

2

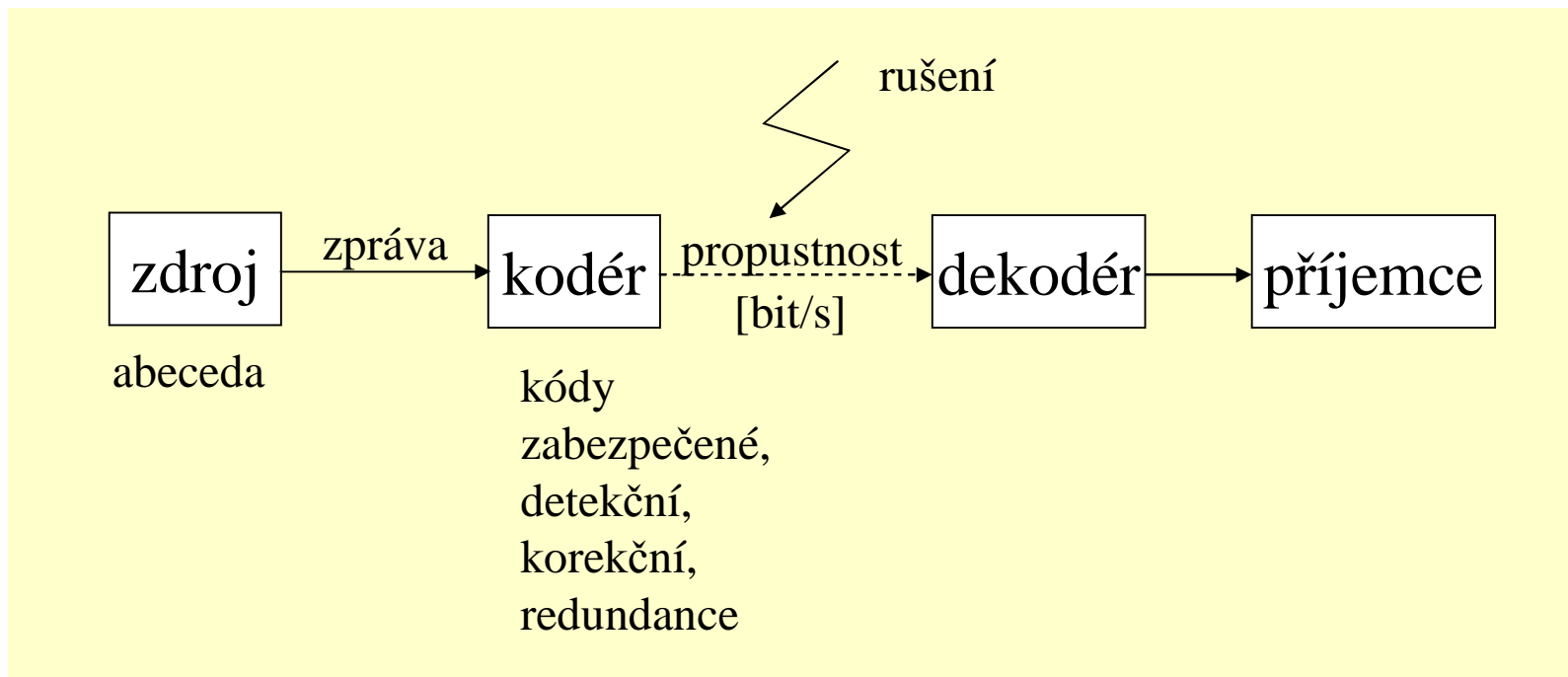
# Informace, systémy, stabilita

Miloš Schlegel

Schlegel@kky.zcu.cz

# Teorie informace

1. Množina možných elementárních signálů se nazývá abeceda.
2. Řetězec znaků (písmen) abecedy tvoří zprávu.
3. Počet znaků ve zprávě nazýváme délkou zprávy.



# Entropie

Entropie či neurčitost  $H_i$  i-tého jevu s pravděpodobností  $p_i$  ,  
 $\sum_i^n p_i = 1$ , je definována následujícími podmínkami:

$$H_i = f(p_i)$$

$$(i) \quad f(1) = 0$$

$$(ii) \quad p_i > p_j \Rightarrow f(p_i) < f(p_j)$$

$$(iii) \quad P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) = p_i p_j \Rightarrow f(p_i p_j) = f(p_i) + f(p_j)$$

⇓

$$H_i = c \log p_i$$

$$H_i = -\log_2 p_i \quad [bit]$$

$$H = \sum_i p_i H_i = -\sum_i p_i \log_2 p_i$$

Entropie i-tého jevu.

Entropie celého pokusu.

# Shannonova věta

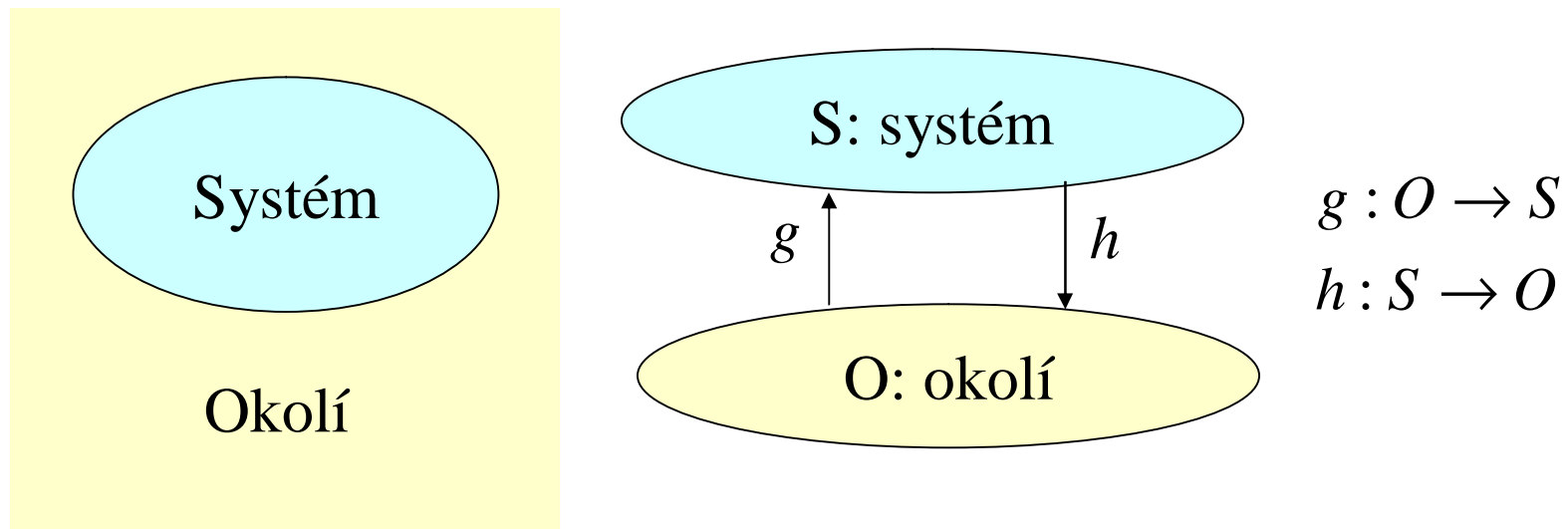
Je-li zpráva dostatečně dlouhá, můžeme ji rozdělením na dostatečně velké skupiny znaků kódovat dvojkově tak, že její redundance se libovolně málo liší od nuly.

Aplikace: pakování souborů, digitalizace obrazu,...

# System

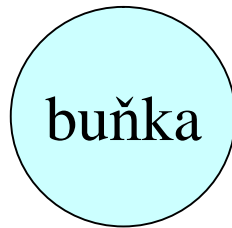
D1: System is a limited part (real or abstract) of space with a clearly defined boundary between it and its environment.

D2: System is a set (real or abstract) of objects connected in such a way that they form a whole.



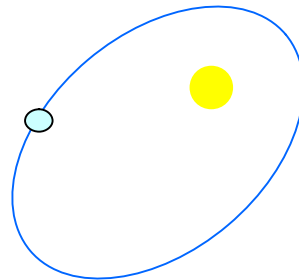
# Příklady reálných systémů

biologie



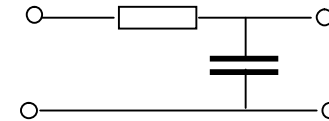
mozek  
živočich  
ekosystém

astronomie



sluneční soustava  
hvězdokupa  
vesmír

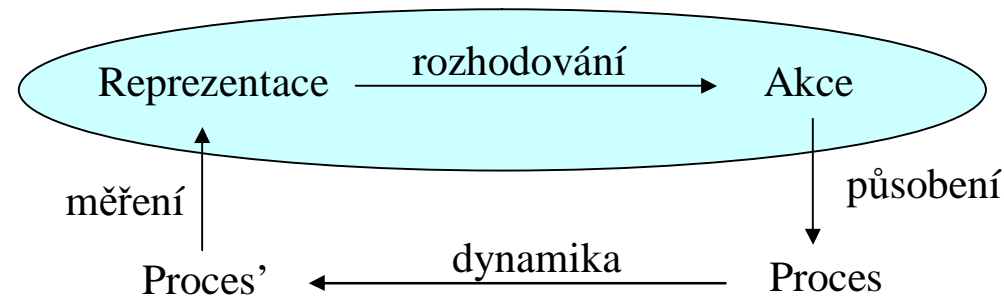
technika



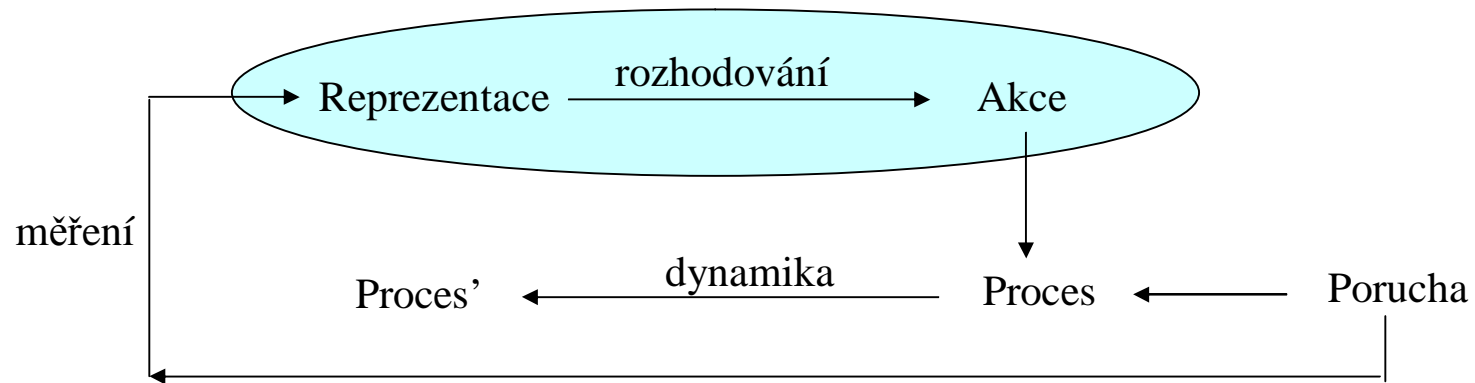
motor  
reaktor  
elektrárna

# Řídicí systémy-funkční diagram

## Zpětnovazební řízení

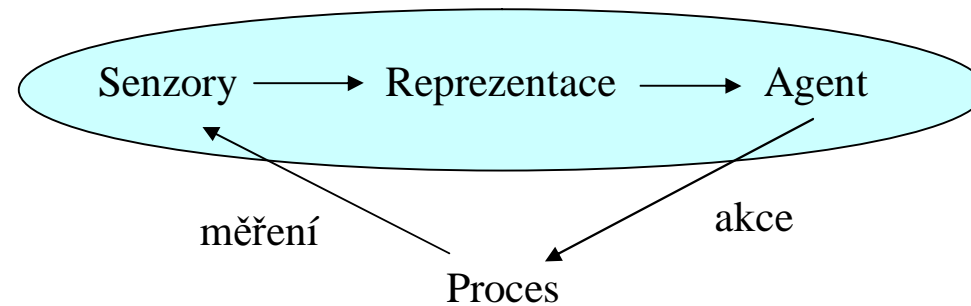


## Řízení v otevřené smyčce - kompenzační

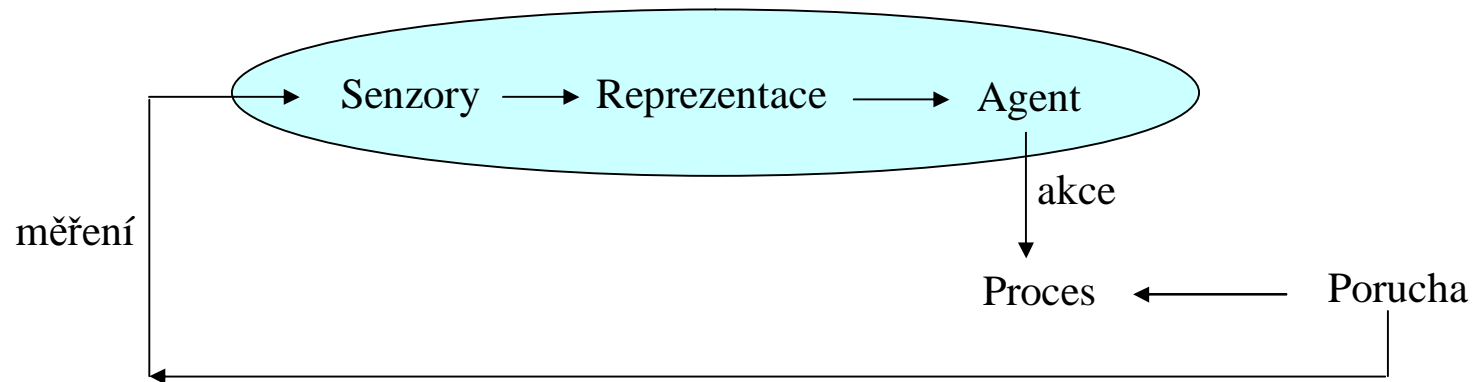


# Řídicí systémy-strukturální diagram

Zpětnovazební řízení

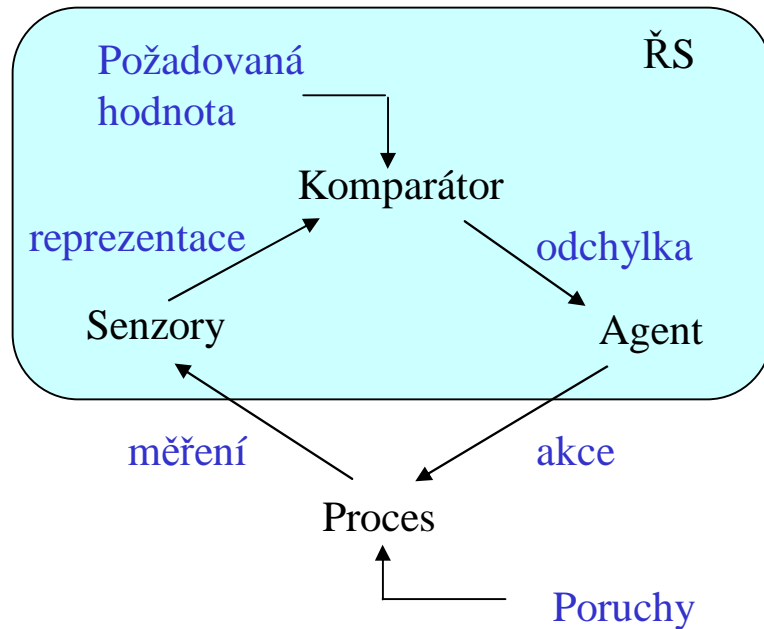


Řízení v otevřené smyčce - kompenzační

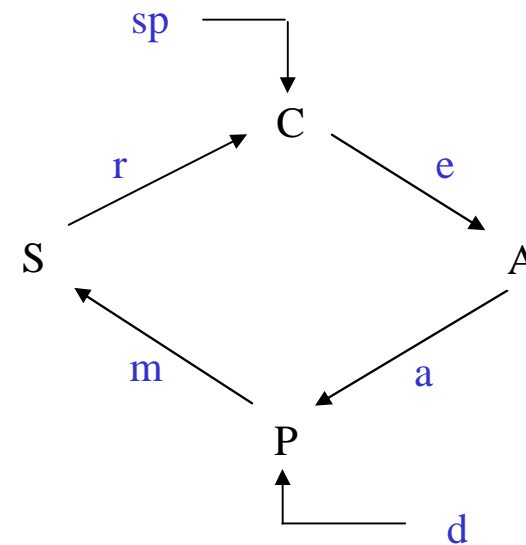




# Řídicí systém regulačního typu

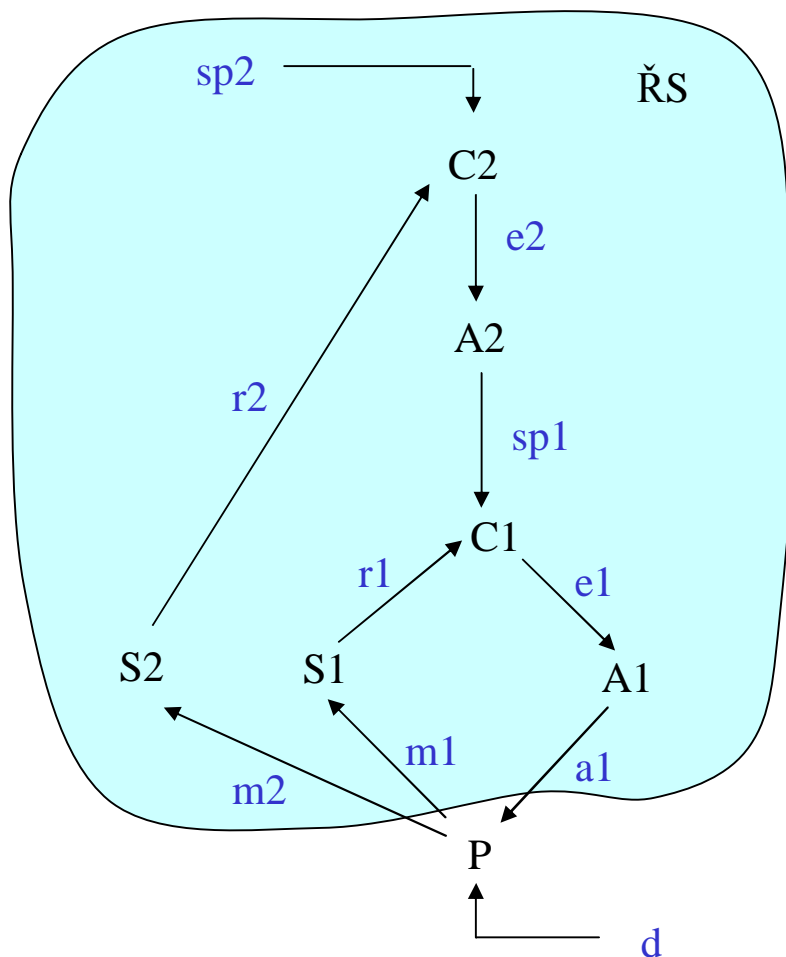


Zjednodušený diagram



Agent (regulátor) minimalizuje regulační odchylku mezi požadovanou hodnotou a regulovanou veličinou. Jeho cílem je udržet malou odchylku i při působení poruch a při změně dynamických vlastností procesu. Regulovaná veličina se získává měřením na procesu.

# Hierarchický řídicí systém

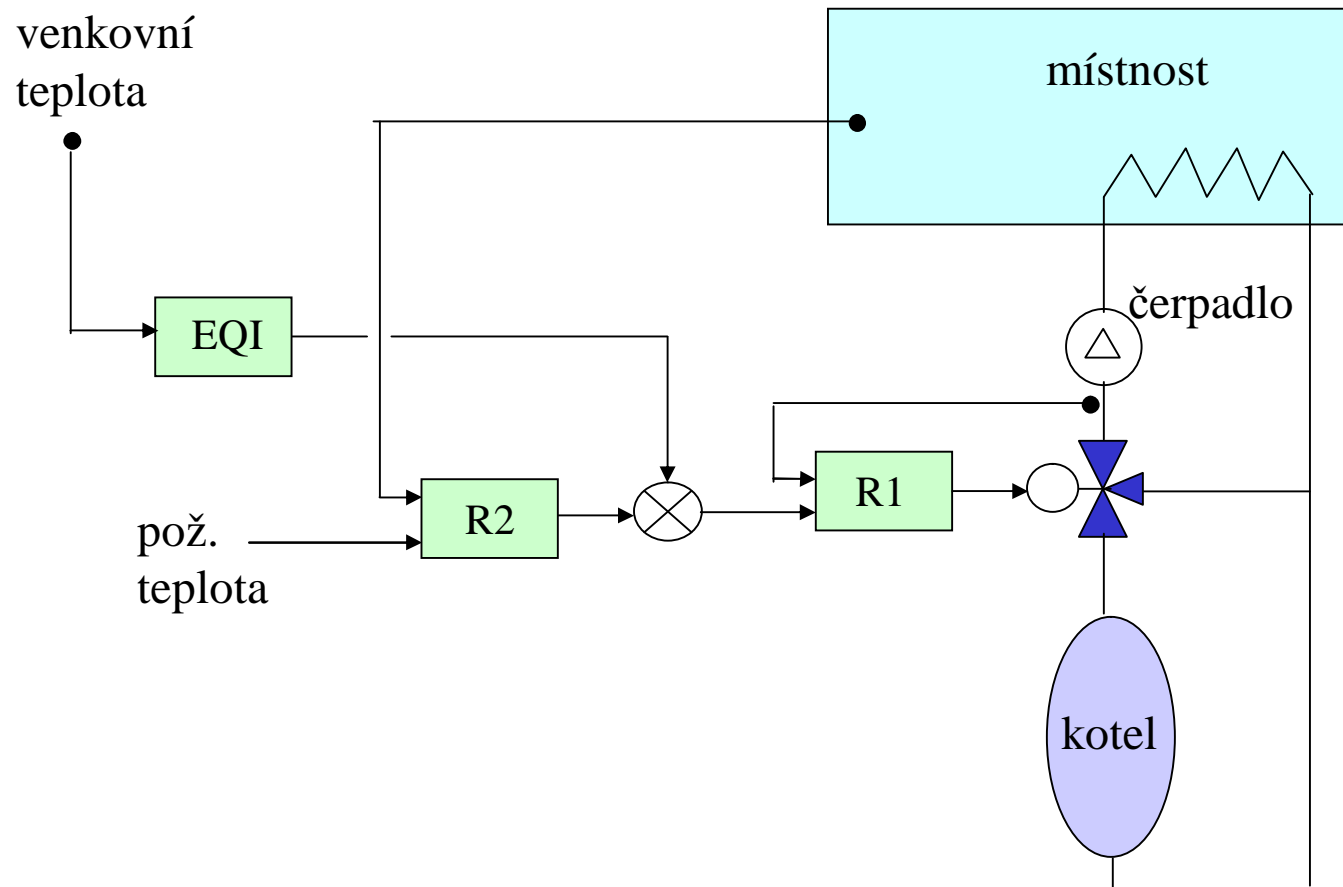


Úkol agenta A1 je minimalizovat regulační odchylku  $e_1$ , zatímco agent A2 minimalizuje regulační odchylku  $e_2$ .

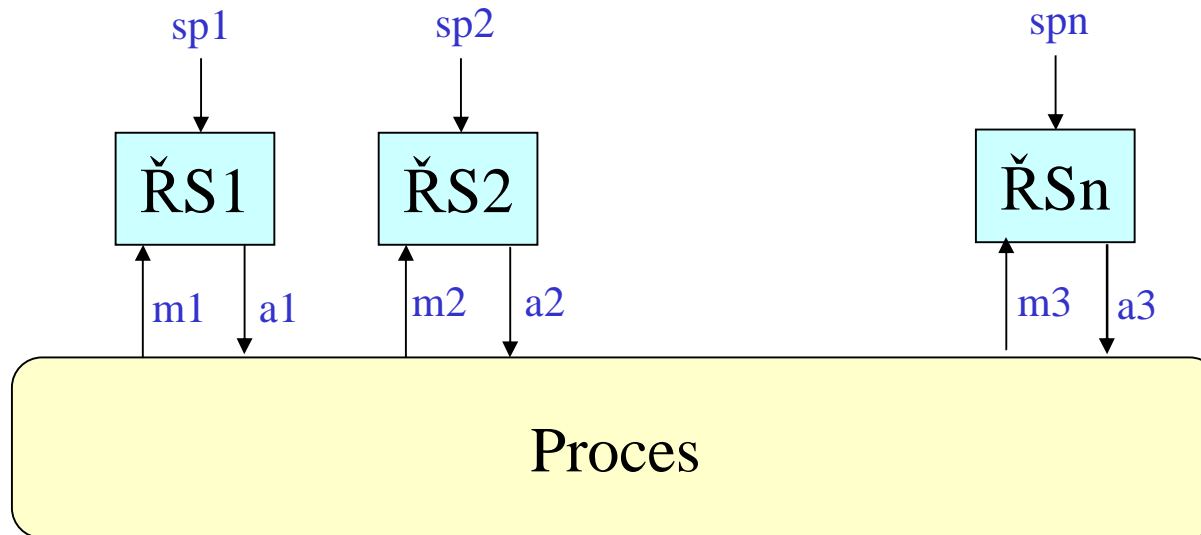
Výstup generovaný agentem A2 je požadovaná hodnota pro vnitřní smyčku (agent A1).

Často se používá i více hierarchických úrovní.

# Regulace teploty v budovách

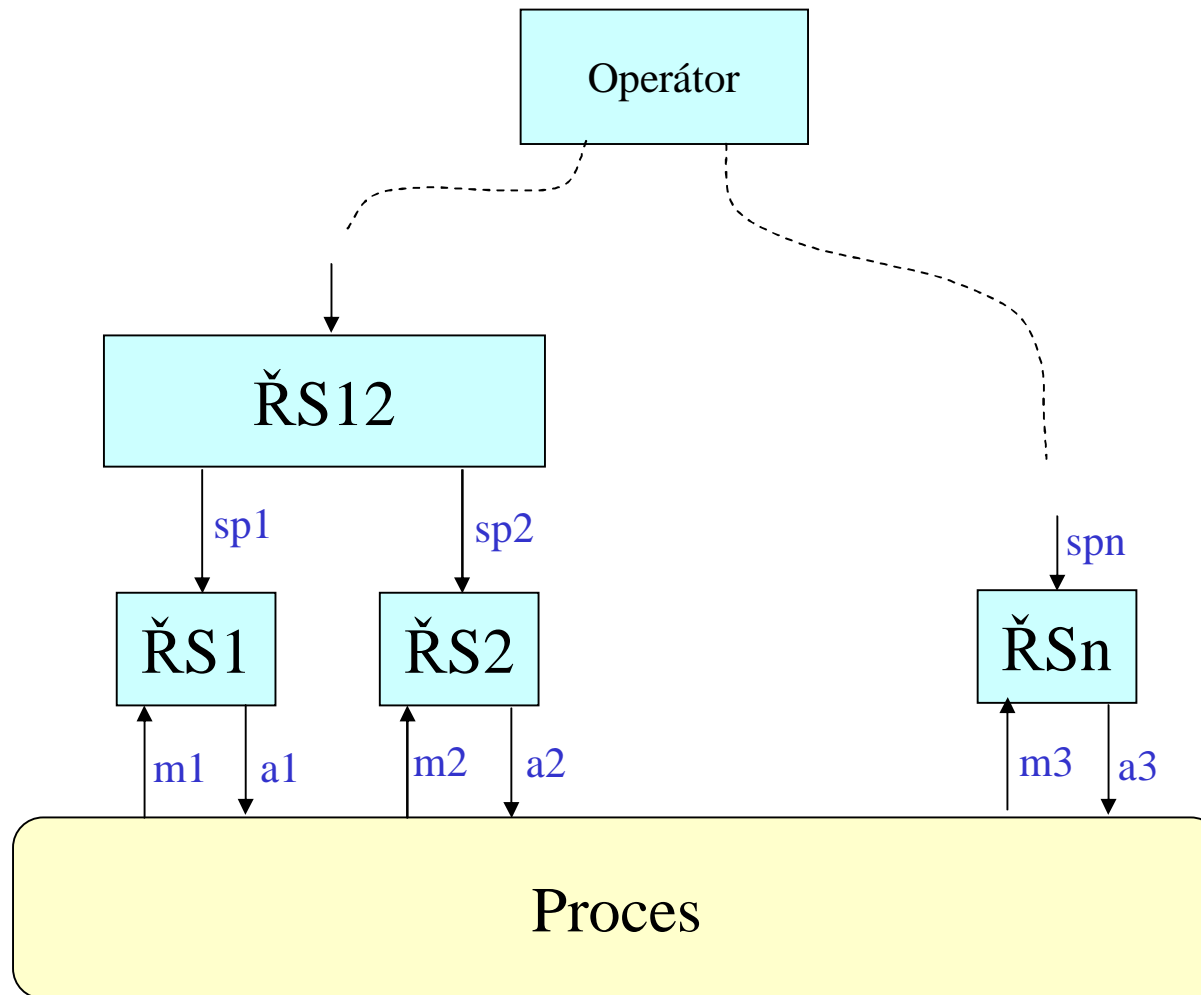


# Distribuovaný řídicí systém

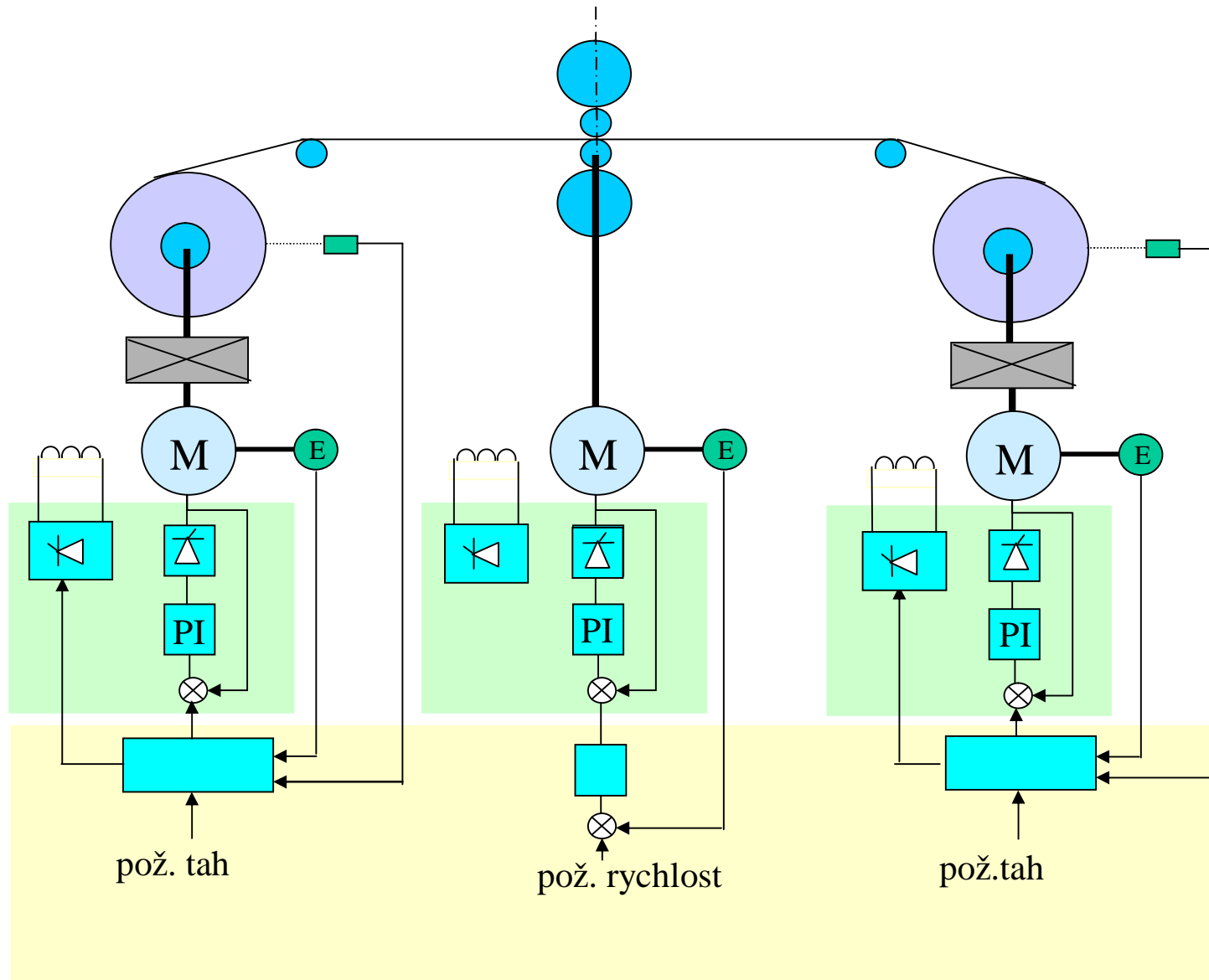


V distribuovaném řídicím systému pracuje paralelně několik regulátorů. Důležité při tom je, že každý regulátor řídí pouze jednu regulovanou veličinu (nebo jejich omezený počet) a užívá pouze data, která si sám na procesu měří.

# Hierarchický distribuovaný ŘS



# Regulace rychlosti a napětí válcovaného pasu



# Abstraktní autonomní systém s konečným počtem stavů (konečný automat)

$$\begin{array}{ll}
 S: & x_{k+1} = f(x_k) & \text{stavová rovnice} \\
 & x_k \in X = \{s_1, s_2, \mathbf{K}, s_n\} & \text{stavový prostor} \\
 & f : X \rightarrow X & \text{transformační fce} \\
 & f : s_i \mathbf{a} s_{j_i}, i, j_i \in \{1, 2, \mathbf{K}, n\}, & 
 \end{array}$$

Je-li systém v okamžiku  $k$  ve stavu  $s_i$ , potom je v čase  $k+1$  ve stavu  $s_{j_i}$ .

$$\begin{array}{cccc}
 & s_1 & s_2 & \mathbf{K} & s_n \\
 f & \downarrow & & & \\
 & s_{j_1} & s_{j_2} & \mathbf{K} & s_{j_n}
 \end{array}$$

Stav v čase  $k+1$  nezávisí na stavech v čase  $k-1, k-2, \dots$ . Veškerá informace pro další evoluci systému je obsažena ve stavu systému.

# Matice a graf systému $S$

Matice systému  $S$

$$F = [f_{ij}]$$

$$f_{ij} = \begin{cases} 1 & j = j_i \\ 0 & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

Graf systému  $S$

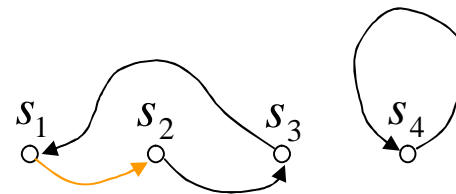
$$G = (V, H)$$

$$V = \{s_1, s_2, \mathbf{K}, s_n\}$$

$$h = (s_i, s_j) \in H \Leftrightarrow j = j_i$$

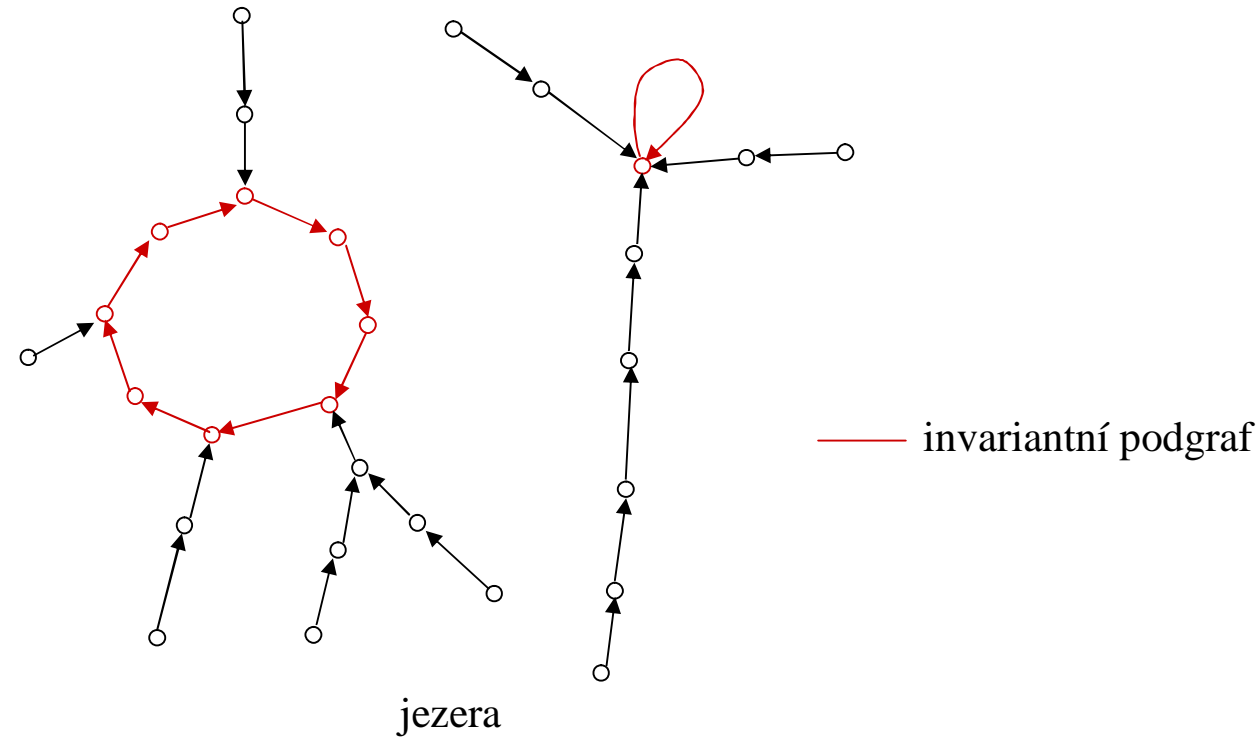
Příklad

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





# Vlastnosti grafu obecného systému $S$



1. Z každého uzlu vede právě jedna hrana.
2. Graf  $G$  se rozpadá na komponenty typu jezero.
3. Každá komponenta grafu typu jezero má právě jednu stabilní (invariantní) množinu uzlů. Podgraf grafu  $G$  na této invariantní množině uzlů je cyklus.

# Vlastnosti matice systému $S$

1. V každém sloupci má matice systému právě jednu jedničku.
2. Současnou permutací řádků a sloupců (přečíslováním stavů systému) lze matice systému  $S$  převést na blokově diagonální matici

$$\bar{F} = PFP^{-1} = \text{diag}\{F_1, F_2, \mathbf{K}, F_l\} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & F_2 & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \\ & & & 0 \\ 0 & \mathbf{L} & 0 & F_l \end{bmatrix},$$

kde matice  $F_1, F_2, \mathbf{K}, F_l$  odpovídají komponentám grafu  $G$  (jezerům). Jestliže matice  $F_i$  odpovídá komponentě typu jezero, s invariantní množinou obsahující  $r_i$  vrcholů, potom má matice  $F_i$  právě  $r_i$  vlastních nenulových čísel, které jsou řešením rovnice

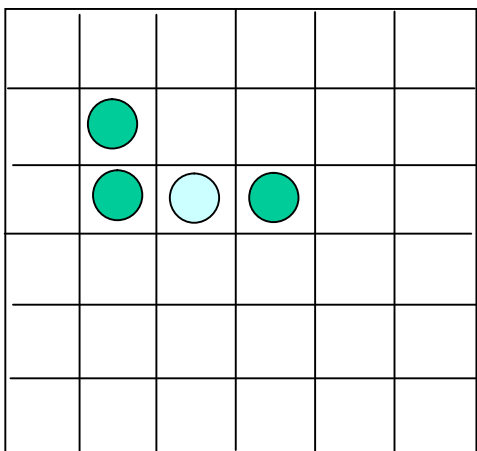
$$I^{r_i} - 1 = 0.$$

3. Násobnost vlastního čísla 1 matice systému určuje počet invariantních množin ve stavovém prostoru  $X$ .

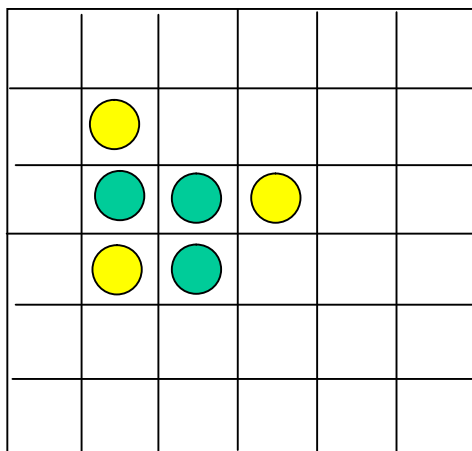
# Buňkový automat - hra „Life“

1. Mrtvá buňka s právě třemi sousedy se stává živou (zrození).
2. Živá buňka s dvěma nebo třemi živými sousedy zůstává živá (přežití).
3. Ve všech ostatních případech buňka umírá (přemnožení).

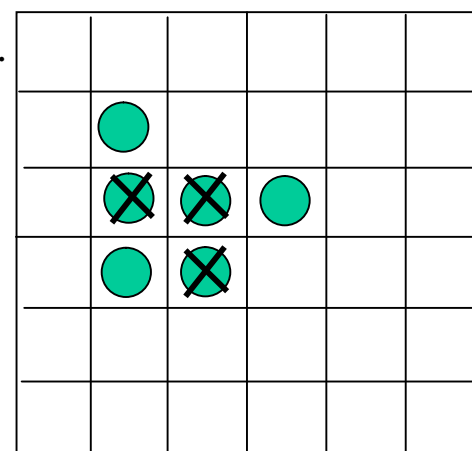
1.



2.

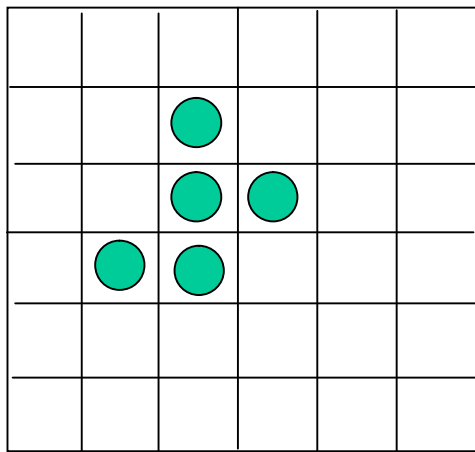


3.

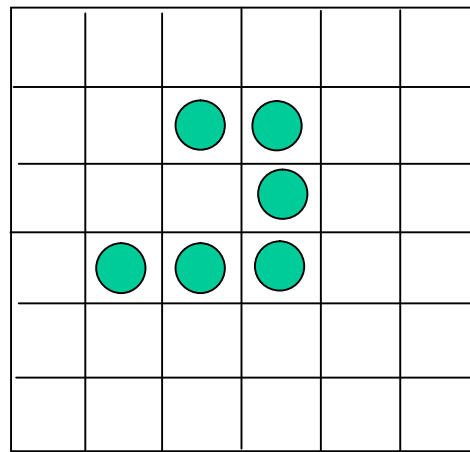


# Hra „Life“

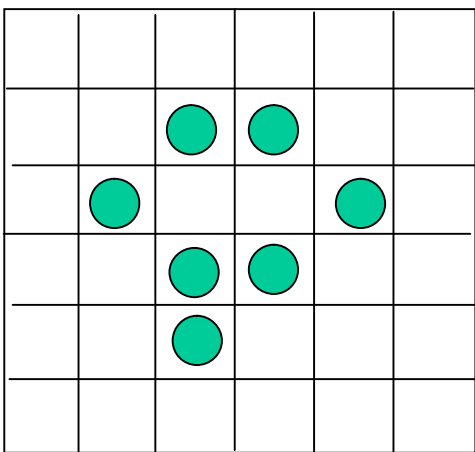
1.



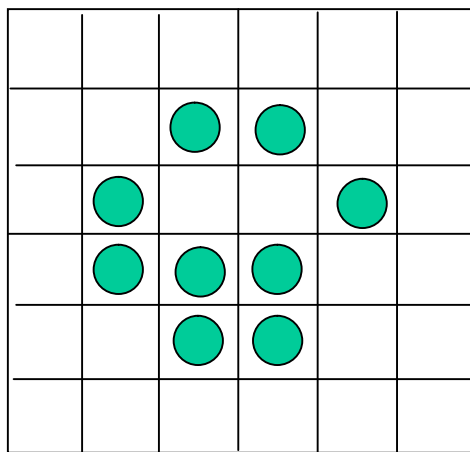
2.



3.



4.



# Otevřené problémy

6x6

$$X = \{0, 1, \mathbf{K}, 2^{36} - 1\}$$
$$f = ?$$

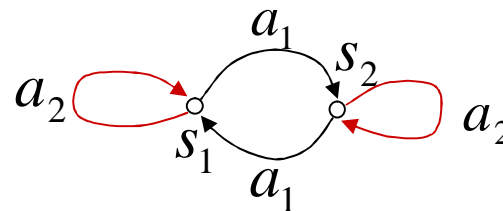

1. Co tvoří všechny invariantní tvary v omezené doméně.
2. Je možné nalézt konečný tvar kolonie na základě počátečního.
3. Co se stane s konečným tvarem změníme-li trochu počáteční ?
4. Je možné predikovat budoucnost ve složitých systémech ?

# Automat se vstupem

$$\begin{array}{ll} S: & x_{k+1} = f(x_k, u_k) & \text{stavová rovnice} \\ & x_k \in X = \{s_1, s_2, \mathbf{K}, s_n\} & \text{stavový prostor} \\ & u_k \in U = \{a_1, a_2, \mathbf{K}, a_m\} & \text{množina vstupů} \\ & f : X \times U \rightarrow X & \text{transformační fce} \end{array}$$

Příklad:

$f \downarrow$	$s_1$	$s_2$
$a_1$	$s_2$	$s_1$
$a_2$	$s_1$	$s_2$



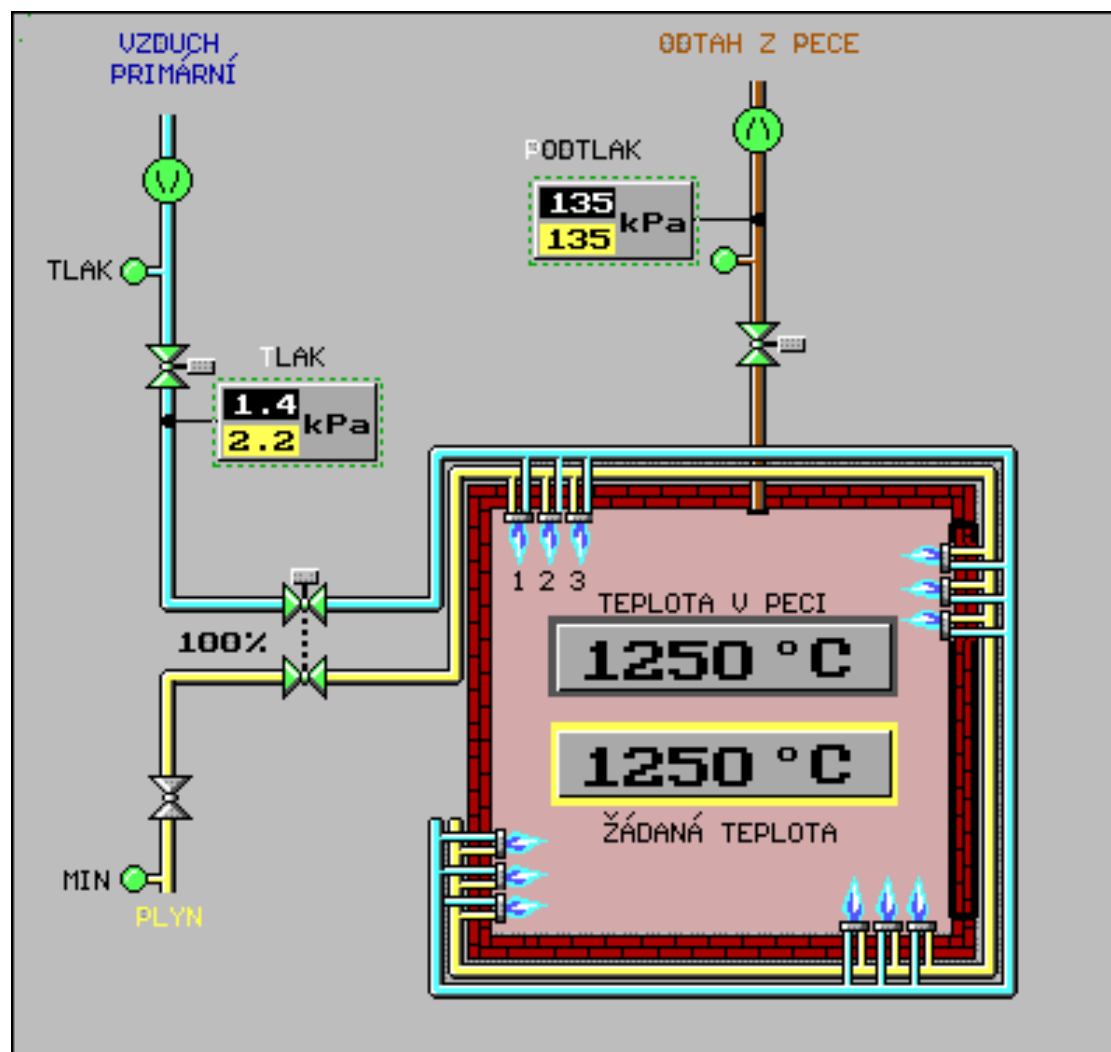
# Praktický příklad automatu

## Spouštění vozokomorové pece

Jako příklad použití konečného automatu zde uvedeme spouštění vozokomorové pece určené pro výpal šamotu a kameniny při teplotách až 1250°C. Sekvence příkazů při startování pece je následující: Po povelu *START* je spuštěn *ventilátor primárního vzduchu* a čeká se na příchod digitální vstupu *tlak OK*. Následuje povel na spuštění odtahového ventilátoru a čekání na příchod vstupu *podtlak OK*. V další fázi se rozhoduje, zda je pec spouštěna ve fázi chlazení nebo ve fázi výpalu. Pro fázi chlazení je proces spouštění ukončen. Pro fázi výpalu je nutno zapnout plyn a počkat na vstup *plyn OK*, a potom nastartovat hořáky, přičemž krok startování hořáků je nutno většinou nejméně jednou opakovat.

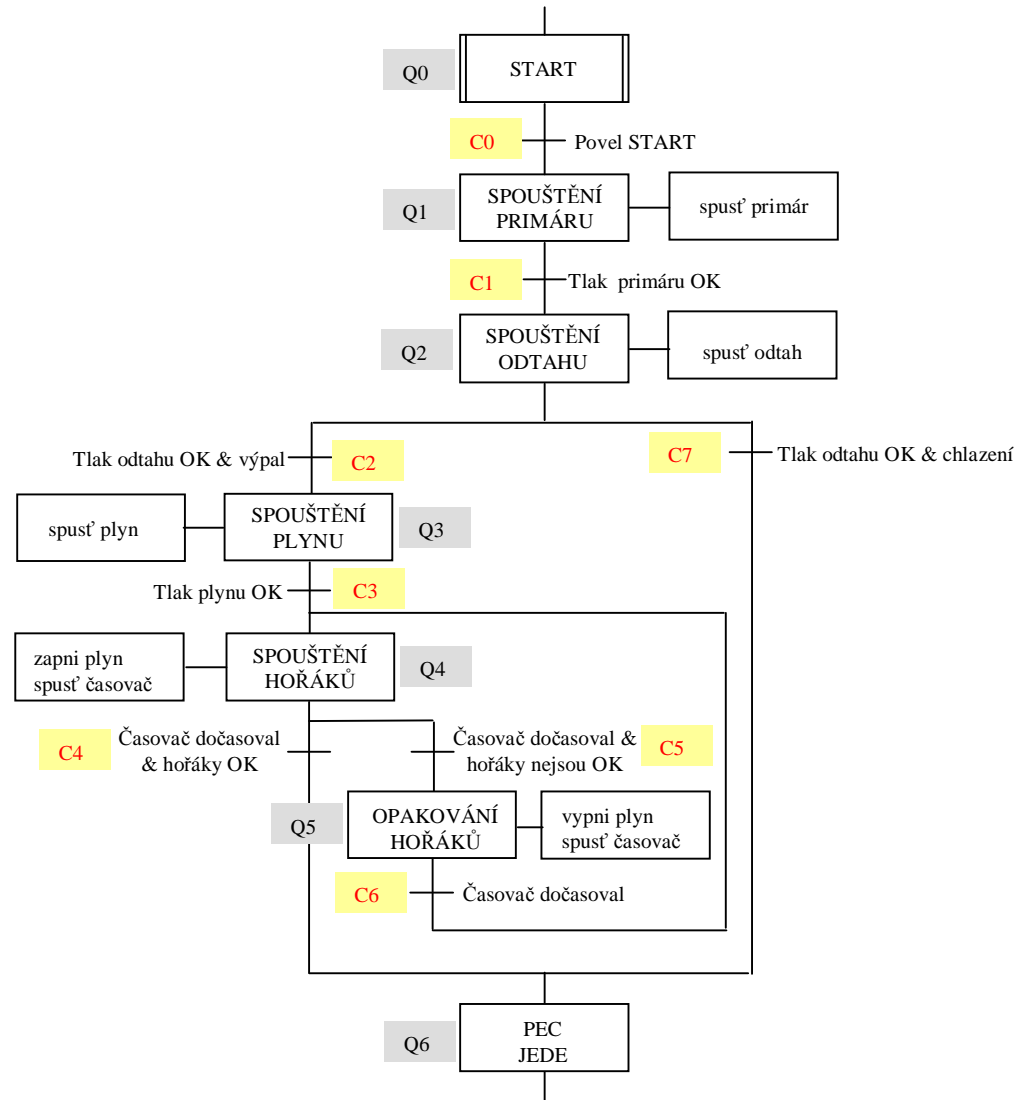
Po nastarování ventilátorů se čeká na digitální vstupy, které oznamují, že tyto ventilátory doopravdy běží (tlakové difference) Nepřijdou-li tyto vstupy do předem stanovené doby, je proces spouštění ukončen.

# Praktický příklad automatu





# Praktický příklad automatu



# Abstraktní systém diskrétní v čase a spojitý v prostoru

## Autonomní systém

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S}: & x_{k+1} = f(x_k) & \text{stavová rovnice} \\ & x_k \in X = R^n & \text{stavový prostor} \\ & f : R^n \rightarrow R^n & \text{transformační fce} \end{array}$$

## Systém se vstupem

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S}: & x_{k+1} = f(x_k, u_k) & \text{stavová rovnice} \\ & x_k \in X = R^n & \text{stavový prostor} \\ & u_k \in U = R^m & \text{prostor vstupů} \\ & f : R^n \times R^m \rightarrow R^n & \text{transformační fce} \end{array}$$

# Příklad 1: logistická rovnice

Logistická rovnice popisuje růst populace:

$$x_{k+1} = bx_k(1 - x_k) = bx_k - bx_k^2$$

$$x_0 \in (0,1)$$

$$b \in \langle 0,4 \rangle$$

čím větší populace  
tím větší přírůstek

při přemnožení  
dochází ke zpomalení  
přírůstku

The logistic equation gives the rule for determining the relative population  $x_{n+1}$  at the  $(n+1)^{\text{th}}$  year in terms of the population in the  $n^{\text{th}}$  year. To get a physical understanding of the terms in the the logistic equation, we can think of the  $b \cdot x_n$  term as a positive feedback term in the sense that as  $x_n$  increases so does the value of  $b \cdot x_n$ . This is same as saying that the population size in the next year ( $x_{n+1}$ ) is determined by the product of the previous population size  $x_n$  and the rate ( $b$ ) at which the population grows. Similarly, the term  $(1-x_n)$  can be thought of as a negative feedback, since increasing  $x_n$  will decrease  $(1-x_n)$  and therefore  $(1-x_n)$  can be thought of as population decline due to over population and scarce resources.

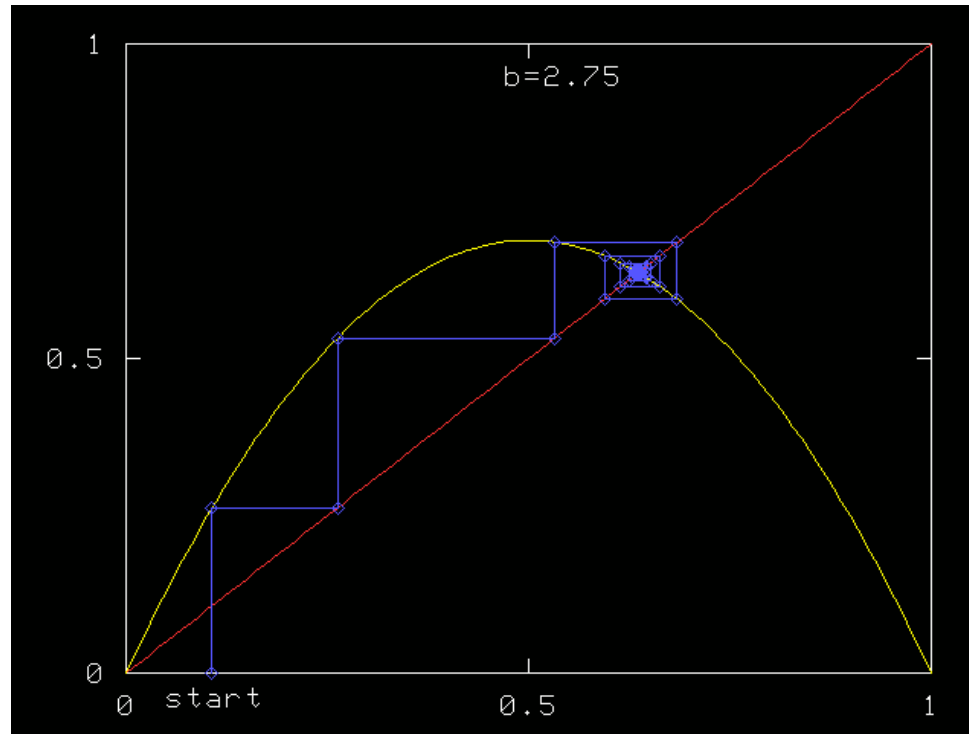
So what is the big deal about logistic equation. Well, it is the simplest one dimensional, nonlinear ( $x$  squared term), single parameter ( $b$  in equation (1)) model that shows an amazing variety of dynamical response.

# Příklad 1: logistická rovnice (pokr.)

## Grafická iterace

$$y = bx(1 - x)$$

$$x = y$$

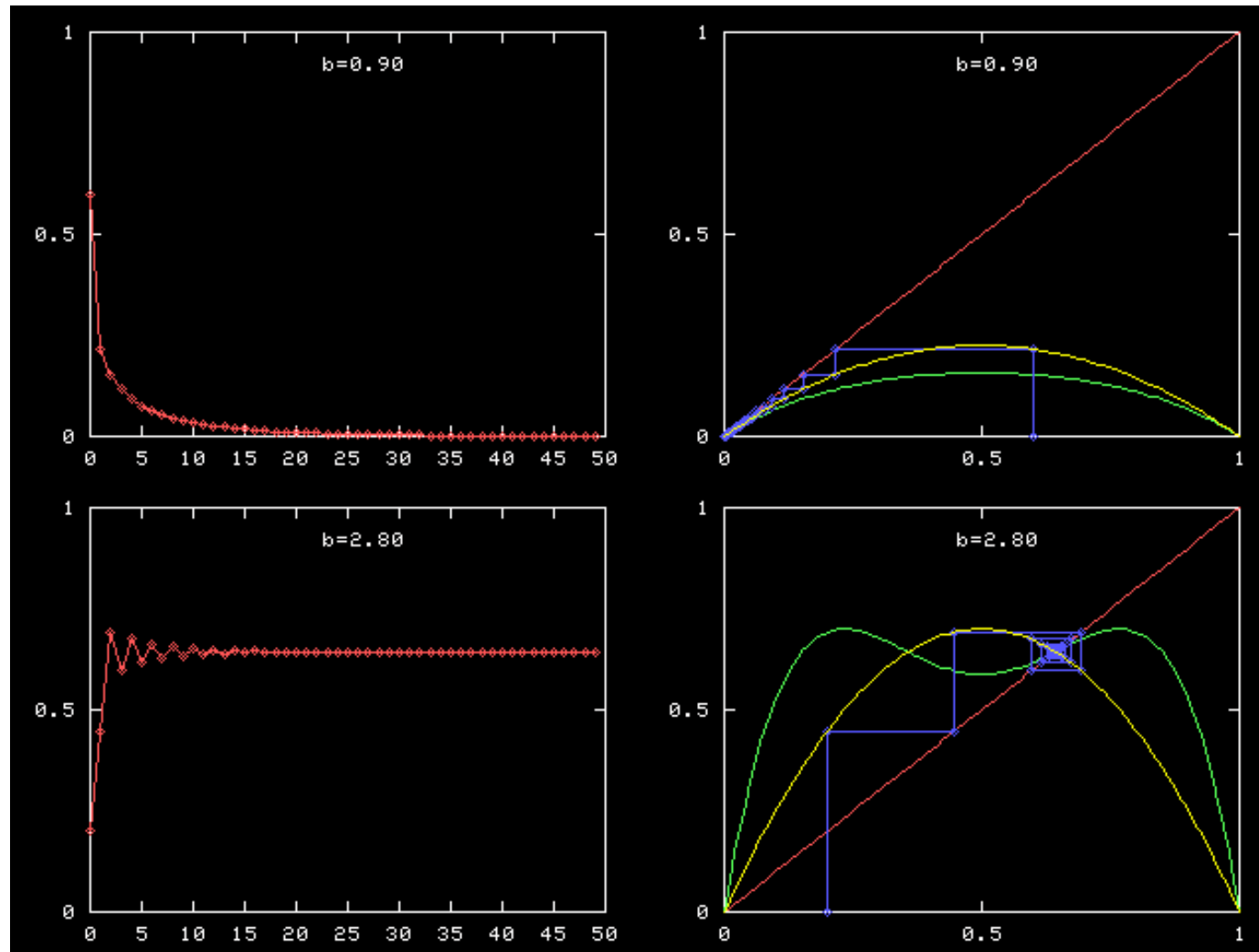


The graph corresponding to the logistic function  $y = b*x*(1-x)$  is a parabola which passes through the points (0,0) and (1,0) independent of the choice of the parameter **b**. The maxima of the parabola, which is always located at  $x=0.5$ , is  $0.25*b$ . There is a nice graphical visualization of the iteration process of logistic map via what is called the graphical iteration plot which shows how the iterates  $x_0, x_1, x_2, \dots$  can be obtained graphically.

To describe the iterative process, we plot the graph  $y = b*x*(1-x)$  (shown as yellow curve) and the  $y = x$  diagonal line (shown in red). The graphical iteration plots  $x_{n+1}$  against  $x_n$ . We start from the initial point on the x-axis. Next we draw a vertical line segment (shown in blue) from this initial point until it hits the parabola. From that point we draw a horizontal line segment until we hit the diagonal line. From there we continue to draw a vertical line segment until we hit the parabola again, and so on. The vertical line plots is simply a graphical representation of the iterative process and the horizontal lines could be thought of as a representative of the feedback mechanism.

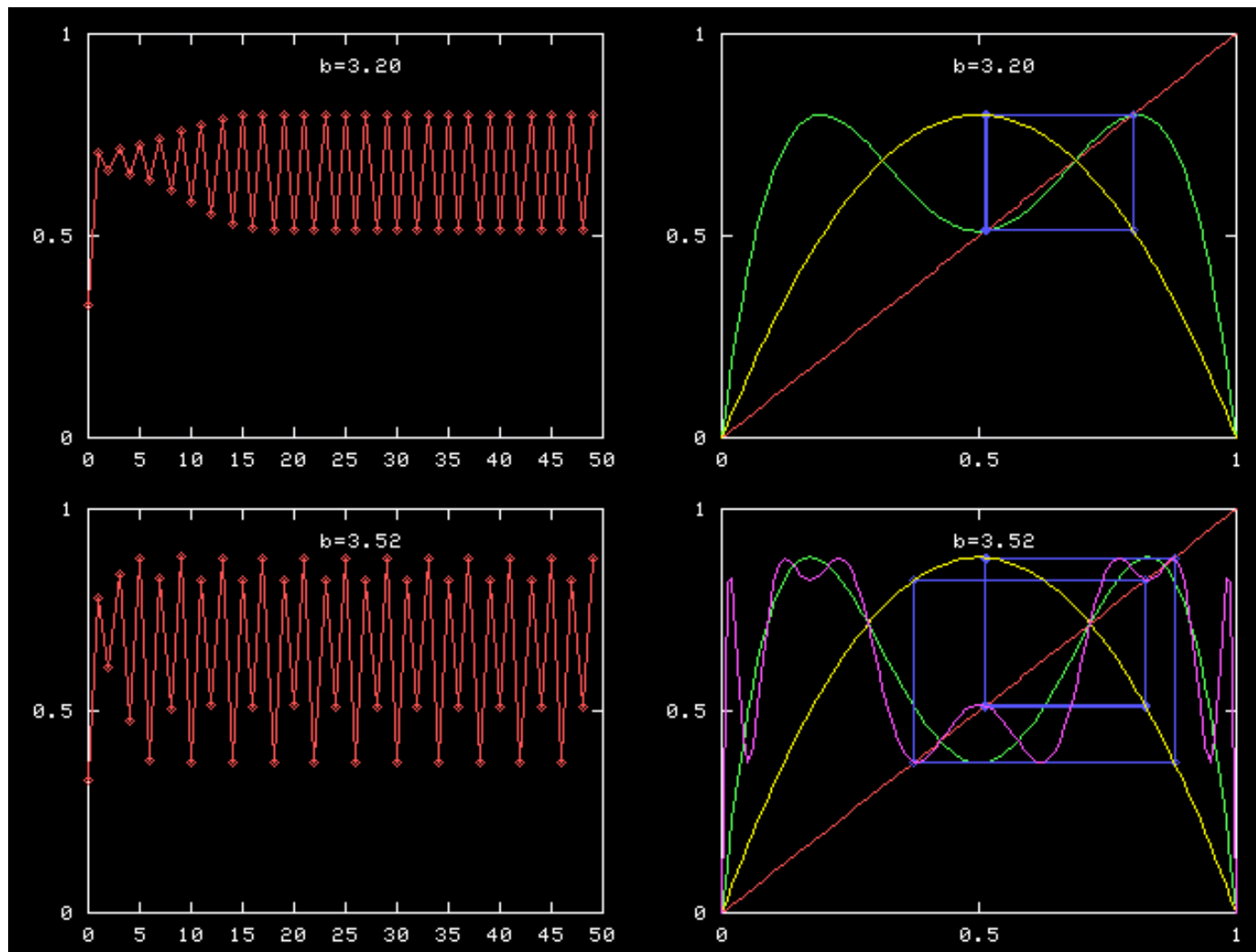
# Příklad 1: logistická rovnice (pokr.)

Rovnovážný stav



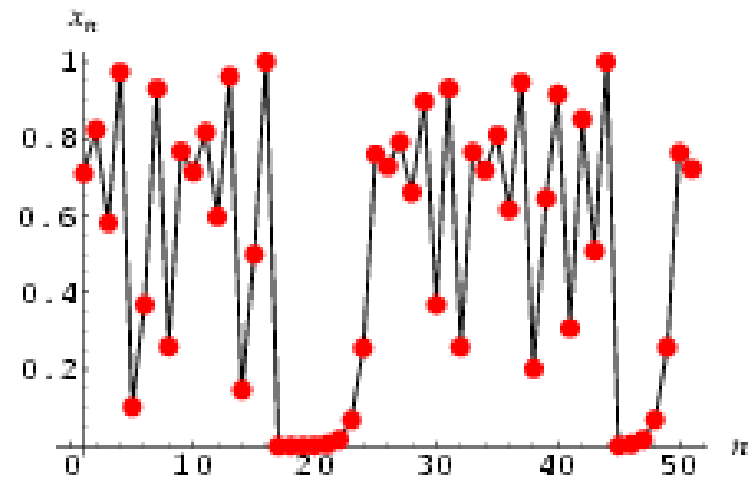
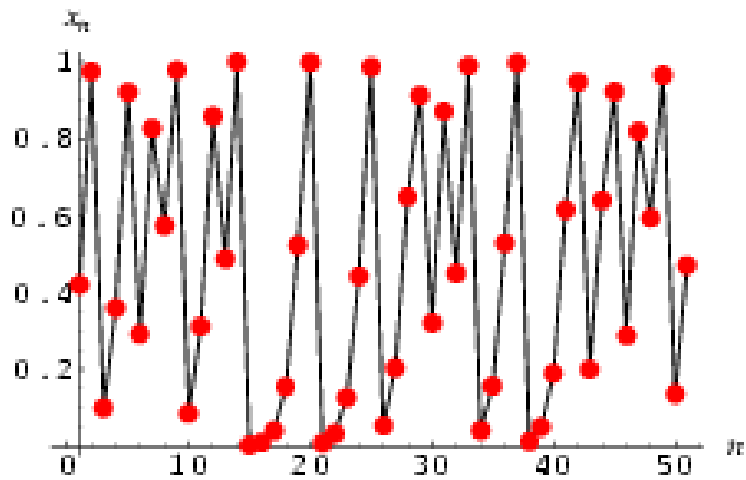
# Příklad 1: logistická rovnice (pokr.)

## Mezní cykly



# Příklad 1: logistická rovnice (pokr.)

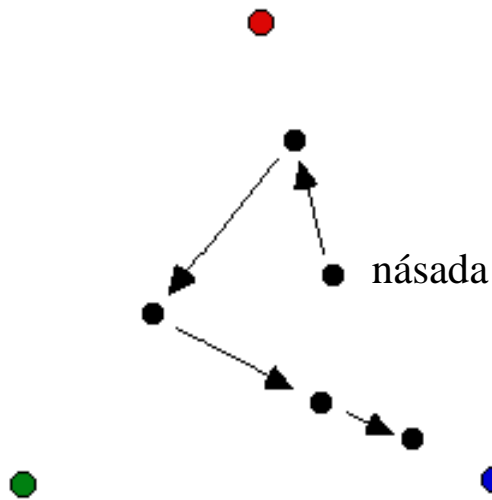
Případ  $b = 4$



$$x_k = \frac{1}{2} \{1 - \cos[2^k \cos^{-1}(1 - 2x_0)]\}$$

# Příklad 2: podivný atraktor

Geometrická hra (příklad systému diskrétního v čase a spojitého v prostoru s náhodným vstupem):



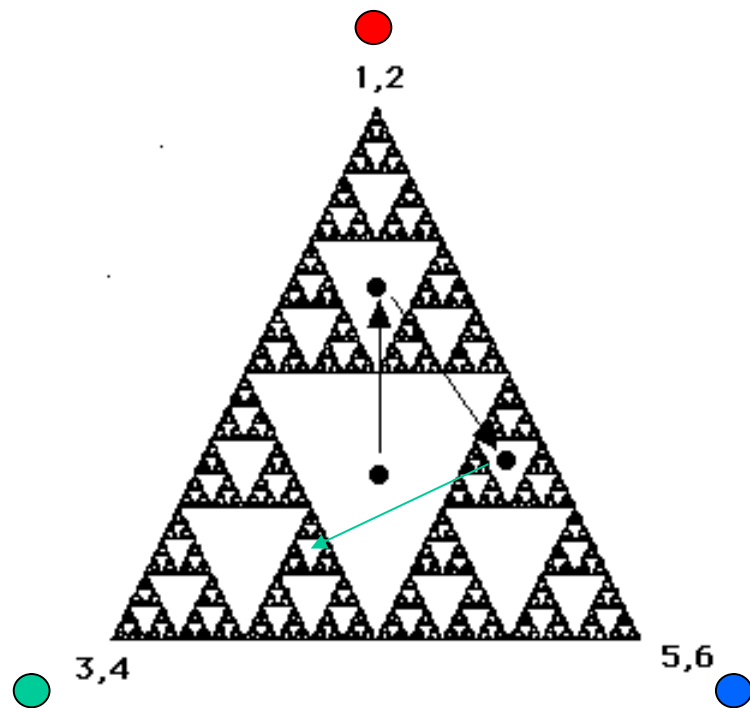
1. Nakreslíme vrcholy libovolného trojúhelníku a barevně je označíme (červená, modrá, zelená).
2. Uvnitř trojúhelníku zvolíme bod (násada).
3. Nyní opakovaně házíme hrací kostkou, která má dvě stěny červené, modré a zelené. Jestliže padne například červená, přejdeme z aktuálního bodu  $X$  (stavu) do nového bodu – středu úsečky jejíž krajní body jsou: červený vrchol trojúhelníku a aktuální bod  $X$ . Podobným způsobem postupujeme padne-li zelená nebo modrá.

Otázka:



# Příklad 2: podivný atraktor (pokr.)

Evoluce systému:



Na obrázku jsou naznačeny první dva kroky systému pro následující případ:

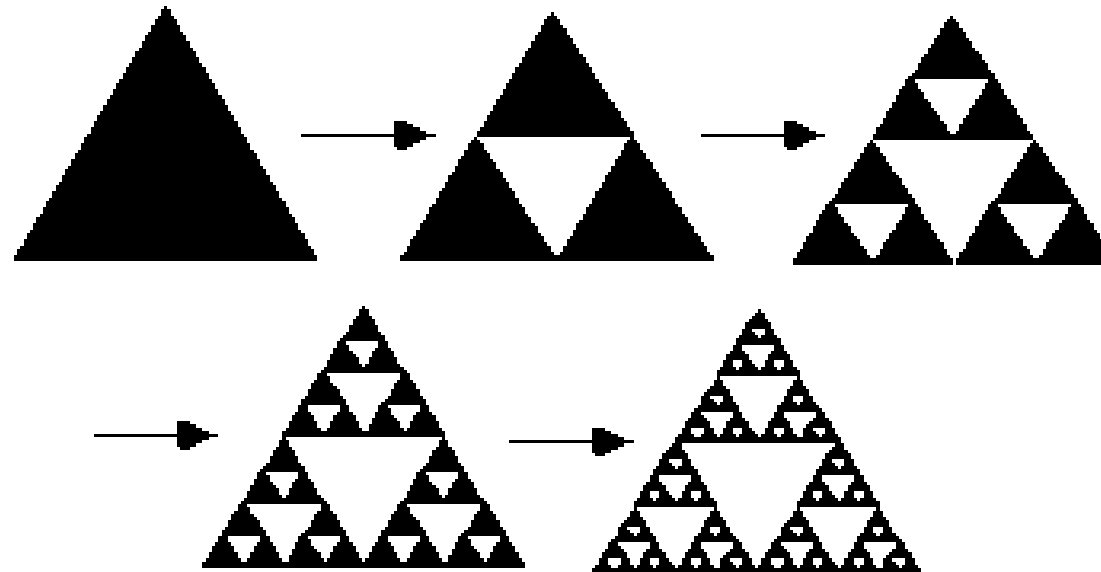
1. Násada je umístěna do středu trojúhelníka.
2. V prvním hodu padne červená a v druhém modrá.

Zřejmě platí:

1. Při každém kroku přejde aktuální bod z „bílého“ trojúhelníku do „bílého“ trojúhelníku s poloviční velikostí.
2. Aktuální bod konverguje k bodu trojúhelníku, který je vyznačen černě.
3. Hromadné body trajektorie systému tvoří tzv. Sierpiňského trojúhelník.

# Příklad 2: podivný atraktor (pokr.)

Definice Sierpińského trojúhelníku:



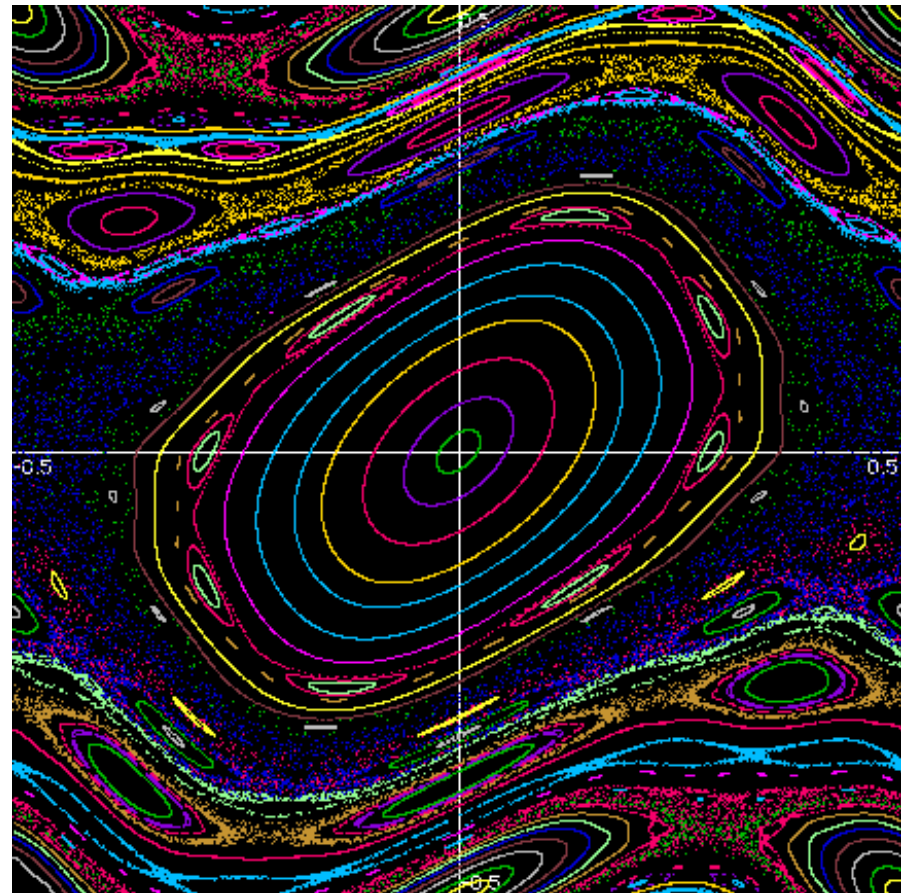
# Příklad 3: standardní zobrazení

Složitý systém:

$$x_{k+1}^1 = x_k^1 + x_k^2$$

$$x_{k+1}^2 = x_k^2 - 0.971635 \sin(2px_k^1) / (2p)$$

Periodická řešení jsou zobrazena uzavřenými křivkami různé barvy.



# Spojité autonomní diferenciální systém

Fyzikální zákony se nejjednodušeji a nejpřirozeněji formulují ve tvaru diferenciálních rovnic.

Spojité diferenciální systém lze získat limitním přechodem z diferenčního systému, který je diskrétní v čase a spojitý v prostoru.

$$x_{k+1} = \bar{f}(x_k)$$

$$x_{k+1} - x_k = \bar{f}(x_k) - x_k$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (x_{k+1} - x_k) / h = \lim_{h \rightarrow 0} (\bar{f}(x_k) - x_k) / h$$

$$\dot{x} = f(x)$$

stavová rovnice

$$x \in X = \mathbb{R}^n$$

stav systému

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Stacionární body  
(Rovnovážné body)

$$f(x) = 0$$

# Lineární spojité systém

## Nejjednodušší případ

$$\dot{x} = ax, \quad x(0) = x_0$$

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

$$\frac{dx}{x} = a dt$$

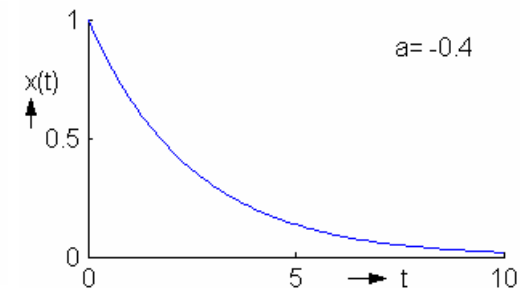
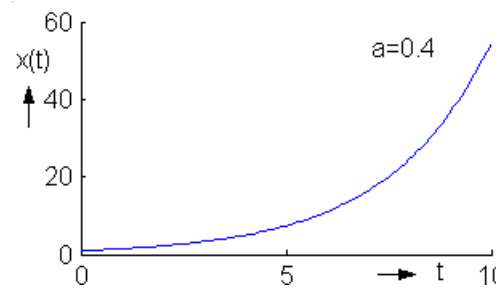
$$\int \frac{dx}{x} = \int a dt$$

$$\ln|x| = at + C$$

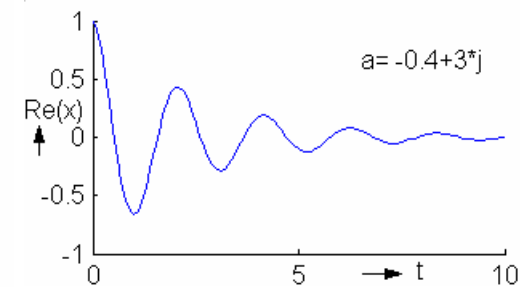
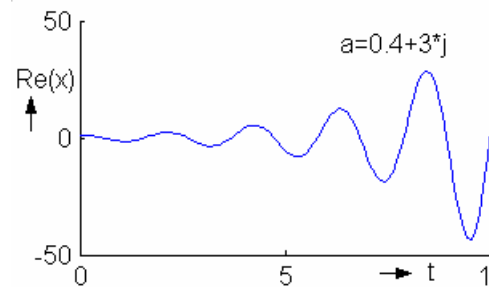
$$x(t) = e^C e^{at} = x_0 e^{at}$$

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

$a$  je reálné číslo



$a$  je komplexní číslo



$$e^{at} = e^{(s+jw)t} = e^{st} (\cos wt + j \sin wt)$$

# Lineární spojité systém

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

$$x \in R^n, \quad A \in R^{n \times n}$$

$$z = T^{-1}x \Leftrightarrow x = Tz$$

$$\dot{z} = T^{-1}\dot{x} = T^{-1}Ax = T^{-1}ATz$$

$$\dot{z} = \Lambda z = \begin{bmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & \mathbf{O} \\ & & & I_n \end{bmatrix} z$$

$$\dot{z}_1 = I_1 z_1$$

$$\dot{z}_2 = I_2 z_2$$

**L**

$$\dot{z}_n = I_n z_n$$

$$z = \begin{bmatrix} e^{I_1 t} & & 0 \\ & e^{I_2 t} & \\ 0 & & \mathbf{O} \\ & & & e^{I_n t} \end{bmatrix} z_0 \equiv e^{\Lambda t} z_0$$

$$x = Tz = Te^{\Lambda t} z_0 = Te^{\Lambda t} T^{-1} x_0 \equiv e^{At} x_0$$

$$x = e^{At} x_0$$

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} (At)^2 + \frac{1}{3!} (At)^3 + \mathbf{K}$$

Sloupce matice  $T$  jsou vlastní vektory matice  $A$ , neboť platí

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$AT = T\Lambda$$

# Fázový portrét lineárních systémů druhého řádu

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}$$

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

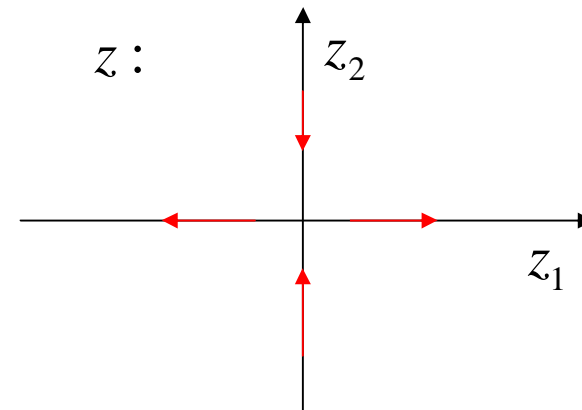
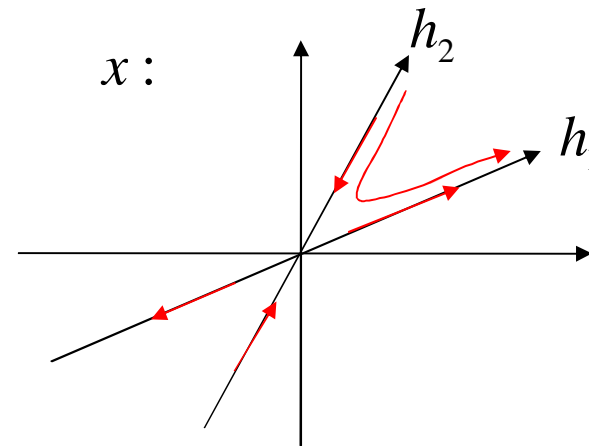
$$x(t) = c_1 h_1 e^{l_1 t} + c_2 h_2 e^{l_2 t}$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} z$$

$$z_1 = e^{l_1 t} z_{10}$$

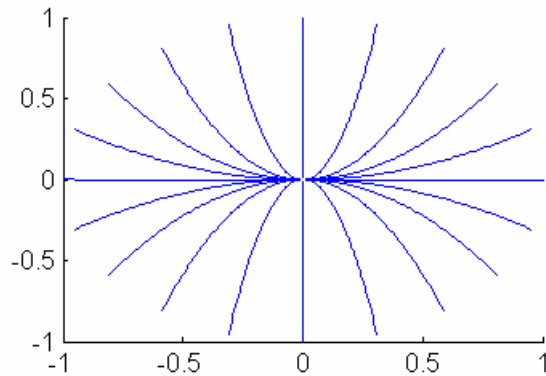
$$z_2 = e^{l_2 t} z_{20}$$

$$l_1 > 0, \quad l_2 < 0$$

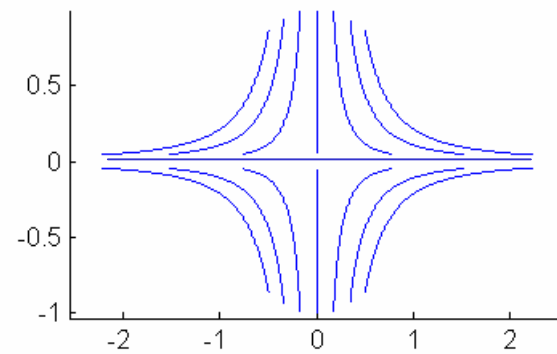


# Portréty ve fázové rovině $z$

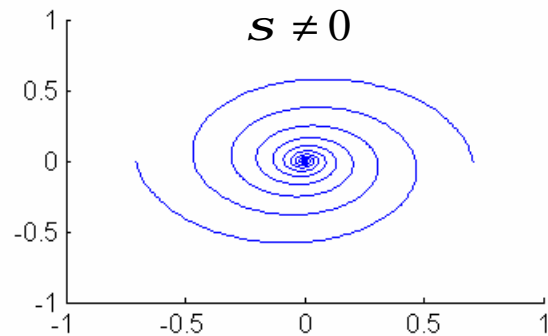
uzel:  $I_1 > 0, I_2 > 0$   
 $I_1 < 0, I_2 < 0$



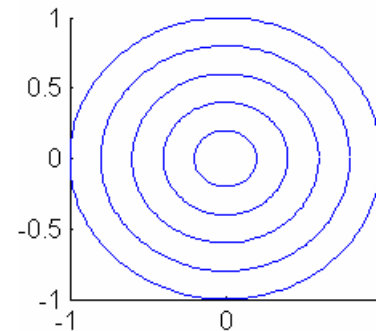
sedlo:  $I_1 > 0, I_2 < 0$   
 $I_1 < 0, I_2 > 0$



ohnisko:  $I_1 = s + jw$   
 $I_2 = s - jw$   
 $s \neq 0$



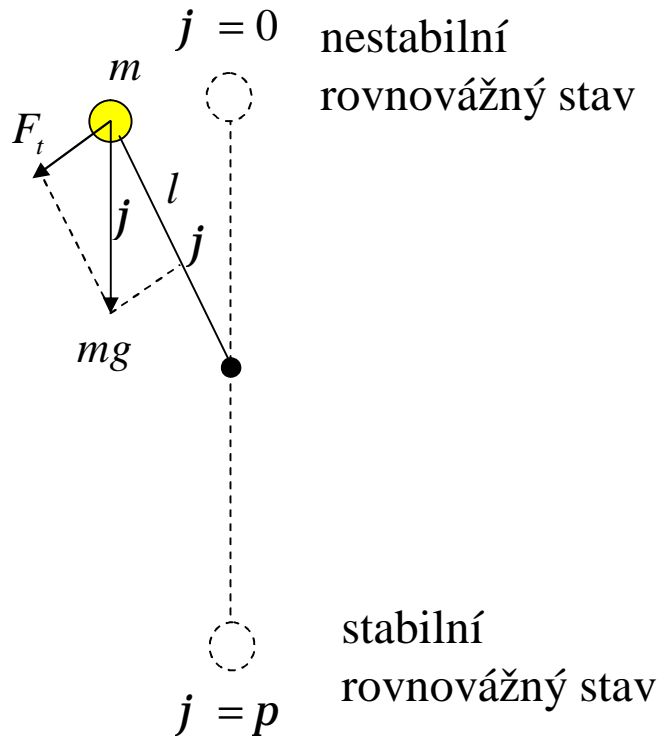
střed:  $I_1 = jw$   
 $I_2 = -jw$





# Příklad 1

Matematické kyvadlo:



$$F_t = ma_t = mg \sin j$$

$$a_t = v_t = l \ddot{j}$$

$$\ddot{j} = \frac{g}{l} \sin j$$

$$x_1 = j$$

poloha

$$x_2 = \dot{j}$$

úhlová rychlost

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g}{l} \sin x_1$$

popis systému ve tvaru vektorové diferenciální rovnice prvního řádu

# Příklad 1 (pokr.)

## Lokální linearizace v rovnovážných stavech:

Nestabilní rovnovážný stav

$$x_1 = x_2 = 0$$

$$\frac{g}{l} \sin x_1 \approx \frac{g}{l} x_1$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - lI) = l^2 - \frac{g}{l} = 0$$

$$l_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad l_2 = -\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Stabilní rovnovážný stav

$$x_1 = 0, \quad x_2 = p$$

$$\frac{g}{l} \sin x_1 = \frac{g}{l} \sin(p + (x_1 - p)) \approx -\frac{g}{l} (x_1 - p)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{gp}{l} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

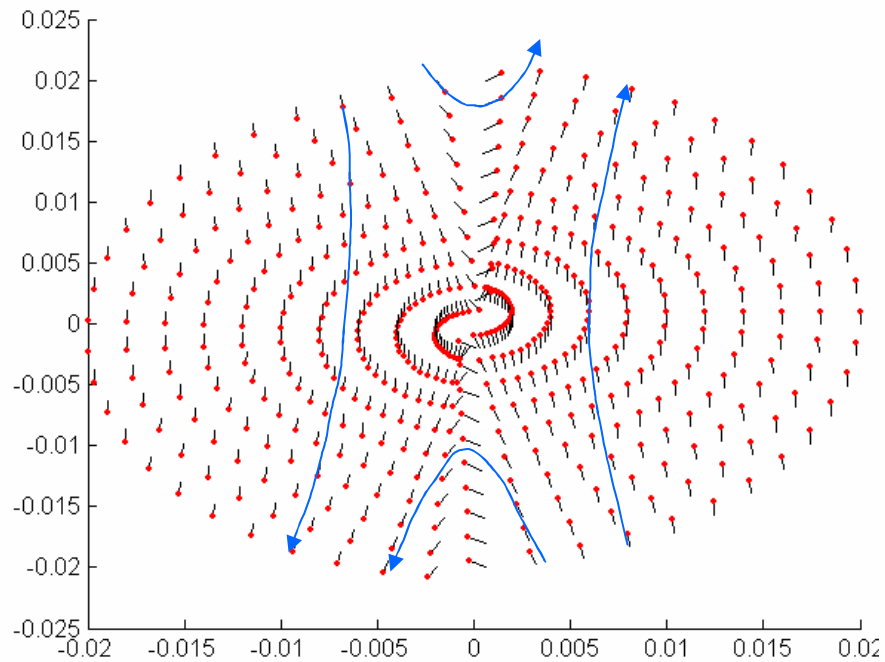
$$\det(A - lI) = l^2 + \frac{g}{l} = 0$$

$$l_1 = j\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad l_2 = -j\sqrt{\frac{g}{l}}$$

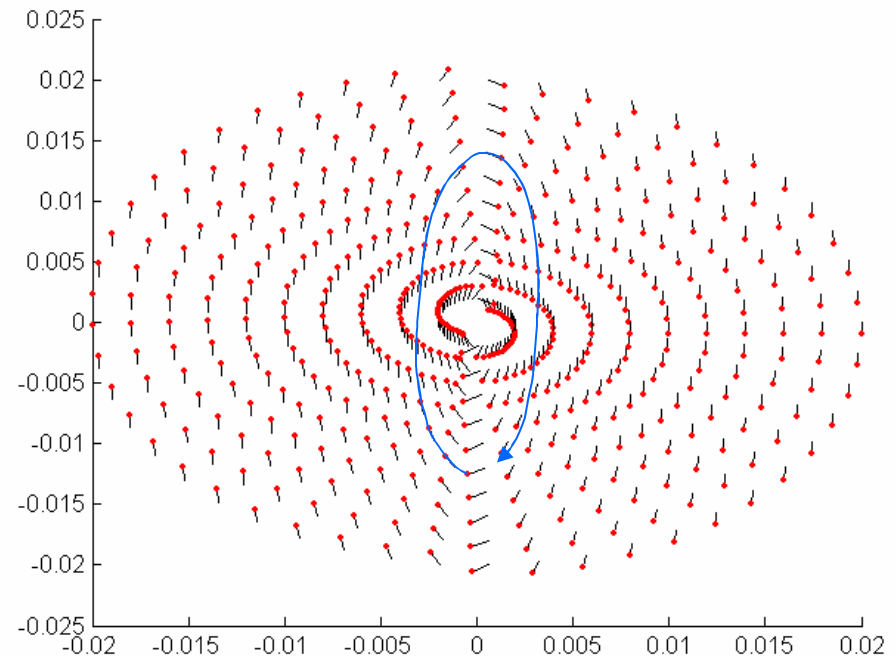
# Příklad 1 (pokr.)

Vektorové pole:

Nestabilní rovnovážný stav

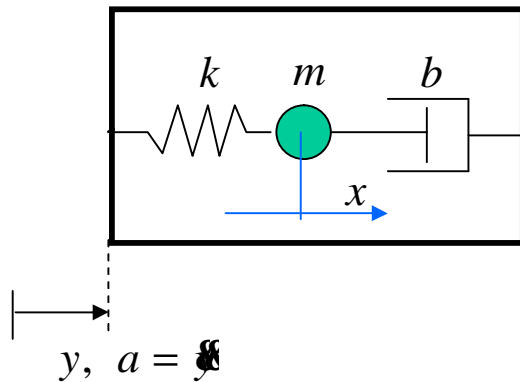


Stabilní rovnovážný stav



# Příklad 2

Akcelerometr :



$$F = m(\ddot{x} + a) = -kx - b\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -ma$$

V ustáleném stavu:

$$\dot{x} = \ddot{x} = 0 \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

Zrychlení  $a$  je úměrné poloze  $x$ .

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda \frac{b}{m} + \frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2}{m^2} - \frac{4k}{m}}$$

# Příklad 3

Mohou rysy sežrat všechny zajíce ?

$x_1$  počet zajíců

$x_2$  počet rysů

Kdyby zajíci neměli nepřátele:

$$\dot{x}_1 = e_1 x_1, \quad e_1 > 0$$

Kdyby existovali pouze rysy:

$$\dot{x}_2 = -e_2 x_2, \quad e_2 > 0$$

Za předpokladu, že žijí v jedné oblasti:

$$\dot{x}_1 = x_1 (e_1 - g_2 x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 (e_2 - g_1 x_1)$$

rovnovážný stav

$$x_1 (e_1 - g_2 x_2) = 0$$

$$-x_2 (e_2 - g_1 x_1) = 0$$

⇓

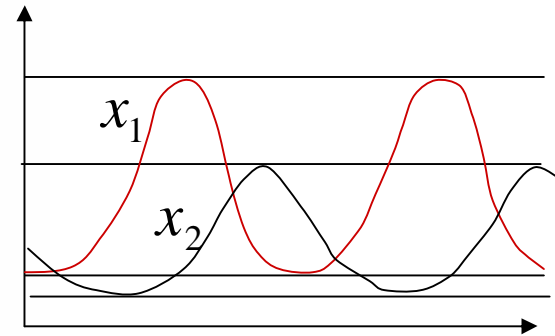
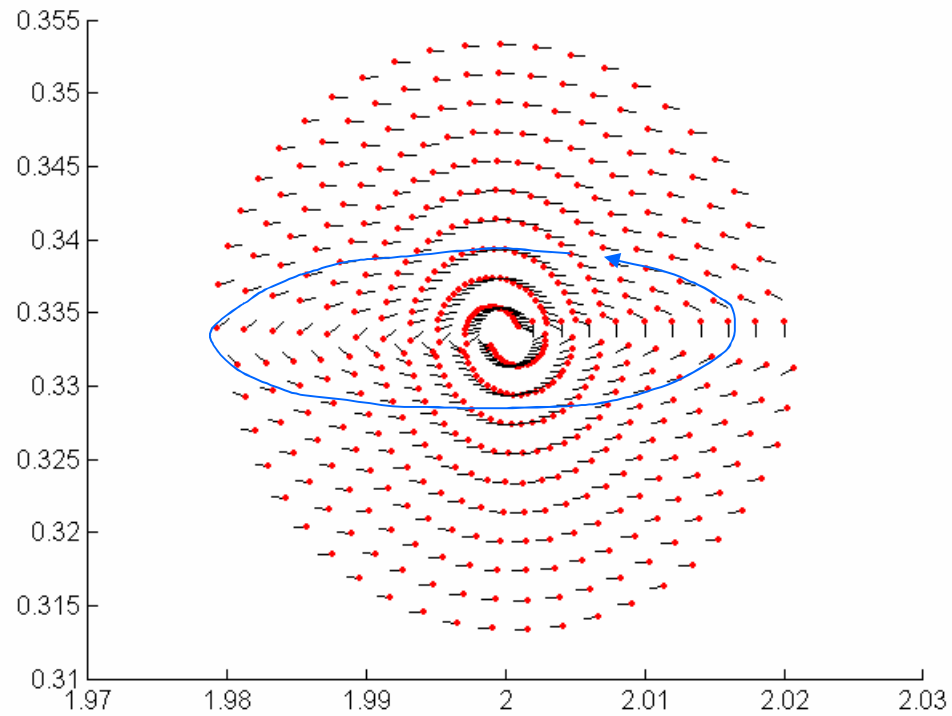
$$\bar{x}_1 = \frac{e_2}{g_1}, \quad \bar{x}_2 = \frac{e_1}{g_2}$$

⇓

$$I_{1,2} = \pm j \sqrt{e_1 e_2}$$

# Příklad 3 (pokr.)

Mohou rysy sežrat všechny zajíce ?



# Příklad 4

System generující chaos (Lorentz):

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = -bz + xy$$

Trajektorie zůstává v omezené oblasti stavového prostoru, ale není periodická ani nekonverguje ke stacionárnímu bodu.