minimum této funkce.

Věta 13.1 : (Nutná podmínka existence lokálního extrému) Nechť funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je v bodě $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ diferencovatelná (definice (12.2)) a má v tomto bodě lokální extrém. Potom

$$df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 0 \quad \forall\, \vec{h} \in \mathbb{R}^n\,, \quad (\Rightarrow \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0})\,.$$

<u>Důkaz</u> : (sporem)

Nechť $\exists\, \vec{h} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ takové, že $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) > 0$.

(Pro $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) < 0$ je důkaz podobný).

Tedy $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{h} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} > 0$.

Odtud vyplývá, že existuje $\delta > 0$ takové, že

$$f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) > 0 \quad \text{pro} \quad t \in (0, \delta)\,,$$
$$f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) < 0 \quad \text{pro} \quad t \in (-\delta, 0)\,,$$

což je spor s definicí extrému funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$.

Body, ve kterých diferenciál funkce neexistuje nebo je nulový, se nazývají **kritické** body funkce f (viz MA1 definice 7.4).

Definice 13.2 : (Stacionární bod)
Nechť f je diferencovatelná funkce v bodě $\mathbf{x}_0$. Bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ se nazývá **stacionární bod** diferencovatelné funkce f, když

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}\,.$$

Příklad 13.1 :

Pro funkci $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$ máme $\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2 - 4\,,\, 4x_2 - 2x_1 - 6)\,.$

V bodě $[0, 0]$ určuje $\operatorname{grad} f(0, 0) = (-4, -6)$ směr největšího růstu funkce f a $-\operatorname{grad} f = (4, 6)$ určuje směr největšího poklesu. Například vektor $\vec{v} = (1, 0)$ určuje směr poklesu v bodě $[0, 0]$, neboť $\operatorname{grad} f \cdot \vec{v} = (-4, -6) \cdot (1, 0) = -4 < 0\,.$

Pro stacionární body platí

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - 4 &= 0 \\ 4x_2 - 2x_1 - 6 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{7}{3}, \\ x_2 &= \tfrac{8}{3}. \end{aligned}$$

Příklad 13.2 :

1. Pro funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ je $\operatorname{grad} f = (2x, 2y)$ a bod $A = [0, 0]$ je stacionární bod. Bod A je bodem minima funkce f a všechny směry jsou v tomto bodě směry růstu.
   Pro druhý diferenciál funkce f platí:
   $d^2(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 2\,dx + 2\,dy > 0 \quad \forall\, \vec{h} = (dx, dy) \neq (0, 0)\,.$
2. Pro funkci $f(x, y) = x^2 - y^2$ je $\operatorname{grad} f = (2x, -2y)$ a opět bod $A = [0, 0]$ je stacionární bod funkce f. Na přímce $y = 0$ má funkce $f(x, 0) = x^2$ minimum v bodě $x = 0$ a na přímce $x = 0$ má funkce $f(0, y) = -y^2$ maximum v bodě $y = 0\,.$
   Pro druhý diferenciál funkce f nyní platí:
   $d^2(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 2\,dx - 2\,dy\,.$ Odtud dostaneme
   $d^2(\mathbf{x}_0, (1, 0)) = 2 > 0\,,\;\; d^2(\mathbf{x}_0, (0, 1)) = -2 < 0\,.$

   Závěr: Stacionární bod $[0, 0]$ je ve směru $\vec{s} = (1, 0)$ bodem minima funkce f a ve směru $\vec{s} = (0, 1)$ je bodem maxima funkce f (bod $[0, 0]$ je tzv. **sedlový bod**).

Věta 13.2 : (Postačující podmínky existence lokálního extrému)
Nechť funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R},\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$ je dvakrát diferencovatelná ve vnitřním bodě $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ a $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 0\ \ \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže

1. $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) > 0\ \ \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{h} \neq \vec{0}\,,$

   pak je v bodě $\mathbf{x}_0$ ostré lokální minimum ;

2. $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) < 0\ \ \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{h} \neq \vec{0}\,,$

   pak je v bodě $\mathbf{x}_0$ ostré lokální maximum ;

3. $\exists \vec{h}_1 \neq \vec{0} : d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_1) = 0$ a $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \geq 0$ nebo $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \leq 0\ \ \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$,

   pak (zatím) nemůžeme rozhodnout,

4. $\exists \vec{h}_1, \vec{h}_2 \in \mathbb{R}^n$:

   $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_1) < 0$, pak ve směru $\vec{h}_1$ je funkce konkávní (v $\mathbf{x}_0$ je maximum),

   $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_2) > 0$, pak ve směru $\vec{h}_2$ je funkce konvexní (v $\mathbf{x}_0$ je minimum),

   v bodě $\mathbf{x}_0$ nenastává extrém, ale $\mathbf{x}_0$ je **sedlový bod**.

Důkaz : Funkce f je dvakrát diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, tedy podle definice (12.15) existuje okolí $U(\mathbf{x}_0)$, na kterém je funkce f diferencovatelná. Z věty (12.11) vyplývá pro $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \vec{h} \in U(\mathbf{x}_0)$ existence $\tau \in (0, 1)$ takového, že

$$f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0 + \tau\vec{h}, \vec{h}) = \frac{1}{\tau}\, df(\mathbf{x}_0 + \tau\vec{h}, \tau\vec{h})\,.$$

Zároveň z definice druhého diferenciálu dostaneme

$$df(\mathbf{x}_0 + \tau\vec{h}, \tau\vec{h}) - df(\mathbf{x}_0, \tau\vec{h}) = d^2 f(\mathbf{x}_0, \tau\vec{h}) + \omega(\tau\vec{h}), \qquad \tfrac{\omega(\tau\vec{h})}{\|\tau\vec{h}\|^2} \to 0.$$

Nyní využijeme předpokladu věty $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 0$ a rovnosti $d^2 f(\mathbf{x}_0, \tau\vec{h}) = \tau^2 d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h})$, tedy

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= \tau \left(d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) + \|\vec{h}\|^2 \frac{\omega(\tau\vec{h})}{\|\tau\vec{h}\|^2} \right) \\ &= \tau\, \|\vec{h}\|^2 \left(d^2 f(\mathbf{x}_0, \tfrac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}) + \tilde{\omega}(\vec{h}) \right), \quad \tilde{\omega}(\vec{h}) = \tfrac{\omega(\tau\vec{h})}{\|\tau\vec{h}\|^2}. \end{aligned}$$

Protože druhý diferenciál $d^2f(\mathbf{x}_0, \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|})$ je spojitý v proměnné $\vec{h}$, nabývá podle věty (12.4) na kompaktní množině $M = \{\vec{v} : \|\vec{v}\,\| = 1\}$ (jednotková sféra) svého minima v nějakém vektoru $\vec{v}_0$. Odtud a z předpokladu $d^2f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) > 0$ máme $d^2f(\mathbf{x}_0, \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}) \geq d^2f(\mathbf{x}_0, \vec{v}_0) = A > 0$. Neboli

$$f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \tau\, \|\vec{h}\|^2 \big(A + \tilde{\omega}(\vec{h})\big)\,.$$

Pro dostatečně malé $\vec{h}$ je $A + \tilde{\omega}(\vec{h}) > 0$ ($\tilde{\omega}(\vec{h}) \to 0$), tedy $f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) > 0$ a v bodě $\mathbf{x}_0$ je ostré lokální minimum.

ad 2) Za předpokladu $d^2f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) < 0$ dospějeme analogickým způsobem k závěru, že v dostatečně malém okolí bodu $\mathbf{x}_0$ je $f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0)$ záporné a v bodě $\mathbf{x}_0$ je ostré lokální maximum.

Zbývající podmínky nejsou podmínkami pro extrém (a proto není co dokazovat), pouze logicky doplňují seznam znaménkových možností druhého diferenciálu.

Poznámka 13.1: Uvedeme ekvivalentní podmínky či ekvivalentní názvy příslušných vlastností zahrnutých v předpokladech věty (13.2). Platí $d^2f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \vec{h}\,\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\vec{h}^T$

1.
   - kvadratická forma $\vec{h}\,\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\vec{h}^T$ je **pozitivně definitní**,
   - matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ je pozitivně definitní,
   - všechny hlavní minory matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou kladné, tj.

     $$M_1 > 0,\ M_2 > 0,\ M_3 > 0,\ \ldots,$$

   - všechna vlastní čísla matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou kladná.

2.
   - kvadratická forma $\vec{h}\,\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\vec{h}^T$ je **negativně definitní**,
   - matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ je negativně definitní,
   - hlavní minory matice $\mathbb{H}(\mathbf{x})$ pravidelně střídají znaménka a první minor je záporný, tj.

     $$M_1 < 0,\ M_2 > 0,\ M_3 < 0,\ \ldots,$$

   - všechna vlastní čísla matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou záporná.

3. - kvadratická forma $\vec{h}\,\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\vec{h}^T$ a matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou **pozitivně semidefinitní** nebo **negativně semidefinitní**,
   - alespoň jeden z hlavních minorů je nulový a platí

     $$M_1 \geq 0,\ M_2 \geq 0,\ \ldots,\ \text{nebo}\ M_1 \leq 0,\ M_2 \geq 0,\ M_3 \leq 0,\ \ldots,$$

   - vlastní čísla $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou nezáporná nebo nekladná, aspoň jedno je nulové.

4. - kvadratická forma $\vec{h}\,\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\vec{h}^T$ a matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou **indefinitní**,
   - pro znaménka minorů nenastává ani jeden z předchozích případů,
   - vlastní čísla matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou kladná i záporná.

Příklad 13.3 : Vyšetříme lokální extrémy funkce
$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$.
Stacionární bod $\mathbf{x}_0$ určíme ze soustavy

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= \ 4\,, \\ -2x_1 + 4x_2 &= \ 6\,. \end{aligned}$$

Odtud

$$\mathbf{x}_0 = \left[\tfrac{7}{3}, \tfrac{8}{3}\right]\,,\quad \mathbb{H} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} M_1 &= 4 > 0\,, \\ M_2 &= 12 > 0\,. \end{aligned}$$

Hessova matice (a tedy i druhý diferenciál) je pozitivně definitní. Proto funkce f má v bodě $\mathbf{x}_0$ minimum:

$$\min f(x_1, x_2) = f\left(\tfrac{7}{3}, \tfrac{8}{3}\right) = -\tfrac{114}{9}\,.$$

Poznámka 13.2: Bod $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ je **sedlový bod** funkce $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, jestliže $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ a platí
$\exists\, \delta_1, \delta_2 > 0,\ \vec{h}_1, \vec{h}_2 \in \mathbb{R}^n\colon f(\mathbf{x}_0 + t_1\vec{h}_1) \leq f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}_0 + t_2\vec{h}_2)$,
$\forall\, t_i \in (-\delta_i, \delta_i)\,,\ i = 1, 2\,.$

V prvním směru $\vec{h}_1$ nabývá funkce f maxima a v druhém směru $\vec{h}_2$ nabývá minima v bodě $\mathbf{x}_0$.

Příklad 13.4 : Vyšetříme stacionární body funkce
$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Vypočteme

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 6x\,, & -3 \\ -3\,, & 6y \end{pmatrix}.$$

Stac. bod	$\mathbb{H}$	Vlast. čísla	Typ $\mathbb{H}$	Typ bodu
$A = [0,0]$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3$ $\lambda_2 = -3$	indefinitní	sedlový
$B = [1,1]$	$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 9$ $\lambda_2 = 3$	pozitivně definitní	minimum

Všimneme si podrobněji druhého diferenciálu $d^2 f = \vec{h}\,\mathbb{H}\,\vec{h}^T$ $= (h_1, h_2) \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = -6h_1h_2$ ve stacionárním bodě $A = [0,0]$. Zvolme $\vec{h} = (1,1)$ a uvažujeme danou funkci $f(x,y)$ na přímce $x = t,\ y = t$, tj. funkci $g(t) = f(t,t) = 2t^3 - 3t^2$. Protože $g''(0) = -6 < 0$, pak na dané přímce (tj. ve směru vektoru $\vec{h} = (1,1)$) nabývá funkce f maxima pro $t = 0$.
Zvolíme-li $\vec{h} = (1,-1)$, pak na přímce $x = t,\ y = -t$ nabývá funkce f svého minima ($g''(0) = 6 > 0$, kde $g(t) = f(t,-t) = 3t^2$) pro $t = 0$.

<u>*Příklad 13.5*</u> : Vyšetříme stacionární body funkce f, kde $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$. Platí
$\operatorname{grad} f(x,y) = \big(4x^3 - 2(x+y)\,,\ 4y^3 - 2(x+y)\big)$,
$\mathbb{H}[x,y] = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$. Potom

Stac. bod	$\mathbb{H}$	Hlavní minory	Typ bodu
$[1,1]$	$\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$	$M_1 = 10 > 0$ $M_2 = 96 > 0$	bod minima
$[-1,-1]$	$\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$	$M_1 = 10 > 0$ $M_2 = 96 > 0$	bod minima
$[0,0]$	$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$	$M_1 = -2 < 0$ $M_2 = 0$	Podle věty (13.2) nelze rozhodnout

Vyšetříme funkci $f(x,y)$ v bodě $[0,0]$ na přímkách

a) $x = t,\ y = t : g(t) = f(t,t) = 2t^4 - 4t^2$; $g''(0) = -8 < 0$ maximum;

b) $x = -t,\ y = t : g(t) = f(-t,t) = 2t^4$; $g^{(4)}(0) = 48 > 0$ (první nenulová derivace v bodě $t = 0$ je sudá a kladná) minimum.

Odtud je vidět, že bod $[0,0]$ je sedlovým bodem funkce f.

13.2 Extrémy vzhledem k podmnožině

Budeme vyšetřovat extrémy dané spojité funkce f v $\mathbb{R}^n$ na takových podmnožinách $V \subset \mathbb{R}^n$, které se dají charakterizovat systémem podmínek ve tvaru rovností nebo nerovností. Těmto podmínkám říkáme **vazbové podmínky** a množině V říkáme **množina přípustných bodů**. Množina V bude v našich případech vždy uzavřená.

Definice 13.3 : (Úlohy s vazbami)
Mějme funkci $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina.

(A) Mějme spojité funkce $h_j(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, p$, $p < n$ a označme

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \cap \Omega : \ h_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, p\}.$$

Úloha najít extrém funkce f na množině přípustných bodů V se nazývá **optimalizační úloha s vazbami typu rovnosti.**

(B) Mějme spojité funkce $g_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, m$ a označme

$$\widehat{V} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \ g_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Úloha najít extrém funkce f na množině přípustných bodů $\widehat{V}$ se nazývá **optimalizační úloha s vazbami typu nerovnosti.**

Je-li přípustná množina V určena jak vazbami typu rovnosti, tak vazbami typu nerovnosti, hovoříme o **úloze se smíšenými vazbami** (**úloha optimálního řízení**).

Číslo $f(\mathbf{x}_0)$, ve kterém funkce f nabývá minima (maxima) vzhledem k množině V (viz definice (13.1)), se nazývá **lokální vázané minimum (maximum)** a $\mathbf{x}_0$ je **bodem lokálního vázaného minima (maxima)** (tedy extrému).

Na fotbalové utkání prodáváme vstupenky na stání za cenu x a sezení za cenu y. Jejich prodejnost popisují funkce $p_1(x,y)$, $p_2(x,y)$, pro které platí z kapacitních důvodů omezení $0 \leq p_1(x,y) \leq S_1$, $0 \leq p_2(x,y) \leq S_2$. Našim úkolem je maximalizovat zisk, tedy vyřešit úlohu

$$\max_{[x,y]\in V} (p_1(x,y)x + p_2(x,y)y),$$

kde $V = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq p_1(x,y) \leq S_1, 0 \leq p_2(x,y) \leq S_2\}$.

<u>Příklad 13.6</u> : Je dána funkce $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$. Určete extrém funkce f na jednorozměrné lineární varietě (přímce) $\mathbf{x} = t\vec{s},\ \vec{s} = (1, 1)$.

řešení: Na přímce $x_1 = t,\ x_2 = t$ vyšetříme funkci $f(t,t) = g(t) = 2t^2 - 10t$. Pro $t = \frac{5}{2}$ je $g'\left(\frac{5}{2}\right) = 0,\ g''\left(\frac{5}{2}\right) = 4 > 0$. V bodě $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ nabývá funkce f tzv. **relativního minima** (minima vzhledem k dané varietě).

<u>*Poznámka 13.3*</u>: (řešitelnost optimalizační úlohy)
Jestliže množina $V \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní (omezená a uzavřená) a funkce f je spojitá na V, potom z věty (12.4) vyplývá, že úlohy na hledání extrému (optima) $\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V\}$, $\max\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V\}$ jsou řešitelné, tj. existuje jak $\min\limits_{\mathbf{x}\in V} f(\mathbf{x})$, tak $\max\limits_{\mathbf{x}\in V} f(\mathbf{x})$.

<u>*Příklad 13.7*</u>:

1) (optimalizační úloha s vazbami typu rovnosti)

Řešíme úlohu $\min\{f(x,y) : [x,y] \in V\}$, kde

$f(x,y) = x^2 + y^2$ a přípustná množina V je dána předpisem $V = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y + x - 1 = 0\}$.

"Geometrická metoda"

Řezem grafu funkce f rovinou rovnoběžnou s osou z procházející "přímkou V" je parabola.

V bodě $[x_0, y_0] = [0{,}5\,;\,0{,}5]$ je její minimum.

"Přechod k jedné proměnné"

Dosadíme $y = -x + 1$ do funkce f, dostaneme funkci jedné proměnné $f(x, y(x)) = x^2 + (-x+1)^2 = 2(x^2 - x + \frac{1}{2}) = 2((x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4})$. Tato funkce má minimum v bodě $x_0 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$.

"Metoda gradientu"

"Přímka V" je nulovou hladinou funkce $h(x,y) = y + x - 1$. Gradient funkce h (pokud existuje), je "kolmý" k hladině V (přesněji k tečně hladiny V.)

Gradient funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ vázaného extrému vzhledem k množině V je také kolmý k V.

Oba gradienty jsou tedy lineárně závislé, nebo-li existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) + \lambda \operatorname{grad} h(x_0, y_0) = 0 \quad \wedge \quad h(x_0, y_0) = 0\,.$$

Konkrétně

$$\left.\begin{aligned} 2\,x_0 + \lambda \cdot 1 &= 0 \\ 2\,y_0 + \lambda \cdot 1 &= 0 \\ y_0 + x_0 - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} x_0 = \frac{1}{2}\,,\ y_0 = \frac{1}{2}\,,\ \lambda = -1\,.$$

Tímto způsobem však získáme pouze bod, ve kterém může být extrém funkce f vzhledem k množině V.

2) (optimalizační úloha s vazbami typu nerovnosti)

Řešíme úlohu $\min\{f(x,y),\ [x,y] \in \widehat{V}\}$, kde $f(x,y) = x^2 + y^2$; a přípustná množina $\widehat{V}$ je dána předpisem $\widehat{V} = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = y + x - 1 \le 0\}$.

Jestliže bod $[x_0, y_0]$ je vnitřní bod množiny $\widehat{V}$ a funkce f nabývá v tomto bodě extrému, pak podle věty (13.1) platí

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = 0$$

(pro diferencovatelnou funkci).

Jestliže bod $[x_0, y_0]$ je hraničním bodem množiny $\widehat{V}$ (neboli $g(x_0, y_0) = 0$) a funkce f nabývá v tomto bodě extrému vzhledem k její hranici $\partial\widehat{V}$ $(= V)$, pak podle první části příkladu existuje $\widehat{\lambda} \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) + \widehat{\lambda} \operatorname{grad} g(x_0, y_0) = 0$$

(opět pro diferencovatelné funkce).

Obě předchozí podmínky můžeme najednou zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} &\text{i)}\ \ \widehat{\lambda}\, g(x_0, y_0) = 0 \\ &\text{ii)}\ \ \operatorname{grad} f(x_0, y_0) + \widehat{\lambda} \operatorname{grad} g(x_0, y_0) = 0\,. \end{aligned}$$

Konkrétně

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{\lambda} \cdot (x_0 + y_0 - 1) = 0 \\ &(2x_0, 2y_0) + \widehat{\lambda} \cdot (1,1) = (0,0) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x_0 = \tfrac{1}{2}\,,\ y_0 = \tfrac{1}{2}\,,\ \widehat{\lambda} = -1 \\ &x_0 = 0\,,\ y_0 = 0\,,\ \widehat{\lambda} = 0\,. \end{aligned}$$

V bodě $[0,0]$ je zřejmě minimum funkce f vzhledem k množině $\widehat{V}$. V bodě $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ je minimum funkce f vzhledem k hranici množiny $\partial\widehat{V}$. Zbývá zjistit, zda je v tomto bodě extrém vzhledem k celé množině $\widehat{V}$.

Gradient funkce g směřuje ven z množiny $\widehat{V}$. Připomeňme, že gradient určuje směr největšího růstu funkce. Z rovnosti $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = -\widehat{\lambda}\, g(x_0, y_0)$ pak pro $\widehat{\lambda} < 0$ plyne, že funkce f "roste k hranici" množiny $\widehat{V}$ (na hranici může být maximum) a naopak pro $\widehat{\lambda} > 0$ klesá k hranici (může tam být minimum).

Konkrétně v našem příkladě je $\widehat{\lambda} = -1$, funkce f roste k hranici, ale na hranici $\partial\widehat{V}$ nabývá minima, tedy vzhledem k množině $\widehat{V}$ nemá funkce f v bodě $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ extrém.

Věta 13.3 : (Karushovy – Kuhnovy – Tuckerovy nutné podmínky vázaného extrému)

Nechť Ω je otevřená množina a funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je diferencovatelná na Ω.

i) Nechť $\mathbf{x}_0$ je bod vázaného lokálního extrému funkce f vzhledem k množině

$$V = \{\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : \ h_j(\mathbf{x}) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, p, \ \ p < n\},$$

kde $h_j(\mathbf{x})$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na Ω, a nechť vektory $\operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, jsou lineárně nezávislé. Potom $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$ je lineární kombinací vektorů $\operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, tj. **existují** reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ taková, že v bodě extrému platí

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

ii) Nechť $\mathbf{x}_0$ je bod lokálního vázaného extrému funkce f vzhledem k množině

$$\widehat{V} = \{\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \le 0, \ i = 1, 2, \ldots, m\},$$

kde $g_i(\mathbf{x})$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na Ω.

Nechť $I = \{i : g_i(\mathbf{x}_0) = 0\}$ je množina indexů těch vazeb, ve kterých v bodě $\mathbf{x}_0$ nastává rovnost (tzv. **aktivní vazba**), a nechť vektory $\operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0)$, $i \in I$, jsou lineárně nezávislé. Potom existují čísla $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \ldots, \widehat{\lambda}_m$ taková, že v bodě extrému $\mathbf{x}_0$ platí:

$a)$ $\widehat{\lambda}_i \, g_i(\mathbf{x}_0) = 0, \qquad \widehat{\lambda}_i \ge 0$ pro minimum, $i = 1, 2, \ldots, m$

$\widehat{\lambda}_i \le 0$ pro maximum, $i = 1, 2, \ldots, m$

$b)$ $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \sum\limits_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i \operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) = \vec{0}.$

<u>Důkaz</u> : i) Omezíme se na funkce $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

Nechť (x_0, y_0) je bod vázaného extrému funkce f s vazbou $h(x,y) = 0$. Z předpokladu $\operatorname{grad} h(x_0,y_0) \neq 0$ plyne $\frac{\partial h(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$ nebo $\frac{\partial h(x_0,y_0)}{\partial x} \neq 0$.

Předpokládejme, že $\frac{\partial h(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$ (pro $\frac{\partial h(x_0,y_0)}{\partial x} \neq 0$ je důkaz podobný). Pak rovnice $h(x,y) = 0$ je podle věty (12.17) v okolí bodu $[x_0, y_0]$ jednoznačně řešitelná a existuje diferencovatelná funkce $y = y(x)$, pro kterou $h(x, y(x)) = 0$, $y_0 = y(x_0)$. Odtud plyne

$$\frac{dh(x,y(x))}{dx}(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h(x_0,y_0)}{\partial x} + \frac{\partial h(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{dy(x_0)}{dx} = 0\,.$$

V bodě vázaného extrému x_0 funkce f musí platit (nutná podmínka extrému funkce jedné proměnné x)

$$\frac{df(x,y(x))}{dx}(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{dy(x_0)}{dx} = 0\,.$$

Z posledních dvou vztahů dostaneme (pro $f_y = 0$ je $f_x = 0$ a $\widehat{\lambda} = 0$)

$$-\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)} = -\frac{h_x(x_0,y_0)}{h_y(x_0,y_0)}\,.$$

Odtud vyplývá, že existuje konstanta $\widehat{\lambda}$ taková, že platí $f_x + \widehat{\lambda}\, h_x = 0\,,\ \ f_y + \widehat{\lambda}\, h_y = 0\,,$ neboli

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) + \widehat{\lambda} \operatorname{grad} h(x_0,y_0) = 0\,.$$

ii) Pro bod $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int} \widehat{V}$ je nutná podmínka extrému funkce f $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = 0$ (věta 13.1), tudíž pro $\widehat{\lambda}_i = 0$ jsou podmínky a), b) splněny.

Pro $\mathbf{x}_0 \in \partial\widehat{V}$ dostaneme z první části důkazu této věty podmínku b) $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i \operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) = \vec{0}\,.$

Pokud je v bodě $\mathbf{x}_0$ minimum (pro maximum je důkaz podobný) funkce f vzhledem k množině $\widehat{V}$, potom

$\exists\, U(\mathbf{x}_0)\, \forall\, \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \widehat{V} : f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0).$

Odtud vyplývá pro derivaci podle vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ nerovnost $0 \leq \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Spolu s podmínkou b) dostaneme $\sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i \operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \leq 0$.

Pro neaktivní vazby ($i \notin I, g_i(\mathbf{x}_0) \neq 0$) položíme $\widehat{\lambda}_i = 0$.

Pro aktivní vazby volíme $\mathbf{x} \in \partial\widehat{V}$ tak, že $\exists\, k \in I : g_k(\mathbf{x}) < 0 \wedge g_i(\mathbf{x}) = 0\,,\ i \in I\,, i \neq k\,,$ (jednu vazbu vynecháme). Protože hranice množiny $\widehat{V}$ je tvořena nulovými hladinami funkcí g_i, platí podle druhé části věty (12.9) rovnosti

$\operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = 0\,,\ i \neq k$. Odtud a z předchozí nerovnosti plyne $\widehat{\lambda}_k \operatorname{grad} g_k(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \leq 0$.

Protože $g_k(\mathbf{x}) < 0 \wedge g_k(\mathbf{x}_0) = 0$, tak $\operatorname{grad} g_k(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) < 0$, tedy $\widehat{\lambda}_k \geq 0$. (Pro $\operatorname{grad} g_k(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = 0$, dostaneme lineární závislost vektorů $\operatorname{grad} g_k(\mathbf{x}_0), \operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0), i \neq k$, což je ve sporu s předpokladem.)

Příklad 13.8: Najděte extrém funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ vzhledem k přípustné množině V, která je určená podmínkou $h(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$.

"Geometricky"

Hladiny funkce f jsou kružnice se středem v počátku a přípustná množina V je elipsa se středem v počátku.

V bodech $[-2,0]$, $[2,0]$ má funkce f maximum vzhledem k množině V.

V bodech $[0,-1]$, $[0,1]$ má funkce f minimum vzhledem k množině V.

"Přechod k jedné proměnné"

Položíme $x = 2\cos t\,,\ y = \sin t\,,\ t \in \langle 0, 2\pi)$.

Potom $f(t) = 4\cos^2 t + \sin^2 t\,,\ f'(t) = -3\sin 2t,\ f'(t) = 0$ pro $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$, $t_3 = \pi$, $t_4 = \frac{3\pi}{2}$.

Zároveň $f''(0) = f''(\pi) = -12 < 0 \Rightarrow$ maximum a $f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2}) = 12 > 0 \Rightarrow$ minimum.

"Kuhnovy – Tuckerovy nutné podmínky"

V bodě $[x,y]$ vázaného extrému funkce f musí platit

$\operatorname{grad} f(x,y) + \lambda \operatorname{grad} h(x,y) = 0 \ \wedge\ h(x,y) = 0$. Tedy

$$\left.\begin{aligned} &2x + \lambda \tfrac{x}{2} = 0 \\ &2y + \lambda\, 2y = 0 \\ &\tfrac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x = 0\,,\ y = \pm 1\,,\ \lambda = -1\,, \\ &y = 0\,,\ x = \pm 2\,,\ \lambda = -4\,. \end{aligned}$$

Poslední metodou jsme získali (ne vždy všechny) body, ve kterých může být extrém funkce f vzhledem k množině V. Pomocí následující metody se pokusíme rozhodnout, zda v daných bodech je vázané maximum nebo minimum funkce f.

Metoda Lagrangeovy funkce

Tato metoda je velmi univerzální a řada jejích modifikací je základem účinných numerických metod. Samotná Lagrangeova funkce je základem tzv. teorie duality v optimalizačních úlohách.

Základní myšlenka metody spočívá v tom, že se pro optimalizační úlohu sestrojí pomocná Lagrangeova funkce tak, že nutné podmínky minima pro úlohu s vazbami (věta (13.4) se stanou podmínkami stacionárního bodu Lagrangeovy funkce.

Pro úlohu z předchozího příkladu definujeme Lagrangeovu funkci vztahem

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, h(x, y)\,.$$

Koeficient λ se nazývá **Langrangeův multiplikátor**. Pro body $[x, y] \in V$ platí $L(x, y, \lambda) = f(x, y)$, to znamená, že funkce L, f mají stejné extrémy vzhledem k množině V.

Pro stacionární bod $[x, y, \lambda]$ Lagrangeovy funkce L platí $\operatorname{grad} L(x, y, \lambda) = \vec{0}$, tedy

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial L}{\partial x} &= \tfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \tfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \tfrac{\partial L}{\partial y} &= \tfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \tfrac{\partial h}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \operatorname{grad} f + \lambda \operatorname{grad} h = 0\,,$$
$$\tfrac{\partial L}{\partial \lambda} = h(x, y) = 0\,,$$

což odpovídá nutným podmínkám vázaného extrému.

Nyní budeme předpokládat, že funkce f, h jsou dvakrát diferencovatelné a odvodíme vztah pro druhý diferenciál Lagrangeovy funkce.

$$
\begin{aligned}
d^2L = \;& \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\,dy^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}}_{=0}\,d\lambda^2 \\
& +2\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}\,dx\,d\lambda + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}\,dy\,d\lambda\right) \\
= \;& \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 \\
& +\lambda\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\,dy^2\right) \\
& +2\,\underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\,dx + \frac{\partial h}{\partial y}\,dy\right)}_{=dh=0 \text{ vazba}}\,d\lambda \\
= \;& d^2 f + \lambda\,d^2 h\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 13.9 : Vrátíme se k předchozímu příkladu (13.8), kde hledáme extrém funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ vzhledem k přípustné množině $V = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\,;\; \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0\}$.

Druhý diferenciál Lagrangeové funkce je dán vztahem

$d^2L = 2\,dx^2 + 2\,dy^2 + \lambda\,(\frac{1}{2}\,dx^2 + 2\,dy^2)$

a vazbová podmínka je $dh = \frac{x}{2}\,dx + 2y\,dy = 0$.

Ve stacionárních bodech Lagrangeové funkce platí

$[0,\pm 1]\,,\ \lambda = -1$	stac. body	$[\pm 2, 0]\,,\ \lambda = -4$
$dy = 0$	vazba	$dx = 0$
$d^2L = \frac{3}{2}\,dx^2 +\ dy^2 > 0$		$d^2L = -6\,dy^2 < 0$
minimum	typ extrému	maximum

Poznamenejme, že v bodech $[\pm 2, 0]$ je maximum funkce f i vzhledem k množině $\widehat{V} = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\,;\; \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \le 0\}$, neboť funkce f směrem k hranici $\partial\widehat{V}$ roste ($\lambda = -4 < 0$).

Naopak v bodech $[0, \pm 1]$ není extrém funkce f vzhledem k množině $\widehat{V}$.

Poznámka 13.4: V úlohách s vazbami najdeme metodou Lagrangeovy funkce body, v nichž může nastat extrém (vycházíme z nutných podmínek). Na příkladu jsme ukázali, že postačující podmínky lze získat z druhého diferenciálu Lagrangeovy funkce.

Věta 13.4 : (postačující podmínky vázaného extrému)

Nechť Ω je otevřená množina a funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná na Ω.

i) Nechť $\mathbf{x}_0$ splňuje nutné podmínky vázaného lokálního extrému funkce f vzhledem k množině

$$V = \{\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : \; h_j(\mathbf{x}) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, p, \;\; p < n\}$$

z věty (13.3). Tedy existují reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ taková, že v bodě $\mathbf{x}_0 \in V$ platí

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}\,.$$

Nechť pro každý nenulový vektor $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ takový, že $\operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} = 0, \; j = 1, 2, \ldots, p$, platí

$$d^2 f(\mathbf{x}_0,\, d\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \, d^2 h_j(\mathbf{x}_0,\, d\mathbf{x}) > 0 \; (< 0)\,.$$

Potom $\mathbf{x}_0$ je bod ostrého (lokálního) minima (maxima) funkce f vzhledem k množině V.

ii) Nechť $\mathbf{x}_0$ splňuje nutné podmínky lokálního vázaného extrému funkce f vzhledem k množině

$$\widehat{V} = \{\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$$

z věty (13.3).
Tedy existují čísla $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \ldots, \widehat{\lambda}_m$ taková, že v bodě $\mathbf{x}_0$ platí:

$$\begin{aligned} &\widehat{\lambda}_i\, g_i(\mathbf{x}_0) = 0, \qquad &&\widehat{\lambda}_i \geq 0 \text{ pro minimum}, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ & &&\widehat{\lambda}_i \leq 0 \text{ pro maximum}, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ &\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{m} &&\widehat{\lambda}_i \operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

Dále $I = \{i : g_i(\mathbf{x}_0) = 0\}$ je množina indexů těch vazeb, ve kterých v bodě $\mathbf{x}_0 \in \widehat{V}$ nastává rovnost (tzv. **aktivní vazba**).
Nechť pro každý nenulový vektor $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ takový, že
$\operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} = 0$, pro indexy i, pro které $\widehat{\lambda}_i > 0 \quad (\widehat{\lambda}_i < 0)$,
$\operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} \leq 0$, pro ostatní indexy $i \in I$,
platí

$$d^2 f(\mathbf{x}_0,\, d\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, d^2 h_j(\mathbf{x}_0,\, d\mathbf{x}) > 0 \ (< 0)\,.$$

Potom $\mathbf{x}_0$ je bod ostrého (lokálního) minima (maxima) funkce f vzhledem k množině $\widehat{V}$.

<u>Příklad 13.10</u>: Stanovte extrém funkce $f(x, y) = xy$ na přípustné množině V určené podmínkou $x + y - 1 = 0$.

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 1).$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda\,,\ \frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda\,,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1\,.$$

Stacionární bod

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2}\,, \quad \lambda = -\frac{1}{2}\,.$$

Máme $df = ydx + xdy,\ d^2 f = 2dx\, dy,\ dx + dy = 0$ na V.
Proto

$$d^2 f = 2dx\,(-dx) = -2dx^2 < 0\,.$$

Bod $\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ je bodem maxima f na V; $\max f = \frac{1}{4}$.

Jde o úlohu najít mezi kvádry jednotkového objemu ten, který má minimální povrch (je to krychle!).

Příklad 13.11 : Stanovte extrém funkce $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ na množině $V = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ xyz - 1 = 0\}$.
Lagrangeova funkce: $L(x,y,z,\lambda) = xy+yz+xz+\lambda(xyz-1)$.
Nutné podmínky:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial x}: & y+z+\lambda yz=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}: & x+z+\lambda xz=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}: & y+x+\lambda xy=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} xy+xz+\lambda xyz=0 \\ xy+yz+\lambda xyz=0 \\ yz+xz+\lambda xyz=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=y,\ z\neq 0, \\ y=z,\ x\neq 0. \end{array}$$

Přípustným bodem je $S = [1,1,1]$; pak $\lambda = -2$. Prověříme splnění postačujících podmínek podle věty (13.4). Platí $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 + \lambda z$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 1 + \lambda y$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 1 + \lambda x$, $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0$. Zde

$$\mathbf{z}[\mathbb{H}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0,\widehat{\lambda})]\mathbf{z}^T = (z_1,z_2,z_3)\begin{pmatrix} 0 & 1+\lambda z & 1+\lambda y \\ 1+\lambda z & 0 & 1+\lambda x \\ 1+\lambda y & 1+\lambda x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$= 2(1+\lambda z)z_1z_2 + 2(1+\lambda y)z_1z_3 + 2(1+\lambda x)z_2z_3\big|_{S,\lambda=-2}$$

$$= -2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)\ ;$$

$$\mathbf{z}^T \operatorname{grad} h(x,y,z) = \mathbf{z}^T \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}_S = z_1 + z_2 + z_3\,.$$

Dosazením $z_3 = -z_1 - z_2$ dostaneme $-2(z_1z_2 - z_1^2 - z_1z_2 - z_1z_2 - z_2^2) = 2(z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2) = \frac{1}{2}(4z_1^2 + 4z_1z_2 + 4z_2^2)$.

Tato kvadratická forma má pozitivně definitní matici $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 2$), proto bod $S = [1,1,1]$ je bodem minima.

Příklad 13.12 : Stanovte extrém funkce $f(x,y,z) = xyz$ na množině $V = \{(x,y,z) = \mathbb{R}^3 : \ xy + yz + xz - 3 = 0\}$.
Lagrangeova funkce: $L(x,y,z) = xyz + v(xy + yz + xz - 3)$.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial L}{\partial x}:\ yz+v(y+z)=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}:\ xz+v(x+z)=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}:\ xy+v(x+y)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}xyz+v(xy+xz)=0\\ xyz+v(xy+yz)=0\\ xyz+v(yz+xz)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\ \begin{array}{l}x=y,v\neq0,z\\ y=z,v\neq0,x\end{array}$$

Přípustné body:

$$S=[1,1,1]\,;\quad \text{pak}\ \ v=-\tfrac{1}{2}\,;$$
$$\overline{S}=[-1,-1,-1]\,;\quad \text{pak}\ \ v=\tfrac{1}{2}\,.$$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=0\,,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=z+v\,,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}=y+v\,,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=0\,,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}=x+v\,,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}=0\,.$

V bodě S je:

$$\mathbf{z}\,[\mathbb{H}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{v})]\,\mathbf{z}^T=(z_1,z_2,z_3)\begin{pmatrix}0&\frac12&\frac12\\ \frac12&0&\frac12\\ \frac12&\frac12&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3,$$

$$\mathbf{z}\,\mathrm{grad}^{\,T}h(x,y,z)=\mathbf{z}\begin{pmatrix}y+z\\ x+z\\ y+x\end{pmatrix}_S=2z_1+2z_2+2z_3\,.$$

Z podmínky $z_1+z_2+z_3=0$ dosadíme $z_3=-z_1-z_2$ do kvadratické formy $z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$ a dostaneme $-(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)$. Tato forma je negativně definitní, a proto bod $S=[1,1,1]$ je bodem maxima. Analogicky zjistíme, že bod $S=[-1,-1,-1]$ je bodem minima.

14 Diferencovatelná zobrazení

14.1 Základní pojmy

Definice 14.1 : (vektorová funkce)
Mějme m funkcí $f_i : \ \Omega \to \mathbb{R}, \ \Omega \subset \mathbb{R}^n, \ i = 1, 2, \ldots, m$. Zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$ se nazývá **vektorová funkce vektorového argumentu**. Funkce $f_i, \ i = 1, 2, \ldots, m$ se nazývají **složky vektorové funkce**.

Příklad 14.1 : Máme vektorovou funkci $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2) = (y_1, y_2)$, kde

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 \,, \\ y_2 &= x_1 + 3x_2 \,, \end{aligned} \quad \text{maticově } \ \mathbf{y} = \mathbb{A} \cdot \mathbf{x} \,, \ \text{kde } \ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Body $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ zobrazujeme v jednom kartézském systému a jejich obrazy $[y_1, y_2] \in \mathbb{R}^2$ v jiném kartézském systému.

Uvedená vektorová funkce přiřazuje bodům čtverce $PABC$ body rovnoběžníka $P'A'B'C'$ tak, že $P \to P', \ A \to A', \ldots$. Konkrétně čtverec $P[0,0]\, A[1,0]\, B[1,1]\, C[0,1]$ se zobrazí na rovnoběžník $P'[0,0]\, A'[2,1]\, B'[3,4]\, C'[1,3]$.

Poznamenejme, že obsah rovnoběžníka $\operatorname{meas}(P'A'B'C')$ je roven 5 a hodnota determinantu matice $\det A$ je také 5, tedy platí

$$\operatorname{meas}(P'A'B'C') = \det A \cdot \operatorname{meas}(PABC) \,.$$

Zároveň platí

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} y_1 \\ \\ \operatorname{grad} y_2 \end{pmatrix} .$$

Uvedené vlastnosti zobecníme v následujícím textu.

Definice 14.2 : (spojitost vektorové funkce)
Bod (vektor) $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ se nazývá **limita vektorové funkce f** v hromadném bodě $\mathbf{x}_0$ množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, píšeme

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0\,,$$

když pro každou posloupnost $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ platí $f(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{y}_0$.
Když $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, pak říkáme, že **vektorová funkce** f **je spojitá v bodě** $\mathbf{x}_0$. Vektorová funkce $\mathbf{f}$ je spojitá na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, je-li spojitá v každém bodě $\mathbf{x} \in \Omega$.

Věta 14.1 : (spojitost po složkách)

i) Funkce $\mathbf{f}$ má v bodě $\mathbf{x}_0$ limitu $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0m})$ právě tehdy, když $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_{0i}\,,\ i = 1, 2, \ldots, m\,.$

ii) Vektorová funkce $\mathbf{f}$ je spojitá v bodě $\mathbf{x}_0$ právě tehdy, když funkce $f_i\,,\ \ i = 1, 2, \ldots, m$ jsou spojité v bodě $\mathbf{x}_0$.

<u>Důkaz</u> : je zřejmý.

Definice 14.3 : (diferencovatelnost vektorové funkce)
Vektorová funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o složkách $f_1, f_2, \ldots, f_m$ je **diferencovatelná** v bodě $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, jestliže funkce $f_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, m$ jsou diferencovatelné v bodě $\mathbf{x}_0$. **Diferenciálem vektorové funkce f** je potom vektor

$$d\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \begin{pmatrix} df_1(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \\ df_2(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \\ \ldots\ldots\ldots \\ df_m(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(\mathbf{x}_0)\,\vec{h} \\ \operatorname{grad} f_2(\mathbf{x}_0)\,\vec{h} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \operatorname{grad} f_m(\mathbf{x}_0)\,\vec{h} \end{pmatrix} = \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)\vec{h}\,.$$

Zde opět $\vec{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Matice $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$ (typu (m, n)), jejíž řádky jsou $\operatorname{grad} f_i(\mathbf{x}_0)$, se nazývá **derivace vektorové funkce f v bodě** $\mathbf{x}_0$ nebo také **Jacobiova matice vektorové funkce f**. Tuto matici také označujeme

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \operatorname{grad}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{D(\mathbf{f})}{D(\mathbf{x})} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\,.$$

Pro $m = n$ se determinant Jacobiovy matice $\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ nazývá **jakobián**.

Definice 14.4 : (regulární vektorová funkce)
Vektorová funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ se nazývá **regulární ve vnitřním bodě** $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, jestliže

1. prvky Jacobiovy matice jsou spojité funkce v bodě $\mathbf{x}$ (tj. $\mathbf{f}$ je spojitě diferencovatelná),
2. $\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$.

Vektorová funkce $\mathbf{f}$ je **regulární** v Ω, je-li regulární v každém vnitřním bodě $\mathbf{x} \in \Omega$.

Věta 14.2 : (O lokálně inverzní vektorové funkcí)
Nechť vektorová funkce $\mathbf{f} : X \mapsto Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ je spojitá na X a regulární v bodě $\mathbf{x}_0 \in X$. Potom existují okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset X$ bodu $\mathbf{x}_0$ a okolí $U(\mathbf{y}_0) \subset Y$ bodu $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ taková, že $\mathbf{f}$ bijektivně (vzájemně jednoznačně) zobrazuje $U(\mathbf{x}_0)$ na $U(\mathbf{y}_0)$. K restrikci $\mathbf{f}$ na $U(\mathbf{x}_0)$ tak existuje inverzní vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1} : U(\mathbf{y}_0) \mapsto U(\mathbf{x}_0)$, která je regulární, a platí

$$\frac{D(\mathbf{f}^{-1})}{D(\mathbf{y}_0)} = \left(\frac{D(\mathbf{f})}{D(\mathbf{x}_0)} \right)^{-1},$$

tj. Jacobiova matice inverzní vektorové funkce je inverzní maticí k Jacobiově matici původní vektorové funkce.

Polární souřadnice

Vyšetříme vektorovou funkci $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $[r, \varphi] \mapsto [x, y]$ danou vztahy

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Pro libovolné $[r, \varphi] \in \mathbb{R}^2$ je $\mathbf{f}$ diferencovatelná funkce a platí

$$\mathbf{f}' = \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = \frac{D[x, y]}{D(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi, & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi, & r \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad \det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = r\,.$$

Takže pro $r \neq 0$ je vektorová funkce $\mathbf{f}$ regulární. Není však na celém prostoru $\mathbb{R}^2$ bijektivní (obrazem různých bodů (r_1, φ_1), $(r_1, \varphi_1 + 2\pi)$ je tentýž bod).

Proto označíme

$$\mathcal{P} = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < r < +\infty, \ 0 \leq \varphi < 2\pi\}\,.$$

Potom vektorová funkce $\mathbf{f}$ zobrazuje množinu $\mathcal{P}$ na množinu $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$ bijektivně a existuje inverzní vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1} : X \mapsto \mathcal{P}$.

Tato inverzní vektorová funkce je dána vztahy:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad [x,y] \in X\,,$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}\,, & x > 0,\ y \geq 0\,, \\[2mm] \dfrac{\pi}{2}\,, & x = 0\,,\ y > 0\,, \\[2mm] \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}\,, & x < 0,\ y \in \mathbb{R}\,, \\[2mm] \dfrac{3\pi}{2}\,, & x = 0\,,\ y < 0 \\[2mm] 2\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}\,, & x > 0,\ y < 0\,. \end{cases}$$

Vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1}$ $([r,\varphi] = \mathbf{f}^{-1}[x,y])$ se nazývá **soustava polárních souřadnic**.

Pro jacobiovou matici funkce $\mathbf{f}^{-1}$ platí

$$\mathbb{J}_{\mathbf{f}^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \frac{-\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}\,.$$

Tedy $\qquad \mathbb{J}_{\mathbf{f}} \cdot \mathbb{J}_{\mathbf{f}^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$

Geometricky má číslo r význam vzdálenosti bodu $[x,y]$ od počátku a číslo φ význam úhlu mezi průvodičem bodu $[x,y]$ a kladným směrem osy x.

Vektorová funkce $\mathbf{f}$ zobrazí počátek do počátku, přímku danou rovností $r = R$ zobrazí na kružnici vyjádřenou parametricky rovnicemi $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ \varphi \in \mathbb{R}$. Obrazem přímky $\varphi = \varphi_1$ je polopřímka vyjádřená parametrickými rovnicemi $x = r\cos\varphi_1,\ y = r\sin\varphi_1$ (parametr $r \geq 0$).

Obrazem vyplněného obdélníku $\Omega_{\Delta r \Delta\varphi}$ je vyplněná výseč mezikruží $\Omega_{\Delta x \Delta y}$ a platí $\operatorname{meas}(\Omega_{\Delta x \Delta y}) \approx r \operatorname{meas}(\Omega_{\Delta r \Delta\varphi}) = \det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} \cdot \operatorname{meas}(\Omega_{\Delta r \Delta\varphi})$.

Věta 14.3 : (geometrický význam jakobiánu)
Nechť prosté regulární zobrazení $\mathbf{f}$ zobrazuje oblast $\Omega_{r\varphi}$ na oblast Ω_{xy}, potom platí (při označení $d = \operatorname{diam}\Omega_{r\varphi}$ (délka největší možné úsečky ležící v $\Omega_{r\varphi}$), meas (Ω) = míra oblasti Ω).

$$\lim_{d\to 0} \frac{\operatorname{meas}(\Omega_{xy})}{\operatorname{meas}(\Omega_{r\varphi})} = |\det J_{\mathbf{f}}|\,.$$

Pro malé d píšeme přibližnou rovnost

$$\operatorname{meas}(\Omega_{xy}) \approx |\det J_{\mathbf{f}}| \cdot \operatorname{meas}(\Omega_{r\varphi})\,.$$

Všimněme si, že pro funkci $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (hladká monotónní) píšeme tvrzení věty ve tvaru

$$\lim_{|\Delta x|\to 0} \frac{|\Delta \mathbf{f}|}{|\Delta x|} = |\mathbf{f}'|\,.$$

Cylindrické souřadnice

Nechť vektorová funkce $\mathbf{f}$ je dána transformačními rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\,,\\ y &= r\sin\varphi\,,\\ z &= z\,. \end{aligned}$$

Protože $\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = r$, je na množině $V = \{[r,\varphi,z] \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty\}$ tato vektorová funkce regulární a prostá a zobrazuje množinu V na množinu $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{osa } z\}$ vzájemně jednoznačně.

Inverzní vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1} :\ [x,y,z] \mapsto [r,\varphi,z]$, kde

$$\begin{aligned} & r = \sqrt{x^2+y^2}\\ & \varphi = \text{jediný kořen rovnic } \ \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi\,,\ \ \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi\,,\\ & z = z \end{aligned}$$

se nazývá **soustava cylindrických souřadnic**.

Sférické souřadnice

Máme vektorovou funkci $\mathbf{f}$ danou transformačními rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta,\\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta,\\ z &= r\sin\vartheta. \end{aligned}$$

Potom $\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = r^2 \cos\vartheta$ a jacobián je roven nule právě tehdy, když $r = 0$ nebo $\vartheta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vektorová funkce $\mathbf{f}$ je proto regulární a prostá na množině

$$V = \{[r, \varphi, \vartheta] \in \mathbb{R}^3 : 0 < r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}\}.$$

Inverzní vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1} :\ [x, y, z] \mapsto [r, \varphi, \vartheta]$

$\mathbf{f}^{-1}\ :\quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$
$\varphi =$ jediný kořen rovnic $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi\,,\quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi\,,$
$\vartheta =$ jediný kořen rovnice $\sin\vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

se nazývá **soustava sférických souřadnic**.

Pro pevné $\varphi = \varphi_0$ vznikne **souřadnicová plocha**, která je popsaná parametrickými rovnicemi $x = r\cos\varphi_0 \sin\vartheta$, $y = r\sin\varphi_0 \sin\vartheta$, $z = r\cos\vartheta$; je to ("poledníková") rovina procházející osou z.

Pro pevné $r = r_0$ je souřadnicová plocha dána parametrickými rovnicemi $x = r_0\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = r_0\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = r_0\cos\vartheta$; je to kulová plocha o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$.

Pro pevné $\vartheta = \vartheta_0$ je souřadnicovou plochou plocha kuželová.

15 Riemannův integrál v $\mathbb{R}^n$

15.1 Definice a základní vlastnosti Riemannova integrálu

Definice 15.1 : (Riemannův integrál v $\mathbb{R}$)
(i) Nechť $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Množina $D = \{x_0, x_1, \dots, x_k\,;\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b\}$ se nazývá **dělení intervalu** $\langle a, b\rangle$ a číslo $\nu(D) = \max\limits_{0\le i\le k-1}(x_{i+1} - x_i)$ se nazývá **krok (norma) dělení** D. Označíme

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_{i+1} - x_i\,; \\ M_i &= \sup f(x),\ x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle,\ i = 0, 1, \dots, k-1; \\ m_i &= \inf f(x),\ x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle,\ i = 0, 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Každému dělení D a funkci f přiřadíme čísla:
horní součet

$$U(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \Delta x_i,$$

dolní součet

$$L(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \Delta x_i,$$

integrální součet

$$J(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \xi_i \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle \text{ je libovolný bod.}$$

(ii) Řekneme, že funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na $\langle a, b\rangle$ (píšeme $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$), když existuje reálné číslo $I = I(f)$ takové, že
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall$ dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ s $\nu(D) < \delta$, $\forall \xi_i \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \dots, k-1$: $\quad |J(f, D) - I| < \varepsilon$.
Říkáme, že existuje limita integrálních součtů, a píšeme

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i = I.$$

Číslo I se nazývá **určitý Riemannův integrál** z funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ a značí se

$$I = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

<u>*Poznámka 15.1*</u>: Aby byla definice 15.1 korektní (tj. aby měla rozumný smysl), je nutný předpoklad omezenosti funkce f.

Definice 15.2 : (Riemannův integrál v $\mathbb{R}^2$)
(i) Nechť $Q = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \subset \mathbb{R}^2$. Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalů $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle$ ve smyslu definice 15.1, tj. množiny $\{x_0, x_1, \ldots, x_r\}$, $\{y_0, y_1, \ldots, y_s\}$. Množina D všech obdélníků

$$Q_{jk} = \langle x_j, x_{j+1}\rangle \times \langle y_k, y_{k+1}\rangle,$$

$j = 0, 1, \ldots, r-1$; $k = 0, 1, \ldots, s-1$, se nazývá **dělení obdélníku** Q a číslo

$$\nu(D) = \max_{\substack{0\le j\le r-1\\ 0\le k\le s-1}} \sqrt{(\Delta x_j)^2 + (\Delta y_k)^2}, \qquad \begin{aligned} \Delta x_j &= x_{j+1} - x_j,\\ \Delta y_k &= y_{k+1} - y_k, \end{aligned}$$

je **krok (norma) dělení** D
Nechť $f : Q \to \mathbb{R}$ je omezená funkce na $Q \subset \mathbb{R}^2$. Označíme

$$\begin{aligned} M_{jk} &= \sup f(x, y)\,, \quad [x, y] \in Q_{jk}\,;\\ m_{jk} &= \inf f(x, y)\,, \quad [x, y] \in Q_{jk}\,. \end{aligned}$$

Horní součet příslušný f a dělení D je definován vztahem

$$U(f, D) = \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-1} M_{jk}\Delta x_j \Delta y_k\,,$$
$$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j\,, \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k\,.$$

Dolní součet příslušný f a dělení D je definován vztahem

$$L(f, D) = \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-1} m_{jk}\Delta x_j \Delta y_k\,.$$

Integrální součet příslušný f a dělení D je definován vztahem
$$J(f,D)=\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j,\eta_k)\Delta x_j \Delta y_k\,,$$
kde $[\xi_j,\eta_k]\in Q_{jk}$ je libovolný bod.

(ii) Funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na Q (píšeme $f\in\mathcal{R}(Q)$), když existuje reálné číslo $I=I(f)$ takové, že
$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;\forall \text{ dělení } D \text{ obdélníku } Q \text{ takové, že}$$
$$\nu(D)<\delta \quad \forall\,(\xi_j,\eta_k)\in Q_{jk}:\;\; |J(f,D)-I|<\varepsilon\,.$$
Číslo
$$I=\lim_{\nu(D)\to 0} J(f,D)=\lim_{\nu(D)\to 0}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j,\eta_k)\Delta x_j\Delta y_k$$
se nazývá **dvojný Riemannův integrál** funkce f přes obdélník Q a značí se
$$I=\iint\limits_{Q} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{Q} f(x,y)\,dQ\,.$$

(iii) Nechť $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ je omezená oblast a na ní je definovaná omezená funkce f. Vybereme takový obdélník Q, aby $\Omega\subset Q$, a sestrojíme funkci
$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y)\,, & [x,y]\in\Omega\,,\\ 0\,, & [x,y]\in Q\setminus\Omega\,.\end{cases}$$
Dvojný integrál z funkce f přes Ω definujeme vztahem
$$\int\limits_{\Omega} f\,d\Omega=\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{Q} F(x,y)\,dxdy\,.$$

Řekneme, že f je **Riemannovsky integrovatelná na** Ω, píšeme $f\in\mathcal{R}(\Omega)$.

Definice 15.3 : (Riemannův integrál v $\mathbb{R}^3$)
(i) Nechť $Q = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \langle a_3, b_3\rangle$ je kvádr v $\mathbb{R}^3$. Nechť D_l jsou dělení intervalů $\langle a_l, b_l\rangle$, $l = 1, 2, 3$.
Množina kvádrů

$$Q_{ijk} = \langle x_i, x_{i+1}\rangle \times \langle y_j, y_{j+1}\rangle \times \langle z_k, z_{k+1}\rangle$$

se nazývá **dělení kvádru** Q. Číslo

$$\nu(D) = \max_{i,j,k} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2 + (\Delta z_k)^2}$$

je **krok (norma)** dělení D.
Nechť $f = f(x, y, z) : Q \to \mathbb{R}$ je omezená funkce na $Q \subset \mathbb{R}^3$. Analogicky jako v definicích 15.1, 15.2 se definují horní a dolní součty příslušné funkci f a dělení D. **Integrální součet** je číslo

$$J(f, D) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{p-1} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k\,,$$

kde $[\xi_i, \eta_j, \zeta_k] \in Q_{ijk}$ je libovolný bod.

(ii) Funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na Q, $f \in \mathcal{R}(Q)$, existuje-li číslo

$$I = \lim_{\nu(D)\to 0} J(f, D)$$

pro libovolné dělení D kvádru Q. Značí se

$$I = \iiint\limits_Q f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_Q f\; dQ\,, \quad Q \subset \mathbb{R}^3\,.$$

Číslo I se nazývá **trojný Riemannův integrál**.

(iii) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast a na ní je definovaná omezená funkce f. Vybereme takový kvádr Q, aby $\Omega \subset Q$ a sestrojíme funkci

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z)\,, & (x, y, z) \in \Omega\,, \\ 0\,, & (x, y, z) \in Q \setminus \Omega\,. \end{cases}$$

Funkce f je **Riemannovsky integrovatelná na** Ω, jestliže F je integrovatelná na Q, a definujeme

$$\int\limits_{\Omega} f\, d\,\Omega = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_{Q} F(x,y,z)\, dxdydz\,.$$

Definice 15.4 : (Riemannův integrál v $\mathbb{R}^n$)
(i) Nechť Q je kvádr v $\mathbb{R}^n$. Množina kvádrů

$$Q_{i_1,i_2,\dots,i_n} = \langle x^1_{i_1}, x^1_{i_1+1}\rangle \times \langle x^2_{i_2}, x^2_{i_2+1}\rangle \times \dots \times \langle x^n_{i_n}, x^n_{i_n+1}\rangle\,,$$

se nazývá **dělení kvádru** Q. Číslo

$$\nu(D) = \max_{i_1,\dots,i_n} \sqrt{(\Delta x^1_{i_1})^2 + (\Delta x^2_{i_2})^2 + \dots + (\Delta x^n_{i_n})^2}$$

se nazývá **krok (norma)** dělení D.
Nechť $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \ Q \to \mathbb{R}$ je omezená funkce na $Q \subset \mathbb{R}^n$. Analogicky jako v definici 15.2 se definují horní a dolní součty příslušné funkci f a dělení D. **Integrální součet** je číslo

$$J(f,D) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \dots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} f(\xi^1_{i_1}, \dots, \xi^n_{i_n}) \Delta x^1_{i_1} \Delta x^2_{i_2} \dots \Delta x^n_{i_n}\,,$$

kde $[\xi^1_{i_1}, \dots, \xi^n_{i_n}] \in Q_{i_1,\dots,i_n}$ je libovolný bod.

(ii) Funkce f se nazývá **Riemannovsky integrovatelná** na Q, existuje-li číslo

$$I = \lim_{\nu(D)\to 0} J(f,D)$$

pro libovolné dělení D kvádru Q. Značí se

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{Q}\!\dots\!\int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int\limits_{Q} f dQ = \int\limits_{Q} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,, \quad Q \subset \mathbb{R}^n\,. \end{aligned}$$

Číslo I se nazývá **Riemannovým integrálem v** $\mathbb{R}^n$ přes Q.

(iii) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast a na ní je definovaná omezená funkce f. Vybereme takový kvádr Q, aby $\Omega \subset Q$, a definujeme funkci

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0, & \mathbf{x} \in Q - \Omega. \end{cases}$$

Funkce f je **integrovatelná na** Ω, je-li F integrovatelná na Q, a definujeme

$$\int_\Omega f \, d\Omega = \int_\Omega f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_Q F(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Věta 15.1 : (Kritérium integrovatelnosti)
Omezená funkce f je Riemannovsky integrovatelná na kvádru (n-rozměrném intervalu) $Q \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D kvádru Q takové, že

(1) $$0 \leq U(f, D) - L(f, D) < \varepsilon.$$

<u>Důkaz</u> : je budován na celé řadě tvrzení a představuje jádro teorie Riemannova integrálu. Součástí této teorie je mimo jiné též teorie měřitelnosti množin $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Věta 15.2 : (důsledek kritéria integrovatelnosti) Funkce f je Riemannovsky integrovatelná právě tehdy, když

$$\inf_D U(f, D) = \sup_D L(f, D) = I.$$

<u>Důkaz</u> : Podmínka (1) z předchozí věty je splněna právě tehdy, když $\inf\limits_D U(f, D) \leq \sup\limits_D L(f, D)$. Zároveň pro každé dělení D platí

$$L(f, D) \leq J(f, D) \leq U(f, D).$$

Odtud plyne $\lim\limits_{\nu(D) \to 0} J(f, D) = I$ a funkce f je Riemannovsky integrovatelná.

<u>*Příklad 15.1*</u> : Dirichletova funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \ \text{je racionální číslo,} \\ 0 & x \ \text{je iracionální číslo,} \end{cases}$$

$x \in \langle a, b \rangle$, není Riemannovsky integrovatelná:

$U(f, D) = b - a$ pro každé dělení D, neboť $\sup f = 1$ na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$;

$L(f, D) = 0$, protože $\inf f = 0$ na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$.

<u>*Příklad 15.2*</u> : Funkce $f(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, není na žádném intervalu obsahujícím nulu Riemannovsky integrovatelná, neboť f je neomezená na libovolném okolí nuly. Existuje však Newtonův integrál z funkce f, neboť

$$F(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}\,, & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

je primitivní funkce k f. Proto

$$(\mathcal{N}) \int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) = \sin 1\,.$$

<u>*Příklad 15.3*</u> : Funkce $f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0\,, & x \in \langle -1, 0) \end{cases}$

je omezená a Riemannovsky integrovatelná. Není však Newtonovsky integrovatelná. Kdyby totiž existovala primitivní funkce F k funkci f, pak funkce F musí být spojitá a muselo by platit $F(x) = \begin{cases} x + c\,, & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ c\,, & x \in \langle -1, 0) \end{cases}$ $c \in \mathbb{R}$. Funkce F však není diferencovatelná v bodě 0, tedy F není primitivní k f.

<u>*Poznámka 15.2*</u>: Integrovatelnost funkce (v Riemannově smyslu) je vlastnost, která se nemění při změně funkce v konečně mnoha bodech, tj.:
nechť f, g jsou definovány na $\langle a, b \rangle$, $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ a g se liší od f v konečně mnoha bodech intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom $g \in R(\langle a, b \rangle)$ a platí

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

Věta 15.3 : (výpočet Riemannova integrálu)
Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a nechť existuje primitivní funkce F k funkci f na $\langle a,b\rangle$, tj. $F'(x) = f(x)\,, \quad x \in \langle a,b\rangle$. Potom $f \in \mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$ (f má Newtonův integrál na $\langle a,b\rangle$) a platí

$$(\mathcal{N})\int\limits_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int\limits_a^b f(x)\,dx\,.$$

<u>Důkaz</u> : Zvolme libovolné dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\begin{aligned}(\mathcal{N})\int\limits_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1}(\mathcal{N})\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}[F(x_{i+1}) - F(x_i)] = \\ &= \text{(věta o střední hodnotě)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\,.\end{aligned}$$

Protože předpokládáme $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, platí

$$\lim_{\nu(D)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = I = (\mathcal{R})\int\limits_a^b f(x)\,dx\,.$$

Tím je důkaz proveden.

Věta 15.4 :
Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Potom funkce

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)\,dt$$

je spojitá na $\langle a,b\rangle$. Je-li navíc f spojitá na $\langle a,b\rangle$, potom F je diferencovatelná a platí

$$F'(x) = f(x)\,, \quad x \in \langle a,b\rangle\,.$$

<u>Důkaz</u> : Když $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, potom f je omezená a platí $|f(x)| \le M,\ x \in \langle a,b\rangle$; protože pro $x, y_0 \in \langle a,b\rangle$ platí

$$F(x) - F(x_0) = \int\limits_a^x f(x)\,dt - \int\limits_a^{x_0} f(x)\,dt = \int\limits_{x_0}^x f(x)\,dt\,,$$

dostaneme odtud

$$|F(x)-F(x_0)| \le M \int_{x_0}^{x} dt = M|x-x_0|, \quad \text{tj.} \quad F \text{ je spojitá}.$$

Nechť f je spojitá v bodě $x_0 \in \langle a, b\rangle$, tj. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pro každé $x \in P(x_0, \delta)$. Pak také

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \le \frac{\int_{x_0}^{x} |f(x) - f(x_0)|\, dt}{|x - x_0|} \le \frac{\varepsilon|x - x_0|}{|x - x_0|} = \varepsilon$$

pro $x \in P(x_0, \delta)$, tj. $F'(x_0) = f(x_0)$.

Poznámka 15.3:

(i) Věta 15.4 uvádí, že ke spojité funkci na $\langle a, b\rangle$ existuje primitivní funkce, a tedy platí $C(\langle a, b\rangle) \subset \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$.

(ii) Má-li omezená funkce f na $\langle a, b\rangle$ konečný počet bodů nespojitosti, potom existuje zobecněná primitivní funkce $F(x)$ (definice 6.8, MA I) a f má zobecněný Newtonův integrál.

(iii) Věty o per partes a substituci zůstávají v platnosti i pro Riemannův integrál.

(iv) Nevlastní Riemannovy integrály definujeme obdobným způsobem jako nevlastní Newtonovy integrály; pro funkci $f \in \mathcal{R}(\langle a, x\rangle)$, $x > a$ definujeme

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(x)\, dt,$$
$$\int_a^b f(x)\, dt = \lim_{x\to b-} \int_a^x f(x)\, dt.$$

Definice 15.5 : (hlavní hodnota)
Nechť f je definovaná na množině všech reálných čísel $\mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$. Existuje-li limita

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, dx = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,$$

nazýváme ji **hlavní hodnotou nevlastního integrálu** od $-\infty$ do ∞ z funkce f.

Poznámka 15.4 :

(i) Pozor! Existuje-li hlavní hodnota integrálu, pak

$$\lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\, dx$$

existovat nemusí! Např.

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x\, dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \sin x\, dx = 0\,,$$

ale $\lim\limits_{r\to\infty} \int_a^r \sin x\, dx$ neexistuje pro žádné $a \in \mathbb{R}$!

(ii) Analogicky definujeme hlavní hodnotu nevlastního integrálu vlivem funkce:

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx \right) .$$

Například

$$\text{v.p.} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon\to 0} (\ln\varepsilon - \ln\varepsilon) = 0\,.$$

Definice 15.6 : (míra množiny)
Omezená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **měřitelná**, je-li funkce $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ integrovatelná na Ω. Hodnota integrálu

$$\text{meas}\,(\Omega) = \int_{\Omega} 1\, d\mathbf{x}$$

se nazývá **míra množiny** Ω (**Jordanova míra**).
Množina Ω, pro níž platí $\text{meas}\,(\Omega) = 0$, se nazývá **množina míry nula**.

Příklad 15.4 :

1) Konečná množina a omezená spojitá křivka mají dvourozměrnou i trojrozměrnou míru nula. Regulární plocha má trojrozměrnou míru nula.

2) Nechť $\Omega = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, potom $\int\limits_{\Omega} 1 \, d\mathbf{x} = 0$.

Zde vidíme, že i míra nekonečné spočetné množiny může být nula. V příkladu (**??**) (Dirichletova funkce) jsme však ukázali nekonečnou spočetnou množinu, která je neměřitelná (v Jordanově smyslu). Tento problém řeší Lebesgueova míra.

Definice 15.7 : (nulová funkce) Jestliže se f liší od nulové funkce na množině míry nula, řekneme, že f je **skoro všude** (ve smyslu Jordanovy míry) nulová. Jinak řečeno

$$\int\limits_{\Omega} |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \quad \text{s.v.}$$

Věta 15.5 : (Vlastnosti integrovatelných funkcí)

1. Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$ a $f \in \mathcal{R}(\Omega_2)$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Potom $f \in \mathcal{R}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ a platí

$$\int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega_1} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega_2} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} .$$

2. Množina $\mathcal{R}(\Omega)$ je lineárním prostorem.
3. Je-li $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ a $g \in \mathcal{R}(\Omega)$, potom $f \cdot g \in \mathcal{R}(\Omega)$.
4. Je-li $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, $g \in \mathcal{R}(\Omega)$ a $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \ \ \forall \mathbf{x} \in \Omega$, potom

$$\int\limits_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int\limits_{\Omega} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} .$$

5. Je-li $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, potom $|f| \in \mathcal{R}(\Omega)$ a platí

$$\left| \int\limits_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq \int\limits_{\Omega} |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} .$$

15.2 Metody výpočtu dvojných a trojných integrálů

Dvojné a trojné integrály počítáme analyticky tak, že je převedeme na tzv. **dvojnásobné a trojnásobné integrály**, jejichž výpočet provedeme pomocí známých metod užívaných pro integrály z funkcí jedné proměnné.

Věta 15.6 : (Fubiniova věta pro obdélník)
Nechť $f \in \mathcal{R}(Q)$, $Q = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Když $f(x,y) \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ pro každé $y \in \langle c,d\rangle$, potom platí

$$\iint\limits_Q f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy\,.$$

Když $f(x,y) \in \mathcal{R}(\langle c,d\rangle)$ pro každé $x \in \langle a,b\rangle$, pak platí

$$\iint\limits_Q f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

<u>Důkaz</u> : Vyplývá z uzávorkování integrálního součtu

$$\begin{aligned} J(f,D) &= \sum_{k=0}^{s-1} \left(\sum_{j=0}^{r-1} f(\xi_j,\eta_k)\Delta x_j \right) \Delta y_k \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j,\eta_k)\Delta x_j \Delta y_k = \sum_{j=0}^{r-1} \left(\sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j,\eta_k)\Delta y_k \right) \Delta x_j \end{aligned}$$

a o předpoklady integrovatelnosti.

V podstatě jsme dvojný integrál převedli na dvojnásobný. (Podobně jako u vztahu dvojné a dvojnásobné limity musí "vnitřní limita" existovat, aby nastala rovnost.)

<u>*Příklad 15.5*</u> : $Q = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,3\rangle$. Vypočtěte

$$I = \iint\limits_Q x^y\,dxdy\,.$$

Buď

$$I = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_0^1 x^y\,dx \right) dy = \int\limits_1^3 \left(\frac{x^{y+1}}{y+1} \right)_0^1 dy = \int\limits_1^3 \frac{1}{y+1}\,dy = [\ln(y+1)$$

nebo

$$I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_1^3 x^y\,dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} \mathrm{e}^{y \ln x} \right)_1^3 dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{\ln x} (\mathrm{e}^{3\ln x} - \mathrm{e}^{\ln x})$$

V druhém případě nelze stanovit primitivní funkci pomocí konečného počtu elementárních funkcí.

Věta 15.7 : (Fubiniova věta pro elementární oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$)

(i) Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, kde

$$\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

je tzv. **elementární oblast** určená grafy funkcí $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx,$$

pokud vnitřní integrál existuje pro každé $x \in \langle a, b\rangle$.

(ii) Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, kde elementární oblast

$$\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

je určena grafy funkcí $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $y \in \langle c, d\rangle$. Potom platí

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f[x, y]\, dx \right) dy,$$

pokud vnitřní integrál existuje pro každé $y \in \langle c, d\rangle$.

Důkaz : spočívá v převodu integrace přes Ω na integraci přes obdélník Q ve smyslu definice (15.2), část (iii) a následném použití věty (15.6).

Příklad 15.6 : Množina Ω je zadána nerovnostmi $0 \le x \le 1,\ x \le y \le \sqrt{x}$ nebo $0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le y$ Vypočtěte $I = \iint_{\Omega} xy\, dxdy$.

Uvedeme obě fáze výpočtu při použití věty (15.7):

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} xy\, dy \right) dx \quad\Downarrow\quad \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} \right)_x^{\sqrt{x}} dx \quad\Downarrow\quad \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right) dx \quad\Downarrow\quad \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} \right)_0^1 \quad\Downarrow\quad \frac{1}{24}$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} xy\, dx \right) dy \quad\Downarrow\quad \int_0^1 \left(\frac{yx^2}{2} \right)_{y^2}^{y} dy \quad\Downarrow\quad \int_0^1 \left(\frac{y^3}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dy \quad\Downarrow\quad \left(\frac{y^4}{8} - \frac{y^6}{12} \right)_0^1 \quad\Downarrow\quad \frac{1}{24}$$

Poznámka 15.5: řadu oblastí v rovině můžeme vyjádřit jako konečné sjednocení elementárních oblastí: např. pokud Ω rozdělíme na čtyři elementární oblasti: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$. Potom symbolicky

$$\int_\Omega = \int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} + \int_{\Omega_3} + \int_{\Omega_4} .$$

Věta 15.8 : (Substituce v dvojném integrálu – transformace souřadnic ve dvojném integrálu)
Nechť $\Omega_{r\varphi} \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená měřitelná množina a nechť funkce $x = x(r,\varphi)$, $y = y(r,\varphi)$ určují prosté regulární zobrazení $\mathbf{f}$ množiny $\Omega_{r\varphi}$ na množinu $\Omega_{xy} \subset \mathbb{R}^2$. Nechť dále máme funkci $f : \Omega_{xy} \to \mathbb{R}$, která je spojitá na Ω_{xy}. Potom platí

$$\iint_{\Omega_{xy}} f(x,y)\, dxdy = \iint_{\Omega_{r\varphi}} f(x(r,\varphi), y(r,\varphi))\, |\det J_{\mathbf{f}}|\, drd\varphi,$$

kde $J_{\mathbf{f}} = \frac{D[x,y]}{D(r,\varphi)}$ je Jacobiova matice zobrazení $\mathbf{f}$ (viz větu 14.5).

Princip důkazu Uvažujme integrální součet

$$J(f,D) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j)\, \underbrace{\Delta x_i\ \Delta y_j}_{\text{meas}\,(\Omega_{ij}^{xy})}$$

Pro malé $\Delta x_i,\ \Delta y_j$ máme (věta (**??**))

$$\text{meas}\,(\Omega_{ij}^{xy}) \approx |\det J_{\mathbf{f}}|\ \text{meas}\,(\Omega_{ij}^{r\varphi}) = |\det J_{\mathbf{f}}|\ \Delta r_i\ \Delta\varphi_j\,.$$

Proto

$$J(f,D) \approx \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f(x(\widehat{r}_i,\widehat{\varphi}_j), y(\widehat{r}_i,\widehat{\varphi}_j)) \,|\det J_{\mathbf{f}}|_{\widehat{r}_i,\widehat{\varphi}_j}\; \Delta r_i\; \Delta\varphi_j\,.$$

Limitním přechodem pro $\nu(D) \to 0$ dostaneme tvrzení věty.

Příklad 15.7: Převod dvojného integrálu funkce $f(x,y)$ přes Ω_{xy} do polárních souřadnic

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \quad r>0,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi\,. \end{aligned}$$

Zde

$$J_{\mathbf{f}} = \frac{D[x,y]}{D(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}\,, & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r}\,, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\,, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi\,, & r\cos\varphi \end{pmatrix} \;; \quad |\det J_{\mathbf{f}}| = |r| = r\,.$$

Množina Ω_{xy} je obrazem nějaké množiny $\Omega_{r\varphi}$ (kterou musíme určit).
Takže

$$\iint_{\Omega_{xy}} f(x,y)\; dxdy = \iint_{\Omega_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\; drd\varphi\,.$$

Formálně $dxdy$ nahradíme výrazem $r\; drd\varphi$.

Příklad 15.8: Vypočtěte

$$I = \iint_{\Omega} \sin\sqrt{x^2+y^2}\; dxdy,$$

kde

$$\Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ \pi^2 < x^2+y^2 < 4\pi^2\}.$$

Vzhledem ke geometrii oblasti Ω (mezikruží) užijeme substituci do polárních souřadnic $\mathbf{f}$: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.
Zde snadno zjistíme, že Ω je obrazem množiny

$$\Omega_{r\varphi} = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 >\ \pi < r < 2\pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}\,.$$

Máme tedy

$$I = \iint_{\Omega_{r\varphi}} r\sin r\; drd\varphi = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\int_{\pi}^{2\pi} r\sin r\; dr\right)}_{\text{per partes}} d\varphi = -6\pi^2\,.$$

Věta 15.9 : (Fubiniova věta v $\mathbb{R}^3$)
Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, kde $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \; [x, y] \in G\,;\; z_1[x, y] \le z \le z_2[x, y]\}$, je tzv. **elementární oblast** určená grafy funkcí $z = z_1[x, y]$, $z = z_2[x, y]$, $[x, y] \in G$, kde G je průmět množiny Ω do roviny xy. Potom platí

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_{G} \left(\int\limits_{z_1[x,y]}^{z_2[x,y]} f(x, y, z)\, dz \right) dxdy,$$

pokud vnitřní integrál existuje pro každé $[x, y] \in G$.

<u>Důkaz</u> : Ve větě 15.8 jsme uvedli dvě možnosti převodu dvojného integrálu na dvojnásobný. Tyto možnosti byly dány dvěma možnostmi promítání množiny Ω do souřadnicových os. U trojného integrálu máme tři možnosti promítání oblasti Ω do tří souřadnicových rovin a v tvrzení věty je uvedena pouze jedna z nich.

<u>*Příklad 15.9*</u> : Vypočtěte $I = \iiint\limits_{\Omega} x \; dxdydz$, kde Ω je oblast v 1. oktantu omezená paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a rovinou $z = 2$. Průmětem Ω do roviny xy je čtvrtkruh G.

Představíme si řezy oblasti Ω rovnoběžné s rovinou xz. Pro každé $[x, y] \in G$ se nejdříve integruje od $z = x^2 + y^2$ do $z = 2$ (vnitřní integrace). Získaný dvojný integrál přes G se převede na dvojnásobný, v němž se nejdříve integruje podle y od $y = 0$ do $y = \sqrt{2 - x^2}$, a nakonec se integruje podle x od $x = 0$ do $x = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega} x\; dxdydz &= \iint\limits_{G} \left(\int\limits_{x^2+y^2}^{2} x\; dz \right) dxdy = \iint\limits_{G} x(2 - x^2 - y^2)\; dxdy = \\ &= \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \left(\int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} (2x - x^3 - xy^2)\; dy \right) dx = \frac{8\sqrt{2}}{15}\,. \end{aligned}$$

Výpočet integrálu přes G se opírá o větu (15.7).

Věta 15.10 : (O substituci v trojném integrálu – transformace souřadnic v trojném integrál)
Nechť $\Omega_r \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená měřitelná množina a nechť funkce $x = x(r, \varphi, \vartheta)$, $y = y(r, \varphi, \vartheta)$, $z = z(r, \varphi, \vartheta)$ určují prosté regulární zobrazení $\mathbf{f}$ zobrazující Ω_r na množinu $\Omega_x \subset \mathbb{R}^3$. Nechť dále máme funkci $f : \Omega_x \to \mathbb{R}$, která je spojitá na Ω_x. Potom platí

$$\iiint_{\Omega_x} f(x, y, z)\, dxdydz$$
$$= \iiint_{\Omega_r} f(x(r, \varphi, \vartheta), y(r, \varphi, \vartheta), z(r, \varphi, \vartheta))\, |\det J_{\mathbf{f}}|\, drd\varphi d\vartheta\,,$$

kde $J_{\mathbf{f}} = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\vartheta)}$ je Jacobiova matice zobrazení $\mathbf{f}$.

Princip důkazu je stejný jako v případě věty (15.8) pro dvojný integrál.

<u>*Příklad 15.10*</u> : Trojný integrál v cylindrických souřadnicích. Mějme zobrazení $\mathbf{f}$ dané transformačními rovnicemi

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z; \quad r > 0, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi\,.$$

Zde $|\det J_{\mathbf{f}}| = r$. Takže

$$\iiint_{\Omega_x} g(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{\Omega_r} g(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\; r\; drd\varphi dz\,.$$

<u>*Příklad 15.11*</u> : Vypočtěte $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2}\; dxdydz$, kde $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 :\; 0 \le x \le 2;\, 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2};\, 0 \le z \le a\}$. Vzhledem k tvaru oblasti Ω (část válce o výšce a) provedeme substituci do cylindrických souřadnic. Válcová plocha $x^2 + y^2 = 2x$ má v cylindrických souřadnicích rovnici $r = 2\cos\varphi$, neboť po dosazení do rovnice válcové plochy dostáváme

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2r\cos\varphi\,.$$

Průmět Ω do roviny xy je půlkružnice. Takže $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$r \in (0, 2\cos\varphi)$, $z \in (0, a)$. Tedy

$$\iiint\limits_{\Omega_x} z\sqrt{x^2+y^2}\;dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_r} z \cdot r \cdot r\;drd\varphi dz =$$
$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\cos\varphi} \int\limits_0^{a} z \cdot r^2\;dzdrd\varphi = \tfrac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2\;dr\;d\varphi =$$
$$= \tfrac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\;d\varphi = \tfrac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\;d\varphi =$$
$$= \tfrac{4}{3}a^2 \left(\sin\varphi - \tfrac{1}{3}\sin^3\varphi\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{8}{9}a^2\,.$$

Příklad 15.12 : Trojný integrál ve sférických souřadnicích. Mějme zobrazení $\mathbf{f}$ dané transformačními rovnicemi $x = r\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = r\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = r\sin\vartheta$,

$r > 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$. Zde $|\det J_{\mathbf{f}}| = r^2\cos\vartheta$. Takže

$$\iiint\limits_{\Omega_x} f(x,y,z)\;dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_{\Omega_r} f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta\,, r\cos\vartheta)\,r^2\cos\vartheta\;drd\varphi d\vartheta\,.$$

Příklad 15.13 : Vypočtěte $I = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\;dxdydz$, kde Ω je "horní" polovina koule $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

$$I = \int\limits_0^R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} r^2 \cdot \cos^2\vartheta \cdot r^2\cos\vartheta\;d\varphi\;d\vartheta\;dr = 2\pi \int\limits_0^R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^4(1-\sin^2\vartheta)\cos$$
$$= 2\pi \int\limits_0^R r^4\left(\sin\vartheta - \tfrac{1}{3}\sin^3\vartheta\right)_0^{\frac{\pi}{2}}\;dr = \tfrac{4}{15}\pi\;R^5\,.$$

15.3 Užitečné vzorce

Na základě integrálních součtů lze doplnit vzorce z odst. 7.4, MA I:

Míra oblasti Ω (integrál z charakteristické funkce)

$$\operatorname{meas}(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} 1\;dxdy\,; \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{(obsah)},$$
$$\operatorname{meas}(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} 1\;dxdydz\,; \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{(objem)}.$$

Celková hmotnost tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

Nechť $\varrho = \varrho(x,y,z)$ je funkce hustoty tělesa Ω, potom hmotnost tělesa je dána vzorcem

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \varrho(x,y,z)\, dxdydz\,.$$

Celkový náboj tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:
Nechť funkce $\varrho = \varrho(x,y,z)$ popisuje hustotu rozložení náboje v Ω, potom celkový náboj tělesa je dán vzorcem

$$Q = \iiint\limits_{\Omega} \varrho(x,y,z)\, dxdydz\,.$$

Statické momenty rovinné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vzhledem k souřadnicovým osám:

$$M_x = \iint\limits_{\Omega} y\ \varrho[x,y]\, dxdy\,, \quad M_y = \iint\limits_{\Omega} x\ \varrho[x,y]\, dxdy\,.$$

Statické momenty tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k souřadnicovým rovinám:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint\limits_{\Omega} z\ \varrho(x,y,z)\, dxdydz\,,\\ M_{yz} &= \iiint\limits_{\Omega} x\ \varrho(x,y,z)\, dxdydz\,,\\ M_{xz} &= \iiint\limits_{\Omega} y\ \varrho(x,y,z)\, dxdydz\,, \end{aligned}$$

kde $\varrho = \varrho[x,y]$, resp. $\varrho = \varrho(x,y,z)$ je hustota tělesa v bodě $[x,y] \in \Omega$, resp. $[x,y,z] \in \Omega$.

Moment setrvačnosti tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k souřadnicovým osám:

$$\begin{aligned} J_x &= \iiint\limits_{\Omega} (y^2+z^2)\ \varrho(x,y,z)\, dxdydz\,,\\ J_y &= \iiint\limits_{\Omega} (x^2+z^2)\ \varrho(x,y,z)\, dxdydz\,,\\ J_z &= \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\ \varrho(x,y,z)\, dxdydz\,, \end{aligned}$$

kde $\varrho = \varrho(x,y,z)$ je hustota tělesa v bodě $[x,y,z] \in \Omega$.

Souřadnice těžiště $T = (x_T, y_T, z_T]$ tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$x_T = \frac{M_{yz}}{m}\,, \quad y_T = \frac{M_{xz}}{m}\,, \quad z_T = \frac{M_{xy}}{m}\,.$$

<u>*Příklad 15.14*</u>: Vypočtěte souřadnice těžiště tělesa omezeného plochami $x = 0,\ z = 0,\ y = 1,\ y = 3,\ x + 2z = 3$, jestliže hustota tělesa se v každém bodě rovná 1.

$$\begin{aligned} m &= \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} dzdydx = \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 \tfrac{3-x}{2}\, dydx = \\ &= \int\limits_0^3 (3-x)\, dx = \big(3x - \tfrac{1}{2}x^2\big)_0^3 = \tfrac{9}{2}\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_T &= \tfrac{2}{9} \iiint\limits_{\Omega} x\ dxdydz = \tfrac{2}{9} \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} x\ dzdydx = \\ &= \tfrac{2}{9} \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 x \tfrac{3-x}{2}\ dydx = \tfrac{2}{9} \int\limits_0^3 x(3-x)\ dx = \tfrac{2}{9}\big(\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\big)_0^3 = 1\,. \\ y_T &= \tfrac{2}{9} \iiint\limits_{\Omega} y\ dxdydz = \tfrac{2}{9} \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} y\ dzdydx = \\ &= \tfrac{1}{9} \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 y(3-x)\ dydx = \tfrac{4}{9} \int\limits_0^3 (3-x)\ dx = \tfrac{4}{9}\left(3x - \tfrac{x^2}{2}\right)_0^3 = 2\,. \\ z_T &= \tfrac{2}{9} \iiint\limits_{\Omega} z\ dxdydz = \tfrac{2}{9} \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} z\ dzdydx = \\ &= \tfrac{2}{9} \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 \tfrac{(3-x)^2}{8}\ dydx = \tfrac{1}{18}\left(\tfrac{-(3-x)^3}{3}\right)_0^3 = \tfrac{1}{2}\,. \end{aligned}$$