

1. Do tanečního kroužku chodí 15 chlapů a 20 dívek. Kolik různých párů z nich můžeme vytvořit?
2. Ze sady 28 kostek domina vytáhnu dvě. Kolika způsoby to mohu provést tak, aby ony dvě kostičky šly k sobě přiložit podle pravidel domina?
3. Kolik lichých čtyřciferných čísel lze vytvořit z cifer 0, 1, 2, 3, 4? Řešte jak pro případ, kdy se cifry mohou, tak pro případ, kdy se nemohou opakovat.
4. Tiket sazký má třináct řádků. Sázející v každém řádku zaškrtně jednu z možností 0, 1 nebo 2. Kolika způsoby to může provést?
5. Kolika způsoby lze pomocí n prvkové abecedy vytvořit slovo o k znacích? Písmena se mohou opakovat, "slovo" vůbec nemusí být vyslovitelné. (*Variace k -té třídy z n prvků s opakováním.*)
6. Kolik pěticiferných čísel lze vytvořit z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8? Vyjádřete pomocí faktoriálů. Cifry se nesmí opakovat.
7. Kolika způsoby lze z n prvkové abecedy vybrat slova délky k , složená z různých písmen? (*Variace k -té třídy z n prvků bez opakování.*)
8. Deset přátel se dohodne, že bude chodit vždy v neděli do restaurace na oběd k desetimístnému stolu a pokaždé si sednou jinak. Jak dlouho jim bude trvat, než vyčerpají všechny možnosti?
9. Kolika způsoby lze přeházet pořadí prvků n -prvkové množiny? (*Permutace z n prvků.*)
10. Kolika způsoby lze ze soutěže o 16 účastnících vybrat
 - a) medalisty b) tři sestupující?
11. Kolik existuje k prvkových podmnožin n prvkové množiny? (*Kombinace k -té třídy z n prvků.*)
12. Dokažte následující vztahy pro kombinační čísla.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$
13. Kolik existuje možných tahů Sportky bereme-li v úvahu i dodatkové číslo?
14. Kolik různých slov lze vytvořit ze slova abrakadabra?
15. Kolik různých slov mohu vytvořit z k -prvkové abecedy, jestliže první prvek musím použít právě n_1 krát, druhý n_2 krát atd. až k -tý n_k krát? (*Permutace s opakováním.*)

16. Babička chce rozdělit svým čtyřem vnoučkům deset koblížků. Kolika způsoby to může udělat, jestliže

- (a) Nemá žádná omezení.
- (b) Chce dát každému alespoň jeden koblížek

17. Kolika způsoby lze rozdělit k předmětů mezi n subjektů? (*Kombinace k -té třídy z n prvků s opakováním.*)

18. Sestrojte graf relace a rozhodněte, jedná-li se o relaci reflexivní, symetrickou, tranzitivní či antisymetrickou.

- (a) $[x, y] \in R \times R; y > x^2 \ \& \ y < 2x + 3$
- (b) $[x, y] \in R \times R; 1 \leq x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 4$
- (c) $[x, y] \in R \times R; -1 \leq xy \leq -2$
- (d) $[x, y] \in R \times R; y > x^2 \ \& \ y < 1 - x^2$
- (e) $[x, y] \in R \times R; x \leq y \leq 2x \ \& \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$
- (f) $[x, y] \in R \times R; 1 \leq |x| + |y| \leq 2$
- (g) $[x, y] \in R \times R; x^2 + y^2 \leq 4 \ \& \ |x| > |y|$
- (h) $[x, y] \in R \times R; |x| \cdot |y| \leq 1$
- (i) $[x, y] \in R \times R; -1 \leq x^2 - y^2 \leq 1$

19. Najděte množinu reálných čísel takovou, že tato množina vybavená operací $a \oplus b = a + b + ab$ tvoří grupu.

20. Ukažte, že množina kladných reálných čísel tvaru $a + b\sqrt{2}$, kde $a, b \in \mathbb{Q}$ vybavená operací násobení tvoří grupu.

21. Řešte v \mathbb{Z}_5 soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 2 \\x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 1 \\2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 3\end{aligned}$$

22. Řešte v \mathbb{Z}_7 soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 &= 6 \\2x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 &= 2 \\x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 1 \\2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 &= 3\end{aligned}$$

23. Určete hodnotu matice modulo 5, případně modulo 7.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

24. Modulo 5 nebo 7 vypočítejte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

25. Rozhodněte, zda následující číselné množiny uspořádané dělitelností tvoří svaz, v kladném případě rozhodněte, zda jde o svaz distributivní či komplementární, v záporném uveďte důvod.

(a) $M_1 = \{2, 3, 4, 12, 18, 24, 36, 72\}$

(b) $M_2 = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$

(c) $M_1 = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$

(d) $M_2 = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$

(e) $M_1 = \{1, 3, 5, 7, 105, 210\}$

(f) $M_2 = \{2, 3, 4, 12, 18, 24, 36, 72\}$

(g) $M_1 = \{1, 5, 6, 12, 60\}$

(h) $M_2 = \{4, 8, 16, 24, 32, 64\}$

(i) $M_1 = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$

(j) $M_2 = \{2, 3, 4, 12, 18, 24, 36, 72\}$

(k) $M_1 = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$

(l) $M_2 = \{1, 3, 4, 24, 36, 72\}$

26. Zapište následující Booleovskou funkci v úplné disjunktivní a úplné konjunktivní normální formě.

- (a) $\overline{A \vee (B \& C)} \Rightarrow (A \Leftrightarrow (B \vee C))$
- (b) $(A \& (\overline{B \vee C})) \Rightarrow (A \& (B \Leftrightarrow C))$
- (c) $(A \Rightarrow (B \& \overline{C})) \Leftrightarrow A \& (B \vee \overline{C})$

27. Rozhodněte, zda následující posloupnost je grafová, v kladném případě najděte patriční graf.

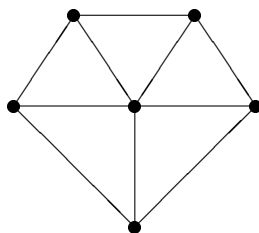
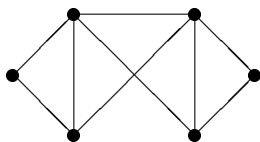
- (a) 7, 7, 6, 6, 5, 5, 5, 3, 2, 2
- (b) 7, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 2

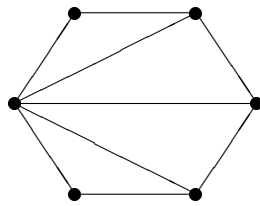
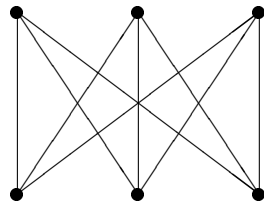
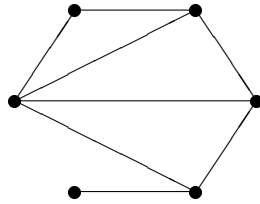
28. Pro následující frekvenční tabulky najděte optimální Huffmanův kód, určete jeho váhu a zakódujte dané slovo

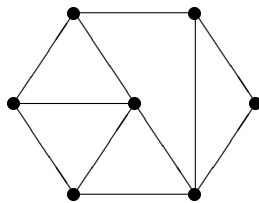
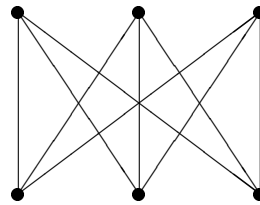
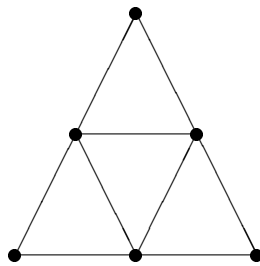
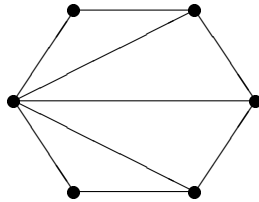
- (a) A - 25, B - 6, D - 10, E - 120, L - 12, M - 15, P - 8, R - 4
MADLA
- (b) A - 20, B - 6, D - 10, E - 20, L - 12, N - 15, P - 8, S - 4
BEDNA
- (c) A - 15, B - 6, D - 10, E - 20, M - 12, O - 15, L - 8, R - 12
MODLA
- (d) A - 25, D - 10, E - 10, L - 30, O - 15, I - 8, T - 4
LOLITA

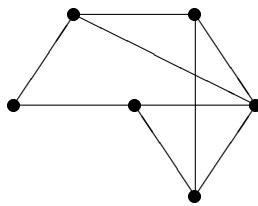
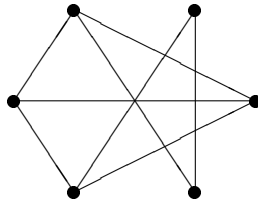
29. Pro následující grafy najděte

- (a) automorfismy
- (b) počet koster
- (c) prostor kružnic
- (d) prostor řezů
- (e) počty sledů konkrétní délky









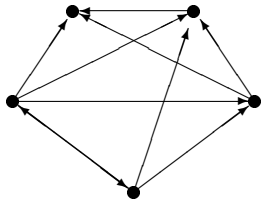
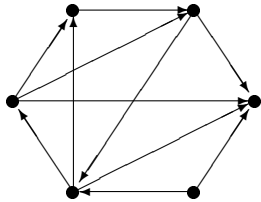
30. Najděte w -distanční matici následujících grafů

Ohodnocení hran:

$$w(1,4) = 8, w(1,5) = 2, w(1,6) = 1, w(2,1) = 4,$$

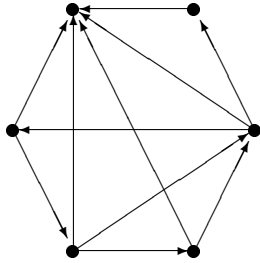
$$w(2,4) = 2, w(3,2) = 6, w(3,4) = 10, w(4,2) = 2,$$

$$w(5,2) = 3, w(5,4) = 12, w(6,5) = 5$$



Ohodnocení hran:

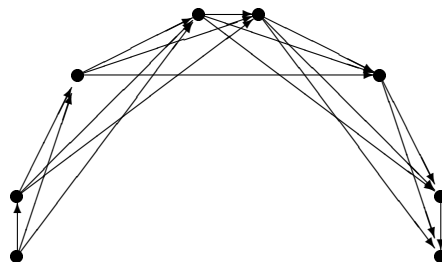
$$\begin{aligned}
 &w(1,2) = 1, w(1,3) = 1, w(1,4) = 3, w(1,5) = 3, \\
 &w(2,1) = 2, w(2,3) = 4, w(2,4) = 2, w(3,4) = 4, \\
 &w(3,5) = 1, w(4,5) = 2
 \end{aligned}$$



Ohodnocení hran:

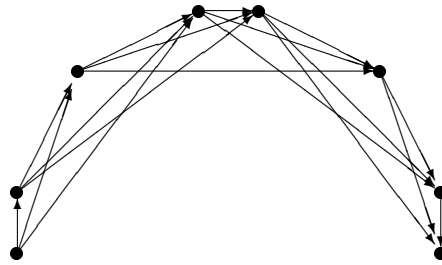
$$\begin{aligned}
 w(1, 2) &= 4, w(1, 6) = 12, w(2, 3) = 1, w(2, 4) = 2, \\
 w(2, 6) &= 6, w(3, 4) = 1, w(3, 6) = 4, w(4, 1) = 1, \\
 w(4, 5) &= 1, w(4, 6) = 3, w(5, 6) = 1
 \end{aligned}$$

31. Pomocí Dijkstrova algoritmu najděte vzdálenost vrcholů u a v .



(a) Ohodnocení hran:

$$\begin{aligned}
 w(u, 1) &= 4, w(1, 2) = 5, w(2, 3) = 3, w(3, 4) = 4, \\
 w(4, 5) &= 5, w(5, 6) = 4, w(6, v) = 3, w(u, 2) = 7, \\
 w(1, 3) &= 6, w(2, 4) = 8, w(3, 5) = 6, w(4, 6) = 7, \\
 w(5, v) &= 6, w(u, 3) = 12, w(1, 4) = 11, w(2, 5) = 13, \\
 w(3, 6) &= 14, w(4, v) = 11
 \end{aligned}$$



(b)

32. Najděte nejkratší možné trvání následujícího projektu a určete kritickou cestu.

	činnost	doba	podmínka
(a)	A	5	-
	B	6	-
	C	4	-
	D	3	A,B
	E	4	B
	F	5	B
	G	7	B,C
	H	8	B,C
	I	4	D,E
	J	7	D,E,F,G
	K	6	D,E,F,G
	L	5	D,E,F,G
	M	2	H
	N	4	I,J
	O	1	K
	P	2	L,M

	činnost	doba	podmínka
(b)	A	3	-
	B	4	-
	C	7	A
	D	3	A
	E	4	B
	F	6	B
	G	2	D,E,F,G
	H	5	D,E,F
	I	4	D,E,F
	J	6	F
	K	5	G,H
	L	4	G,H,I,J

	činnost	doba	podmínka
	A	7	-
	B	4	-
	C	2	-
	D	2	A
	E	3	B
(c)	F	5	B,C
	G	6	D,E,F
	H	5	E,F
	I	2	E,F
	J	4	G
	K	3	G,H,I
	L	4	I