Sbírka příkladů z diskrétní matematiky

verze 1

Katedra matematiky ZČU, duben 2001

Úvod

Toto je první, značně neúplná verze sbírky příkladů k předmětu Diskrétní matematika. Tvoří ji z větší části variace na příklady vytvořené mými kolegy z katedry matematiky ZČU. Postupně by se měla rozrůst tak, aby pokryla všechny podstatné probírané partie a stala se dobrým testem porozumění látce před zkouškou nebo zápočtovou písemkou. K tomu můžete přispět i vy, pošlete-li své náměty na rozšíření nebo upozornění na případné chyby na adresu `kaisert@kma.zcu.cz`.

Sbírka je rozdělena do kapitol podle tématických celků. Některé kapitoly obsahují ještě sekci problémů, tj. otázek, jejichž zodpovězení může vyžadovat větší dávku úsilí a invence. Ostatní příklady by měly být víceméně rutinní aplikací poznatků získaných na přednášce. Obtížnější problémy jsou označeny hvězdičkou, u některých najdete nápovědu k řešení. Poslední kapitola obsahuje odpovědi na všechna cvičení s výjimkou problémů.

Tato sbírka je k dispozici ve formátu Postscript na adrese `http://home.zcu.cz/~kaisert/dma/sb.ps`. K její přípravě byl použit typografický systém LaTeX a editor obrázků Ipe.

13. dubna 2001 T. Kaiser

1 Relace, uspořádání, Booleovy algebry

1.1 Na množině $X = \{ a, b, c, d, e, f \}$ je dána relace R. Zjistěte, zda se jedná o uspořádání a případně určete minimální a maximální prvky, pokud

(a) $R = \{ \{b, a\}, \{c, a\}, \{f, d\}, \{b, d\}, \{e, c\}, \{e, a\}, \{b, c\}, \{b, f\} \}$,

(b) $R = \{ \{d, c\}, \{b, a\}, \{c, a\}, \{d, b\} \}$.

1.2 Rozhodněte, zda relace S na množině X je (1) reflexívní, (2) symetrická, (3) antisymetrická, (4) tranzitivní, (5) ekvivalence, (6) uspořádání:

(a) $X = [\,0, 1\,]$, $x\,S\,y \iff x + y \leq xy$,

(b) $X = \mathbf{R}$, $S = \{ (\,x, y\,) \,|\, x < 2y \}$,

(c) $X = \mathbf{R}$, $x\,S\,y \iff x - y \in \mathbf{Z}$.

1.3 Nakreslete Hasseův diagram uspořádání dělitelností na množině $X \subseteq \mathbf{N}$. Zjistěte, zda tato uspořádaná množina má nejmenší resp. největší prvek.

(a) $\{ 2, 3, 4, 12, 15, 60 \}$,

(b) $\{ 2, 4, 8, 12, 20, 28, 56 \}$.

1.4 Nechť R je lineární uspořádání na konečné množině X. Musí (X, R) být svaz? Musí to být Booleova algebra?

1.5 Rozhodněte, zda množina $X \subseteq \mathbf{N}$ spolu s uspořádáním daným dělitelností je (1) svaz, (2) distributivní svaz, (3) komplementární svaz, (4) Booleova algebra.

(a) $X = \{ 1, 2, 3, 12, 18, 30, 180 \}$,

(b) $X = \{ 1, 2, 4, 6, 7, 10, 60, 420 \}$,

(c) $X = \{ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 \}$.

Problémy

1.6 * Označme množinu všech dělitelů daného čísla n jako $D(n)$. Uvažme množinu $D(n)$ jako uspořádanou relací dělitelnosti. Dokažte, že $D(n)$ je pro libovolné n svazem. Určete, pro která n je $D(n)$:

(i) distributivním svazem,

(ii) komplementárním distributivním svazem,

(iii) Booleovou algebrou.

2 Booleovské funkce

2.1 Rozhodněte, zda jsou následující booleovské polynomy v disjunktivní normální formě (DNF) resp. v úplné DNF:

(a) $x_1 x_2 + \overline{x_3 x_4}$,

(b) $x_1 + x_2 x_4$,

(c) $x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4}$.

2.2 Vyjádřete booleovské funkce $f(x,y,z)$ a $g(x,y,z)$ polynomem (a) v úplné DNF a (b) v úplné KNF.

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

x	y	z	$g(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

2.3 Booleovské funkce $\oplus$ a $\rightarrow$ jsou definovány předpisem

$$\begin{aligned} x \rightarrow y &= \bar{x} + y \\ x \oplus y &= \bar{x}y + x\bar{y}. \end{aligned}$$

Převeďte booleovské polynomy

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x \rightarrow ((y + \bar{x}z) \oplus \bar{z}), \\ f_2(x,y,z) &= (x\bar{y} \oplus y\bar{z}) \oplus z\bar{x} \end{aligned}$$

do úplné KNF, a to (a) pomocí booleovského kalkulu, (b) pomocí tabulky.

3 Soubor stupňů (skóre grafu)

3.1 Rozhodněte, zda následující posloupnost je souborem stupňů nějakého neorientovaného grafu bez smyček a násobných hran:

(a) (5,5,4,4,3,3),

(b) (7,6,6,5,4,4,4,3,3,3,2),

(c) (5,5,5,4,4,3,2).

4 Počet koster

4.1 Určete počet koster:

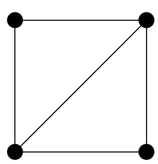
(a) stromu na n vrcholech,

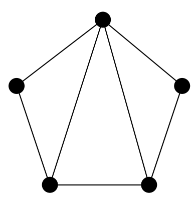
(b) kružnice C_n,

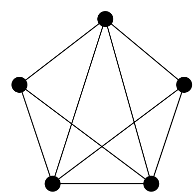
(c) grafu, který vznikne, přidáme-li k C_{2n} tětivu spojující dva vrcholy ve vzdálenosti n.

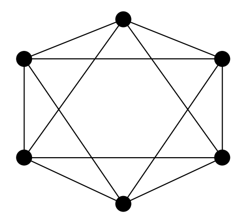
4.2 Nechť M_{2n} je graf tvořený n disjunktními hranami na $2n$ vrcholech. Určete počet koster grafu G, který vznikne přidáním nového vrcholu a jeho spojením s každým vrcholem z $V(M_{2n})$. (G je tedy n trojúhelníků slepených "za vrchol".)

4.3 Určete počet koster následujících grafů.


a)


b)


c)


d)

Problémy

4.4 Nechť G je graf na množině vrcholů $\{1,\ldots,n\} \cup \{v,w\}$, v němž je každý vrchol z $\{1,\ldots,n\}$ spojen hranou jak s v, tak s w, a jiné hrany G nemá. Určete

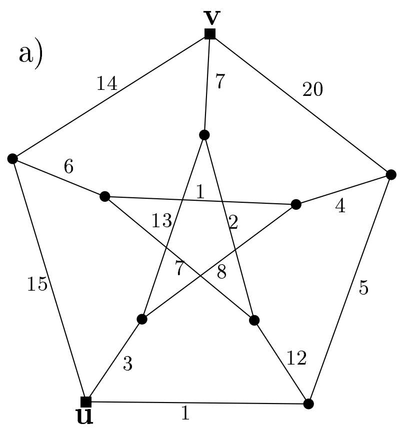
(a) počet koster grafu G,

(b) počet koster grafu $G + \{v,w\}$, který vznikne z G přidáním hrany $\{v,w\}$.

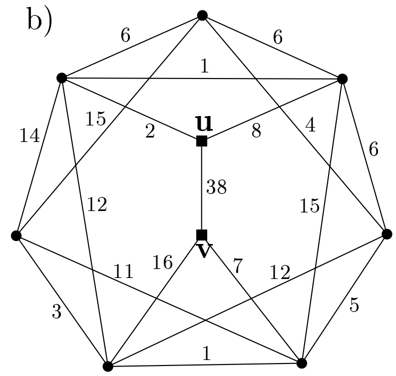
5 Dijkstrův algoritmus

5.1 Najděte Dijkstrovým algoritmem minimální cestu z vrcholu u do vrcholu v v následujících grafech:

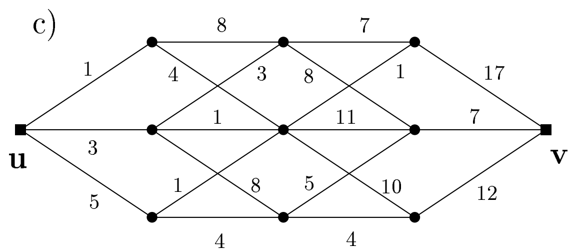
a)



b)



c)



6 Distanční matice

6.1 Najděte w-distanční matici $D^w(\vec{G})$ ohodnoceného orientovaného grafu $\vec{G}$, který je dán následující maticí sousednosti:

(a)

$$W(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$W(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 & 7 \\ 9 & 0 & 10 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

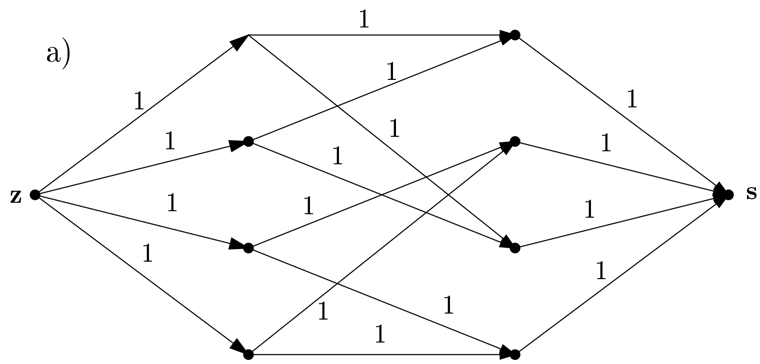
(c)

$$W(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

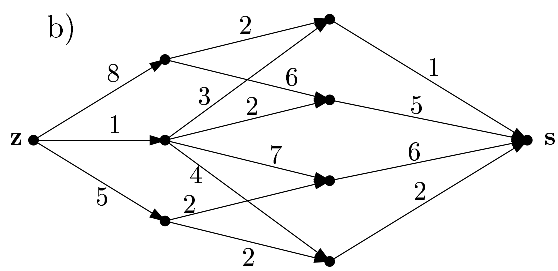
7 Maximální tok

7.1 Najděte maximální tok z uzlu z do uzlu s v síti G a ověřte podmínky maximality:

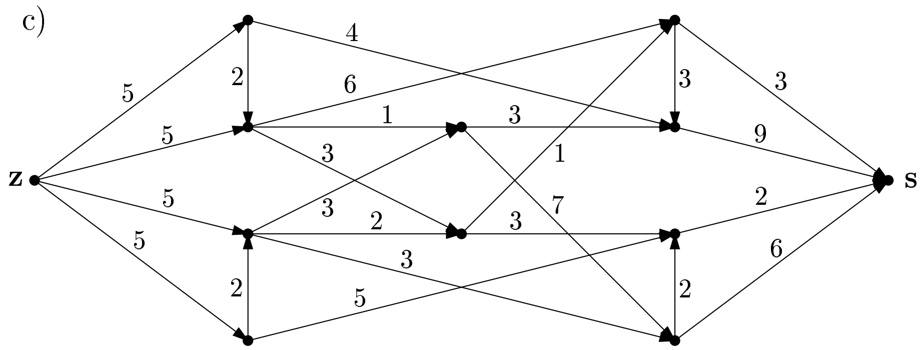
a)



b)



c)



8 Huffmanův kód

9 Lineární prostory grafu

10 Kritická cesta

11 Řešení

1.1 a) ano, maximální prvky jsou a, d, minimální b, f; b) ne

1.2 a) symetrická, antisymetrická, tranzitivní; b) jen reflexívní; c) reflexívní, symetrická, tranzitivní, ekvivalence

1.3 a) největší prvek je 60, nejmenší nemá; b) největší nemá, nejmenší je 2

1.4 (X, R) je vždy svaz, ale např. $\{1, 2, 3\}$ s obvyklým uspořádáním není Booleova algebra.

1.5 a) není svaz; b) je svaz, ale není distributivní; c) je Booleova algebra

2.1 a) ne; b) ano; c) ano

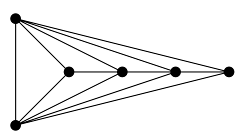
2.2

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xyz = (x+y+z)(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z); \\ g(x,y,z) &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xyz = (x+y+\bar{z})(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+\bar{y}+z) \end{aligned}$$

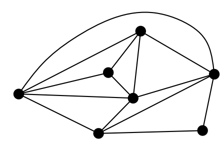
2.3 $f_1(x,y,z) = (\bar{x}+\bar{y}+z)(\bar{x}+y+\bar{z})$; $\quad f_2(x,y,z) = (x+y+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$

3.1 a) ano; b) ne (lichý počet lichých vrcholů); c) ano

a)



c)



4.1 a) 1; b) n; c) $n(n+2)$

4.2 3^n

4.3 a) 8; b) 21; c) 75; d) 384

5.1 váhy minimálních cest: a) 22; b) 21; c) 21

6.1 a) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 8 & 1 & 5 & 7 \\ 9 & 0 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 4 & 10 \\ 6 & 5 & 2 & 0 & 8 \\ 6 & 6 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

7.1 velikosti maximálních toků: a) 4; b) 11; c) 19