



ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

SEMESTRÁLNÍ PRÁCE Z KIV/VSP

GENEROVÁNÍ NÁHODNÝCH ČÍSEL

V TROJÚHELNÍKOVÉM ROZDĚLENÍ

Martin Sloup, A08N0111P

msloup@students.zcu.cz

20.12.1984, zadání č. 9

ZADÁNÍ

Vytvořte generátor trojúhelníkového rozdělení jako funkci v jazyce Java, C či Pascal/Delphi (parametry rozdělení jsou zároveň parametry funkce generátoru) s využitím vhodné metody (inverzní transformace, kompoziční, vylučovací, atd.). Pro ověření správnosti řešení vytvořte program, který pro zadané parametry vrátí teoretickou střední hodnotu zadaného rozdělení, teoretickou hodnotu rozptylu (obě hodnoty matematicky odvoďte). Dále také střední hodnotu a rozptyl získaný z hodnot vygenerovaných pomocí generátoru. A v neposlední řadě i histogram četnosti výskytu.

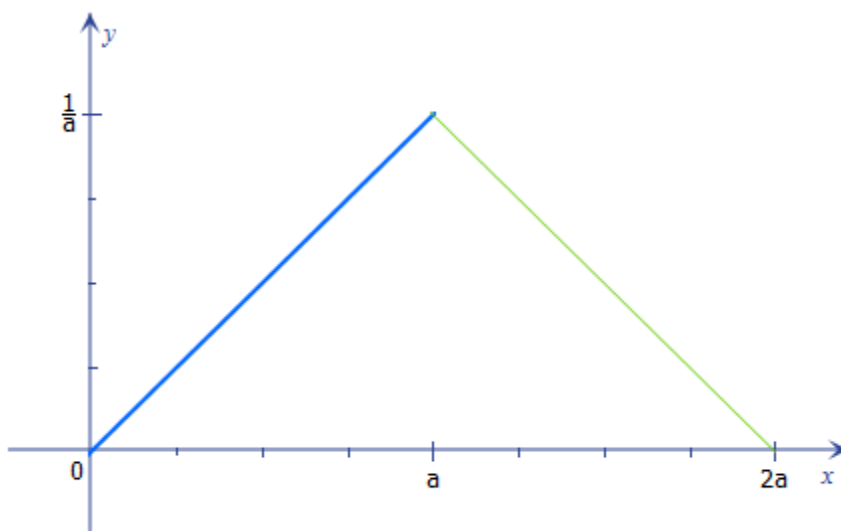
Pokud nebudou na příkazové řádce zadány příslušné hodnoty, zobrazte výsledek pro dva vámi vhodně zvolené parametry.

TEORIE

Trojúhelníkové rozdělení je v zadání definováno následujícím zápisem:

- $f(x) = 0$ pro $x < 0$
- $f(x)$ lineárně roste pro $0 < x \leq a$
- $f(x)$ lineárně klesá pro $a < x < 2a$
- $f(x) = 0$ pro $x > 2a$

Ze zápisu zcela neznáme tvar těchto dvou lineárních funkcí. Na obrázku 1 jsou naneseny naše dvě funkce. Obsah obrazce nad grafem je rovno 1, pokud zdvojnásobíme hodnotu parametru a , výška tohoto trojúhelníku bude poloviční. Čímž dostáváme výšku trojúhelníku $\frac{1}{a}$.



Obrázek 1

První funkci dostaneme z obecného vzorce lineární funkce $y = ax + b$. Písmeno a nám zde představuje náklon funkce. Ten dostaneme podílem Y souřadnice ku X souřadnice bodu ležící na této funkci. Tedy $a = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a^2}$. Písmeno b zde představuje posunutí. Výsledný vzorec první funkce je:

$$f_1(x) = \frac{x}{a^2}$$

Při stanovení vzorce druhé funkce postupujeme obdobně. Náklon je tu záporný, tj. $a = -\frac{1}{a^2}$. Posunutí u druhé funkce je $b = \frac{2a}{a^2} = \frac{2}{a}$. Výsledný vzorec druhé funkce je:

$$f_2(x) = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a} = \frac{2a - x}{a^2}$$

Nyní již známe tyto dvě funkce. K získání náhodných čísel trojúhelníkového rozdělení použijeme metodu inverzní transformace. Nejprve však potřebujeme distribuční funkce těchto dvou funkcí:

$$F_1(x) = y_1 = \int f_1(x) dx = \frac{x^2}{2a^2}$$

$$F_2(x) = y_2 = \int f_2(x) dx = \frac{4ax - x^2}{2a^2}$$

Vytvoříme inverzní funkce přehozením x a y a následnou úpravou dostaneme následující funkce:

$$F_1'(x) = \sqrt{2xa^2}$$

$$F_2'(x) = 2a - \sqrt{2a^2(1-x)}$$

První funkce je platná pouze v intervalu $0 \leq x \leq F_1(a)$, druhá funkce je platná pro zbytek intervalu normalizovaného rovnoměrného rozdělení, tj.: $F_1(a) < x \leq 1$.

Nakonec je ještě potřeba odvodit střední hodnotu a rozptyl. Střední hodnotu odvodíme pomocí vzorce:

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

V našem případě je střední hodnota rovna součtu tohoto integrálu našich dvou funkcí na jejich platném intervalu:

$$E\{x\} = \int_0^a \frac{x^2}{a^2} dx + \int_a^{2a} \frac{2a-x}{a^2} dx = \frac{1}{3}a + 4a - \frac{8}{3}a - a + \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a = a$$

Nyní to samé provedeme pro rozptyl:

$$D\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - E\{x\}^2$$

$$D\{x\} = \int_0^a \frac{x^3}{a^2} dx + \int_a^{2a} \frac{x^2(2a-x)}{a^2} dx - a^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{16a^2}{3} - \frac{16a^2}{4} + \frac{2a^2}{3} + \frac{a^2}{4} - a^2 = \frac{a^2}{6}$$

IMPLEMENTACE

Testovací program byl vytvořen v programovacím jazyce Java. Jako vstup do inverzních funkcí použijeme normalizované rovnoměrné rozdělení implementované pomocí funkce `nextDouble()` ve třídě `Random`. Funkce vracející náhodná čísla v trojúhelníkovém rozdělení bude vypadat následovně:

```
private double generateNumber() {
    double x = random.nextDouble();

    if (x <= 1./2) {
        return Math.sqrt(2 * x * a * a);
    } else {
        return 2 * a - Math.sqrt((1.-x)*2*a*a);
    }
}
```

Výpočet střední hodnoty a rozptylu v programu je z generovaných hodnot počítána z upraveného vzorce:

$$E\{x\} = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$D\{x\} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

Výpočet střední hodnoty není v našem případě problém získat. U výpočtu rozptylu však narazíme na problém, kdy je potřeba si uchovat seznam vygenerovaných hodnot. To pro vysoké N může být problém z důvodu paměťové náročnosti. Proto patřičnými úpravami lze dostat přibližný rozptyl:

$$D\{x\} \approx \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

U této aproximace platí, čím vyšší N tím blíže se přiblížíme hodnotě původního vzorce. Z programátorského hlediska tedy stačí si uchovávat sumarizační proměnné S_x a S_x^2 . Střední hodnotu získáme po skončení generování hodnot podílem $\frac{S_x}{N}$, rozptyl podílem $\frac{S_x^2}{N}$ mínus kvadrát

střední hodnoty. Jedna menší nevýhoda této metody je možné přetečení proměnných S_x a S_x^2 a samozřejmě zaokrouhlovací chyby.

ZÁVĚR

ZÍSKANÉ VÝSLEDKY

Správná implementace programu byla testována pro parametr $a = 1$ a $a = 2$. V obou případech bylo vygenerováno 100 000 hodnot.

- **Pro $a = 1$:**
 $E_{teorie}=1.0$
 $D_{teorie}=0.16666666666666666$
 $E_{vypocet}=1.0006011385159301$
 $D_{vypocet}=0.1668680548360959$
- **Pro $a = 2$:**
 $E_{teorie}=2.0$
 $D_{teorie}=0.6666666666666666$
 $E_{vypocet}=2.0005399147577867$
 $D_{vypocet}=0.6638311428967052$

ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ

Navržený generátor náhodných čísel trojúhelníkového rozložení se povedlo ověřit a otestovat. Vypočítané hodnoty střední hodnoty a rozptylu z náhodných čísel jsou docela blízko teoretickým hodnotám.

PŘÍLOHY

Ukázka výstupu programu volaného bez parametrů:

```
KIV/VSP: Generator trojuhelnikoveho rozdeleni
Autor: Martin Sloup, A08N0111P, msloup@students.zcu.cz

Vstup bez parametru! Bude generovano 100 000 hodnot pro a=1 a a=2

* Pro a = 1:
E_teorie=1.0
D_teorie=0.16666666666666666
E_vypocet=0.9991042110508216
D_vypocet=0.16719645837157215

-0.1250:
0.0000:
0.1250:**
0.2500:***
0.3750:*****
0.5000:*****
0.6250:*****
0.7500:*****
0.8750:*****
1.0000:*****
1.1250:*****
1.2500:*****
1.3750:*****
1.5000:*****
1.6250:***
1.7500:**
1.8750:
2.0000:

* Pro a = 2:
E_teorie=2.0
D_teorie=0.6666666666666666
E_vypocet=2.004749659752927
D_vypocet=0.6615379981504015

-0.2500:
0.0000:
0.2500:**
0.5000:***
0.7500:*****
1.0000:*****
1.2500:*****
1.5000:*****
1.7500:*****
2.0000:*****
2.2500:*****
2.5000:*****
2.7500:*****
3.0000:*****
3.2500:***
3.5000:**
3.7500:
4.0000:
```