Fyzika

Klasická mechanika

- popisuje mechanický pohyb těles, které se přemisťují v prostoru rychlostí v << c
- 2 oblasti
    - - kinematika – zkoumá pohyb bez ohledu na jeho příčiny
    - - dynamika – zkoumá souvislost mezi charakteristikami pohybu a silami, které ho způsobují

Kinematika hmotného bodu

- **HB** – myšlený bezrozměrný objekt o nenulové hmotnosti
- pozn.: pojem HB se zavádí při modelování reálných těles(Z kolem S – Z=HB), jindy se reálné těleso chápe jako systém obrovského počtu HB
- **poloha HB -**
  $\vec{r} \equiv [x, y, z]$... polohový vektor
  $|\vec{r}| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.... velikost polohového vektoru

- **pohyb HB** - platí: Δs - délka oblouku opsaného hmotným bodem za čas $\Delta t = t_2 - t_1$
  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ - změna polohového vektoru za čas Δt
  - obecně $\Delta s \neq |\Delta \vec{r}|$
- pozn.: - pohyb HB je popsán , známe-li fci $\vec{r} = \vec{r}(t) \equiv [x(t), y(t), z(t)]$
- **rychlost HB** – pro $\Delta t \to 0 : \Delta \vec{r} \to d\vec{r}, \Delta s \to ds \Rightarrow dr = \vec{\tau} ds$ - elementární délka opsaného oblouku
- platí: - $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{ds}{dt}\vec{\tau}$
- potom: • $\vec{v} \,//\, \vec{\tau}$ tj. rychlost míří v daném okamžiku ve směru tečny k dráze
  • $\vec{v} \equiv [v_x, v_y, v_z]$, kde $v_x = \dfrac{dx}{dt}, v_y = \dfrac{dy}{dt}, v_z = \dfrac{dz}{dt}$
- **zrychlení HB -**
- platí: $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ - zrychlení v daném okamžiku
- potom: $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$; $a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$; $a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2}$

Dynamika hmotného bodu

- dynamika HB je popsána 3 Newtonovými zákony, které představují základ mechaniky
- **1.Newtonův** zákon (zákon setrvačnosti): V inerciálních soustavách(tj. takových, které jsou vůči sobě buď v klidu nebo pohybu rovnoměrně přímočarém) zůstává těleso v klidu nebo pohybu rovnoměrně přímočarém, dokud na ně nepůsobí jiná tělesa(vnější síla)
- pozn.: - existenční teorém, který popisuje existenci systémů s určitou, z fyzikálního hlediska významnou, vlastností – důležité pro popis těles
- příklad neinerciálního systému – systém pevně spojený z rozjíždějícím se dopravním prostředkem, nebo s rotujícím tělesem – pozorovatel v nich vidí, že se vnější tělesa pohybují se zrychlením, ale při tom na ně nepůsobí žádná síla
- **2.Newtonův** zákon (zákon síly): $\vec{F} = m\vec{a}$
  $\vec{F}$...působící síla
  m...hmotnost
  $\vec{a}$...vyvolané zrychlení
- pozn.: • zákon síly je nejdůležitější Newtonův zákon, neboť spojuje příčinu pohybu(působící síla) z následku(vyvolané zrychlení
  • postup při řešení dynamických problémů(pohyb v silových polích
  (i) – vyjádříme celkovou působící sílu(obecně dána vektorovým součtem všech působících sil)

(ii) – řešíme pohybovou rovnici $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}$ s cílem stanovit funkci $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (závislost polohového vektoru na t)

- **3.Newtonův** zákon (zákon akce a reakce) – každá akce vyvolává stejně velkou reakci opačného směru

- platí: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$
  $\vec{F}_{21}$...síla, kterou působí 2. HB na 1.HB
  $\vec{F}_{12}$...síla, kterou působí 1. HB na 2.HB

Impuls síly

- platí: $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$
  t_1...počáteční čas
  t_2...konečný čas
- vyjadřuje časový účinek síly

Hybnost HB

- $\vec{p} = m\vec{v}$

Moment síly

- platí: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\vec{r}$...polohový vektor působiště síly
- moment vzhledem k nějakému vztažnému bodu
- $\vec{M} \perp \vec{r}, \vec{F}$ (vektory v pořadí $\vec{r}, \vec{F}$ a $\vec{M}$ tvoří pravotočivý systém)
- platí: $\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \sin\alpha$

Moment hybnosti

- $\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p}$
  $\vec{b}$...moment hybnosti vzhledem k nějakému vztažnému bodu
  $\vec{r}$...polohový vektor v němž určujeme hybnost
- pozn.: - moment síly a moment hybnosti mají zásadní význam při popisu rotačních pohybů

Mechanická práce

- platí: $A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}d\vec{r}$ A_{12}...práce, kterou vykoná HB při přechodu z polohy 1 do polohy 2
- je vyjádřena křivkovým integrálem, kde $\vec{r}_1$ je poloha počátečního bodu a $\vec{r}_2$ poloha konečného bodu
- obecně platí: (i) $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$
  (ii) $\alpha = \alpha(\vec{r})$

Výkon

- $P = \frac{dA}{dt}$ P...výkon(vyjadřuje, jak rychle se koná práce)

Kinetická energie

- v nerelativistickém případě (v<<c) platí: $K = \frac{1}{2}mv^2$
- platí: $A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m\vec{v}d\vec{v} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} mvdv = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1$

  tj. došlo ke zvýšení kinetické energie HB

Konzervativní silové pole a potenciální energie

- • silové pole je zadáno, známe-li v každém bodě prostoru fci $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$
- • silové pole je konzervativní platí-li:
  $\oint \vec{F}d\vec{r} = 0$
  - integrál po uzavřené křivce
  - vyjadřuje práci, kterou vykoná HB na své uzavřené křivce

- • v konzervativním silovém poli je možno zavést potenciální energii U, pro kterou platí:

$$\vec{F} = -gradU \equiv -\nabla U \equiv \left[-\frac{\partial U}{\partial x}; -\frac{\partial U}{\partial y}; -\frac{\partial U}{\partial z} \right]$$

Explicitní vyjádření potenciální energie

$$\vec{F} = -gradU \; / \int \cdot d\vec{r}$$

- platí: $\int \vec{F} d\vec{r} = \int - gradU d\vec{r} = -\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = -U(\vec{r}) + konst.$

  - totální diferenciál
- po úpravě: $U(\vec{r}) = -\int \vec{F} d\vec{r} + konst.$
  - U - potenciální energie HB v daném místě prostoru
  - $konst.$ - aditivní konstanta jejíž hodnotu určíme po vhodné volbě okrajové podmínky
- pozn.: - potenciální energii v daném silovém poli dokážeme stanovit až když máme výraz pro $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ (viz. Cv.č2)
- platí: $A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = -\int gradU d\vec{r} = -[U(\vec{r})]_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} = U_1 - U_2$
  - A_{12} - práce, kterou vykoná síla $\vec{F}$ při přechodu z bodu1 do 2
  - dochází k úbytku potenciální energie(práce v konzervativním poli nezávisí na tvaru dráhy

Zákon zachování mechanické energie

- v konzervativním silovém poli zvolíme 2 libovolné body, označíme dráhu, určíme práci
- platí: $A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} =$ viz. výše $K_2 - K_1 =$ viz. výše $U_1 - U_2$ - platí pouze v konzerv. sil. poli
- potom: $K_2 + U_2 = K_1 + K_2$ - v bodě 1
- - celková mechanická energie v bodě 2
- závěr: -oba body v prostoru byly zvoleny libovolně, tj. vztah o rovnosti celkové mechanické energie platí v celém prostoru $\Rightarrow$ v konzervativním silovém poli se zachovává celková mechanická energie
- pozn.:
- - příklady KSP: - gravitační pole, pole lineárního harmonického oscilátoru, elektrostatické pole,…
- - příklady nKSP: - vždy, když dochází k brždění pohybu(tření, odpor prostředí)

Dynamika soustavy HBů

- soustava HBů slouží jako model reálných těles
- pohyb více těles v případě, že každé z nich lze zobrazit hmotným bodem
- pohyb 1 reálného tělesa, které považujeme za soubor obrovského množství hmotných bodů(představy HB nelze použít při rotaci)
- uvažujme systém N HBů

I. impulsová věta

- uvažujme systém N HBů
- pro i-tý HB platí: $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$ $\vec{F}_i$...celková síl působící na i - tý HB; $\vec{p}_i$...hybnost i - tého HB
- platí: $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,E} + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji}$, kde $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ $\vec{F}_i^{\,E}$...celková vnější síla

- po dosazení:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\,E} + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji} \quad / \sum_{i=1}^{N}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,E} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji}}_{\downarrow}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{1i} + \vec{F}_{2i} + \ldots + \vec{F}_{Ni}\right) = \vec{F}_{11} + \vec{F}_{12} + \ldots + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{22} + \ldots + \vec{F}_{2N} + \ldots + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \ldots + \vec{F}_{NN} = 0,$$

neboť $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0, \vec{F}_{ii} = 0$

- dostáváme: $\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}_{\vec{P}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,E}}_{\downarrow}$ $\vec{P}$...celková hybnost systému

  celková vnější síla působící na systém ($\vec{F}^{\,E}$)

- dostáváme: $\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\,E}}$ I. impulsová věta
- důsledek: - v izolovaném systému platí: $\vec{F}_i^{\,E} = 0, \forall i \Rightarrow \vec{F}^{\,E} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = konst.$, tj. v izolovaném systému se zachovává celková hybnost
- pozn.: - skok z loďky, výstřel z hlavně, únik spalin z raketového motoru $\Rightarrow$ pohyb loďky, zbraně a rakety opačným směrem

<u>II. impulsová věta</u>

$$\frac{d\vec{b}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i\right) = \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i\vec{v}_i}_{\underbrace{\vec{v}_i // m_i\vec{v}_i}_{=0}} + \vec{r}_i \times \underbrace{\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\right)}_{\vec{F}_i}$$

pro i-tý HB platí: $\frac{d\vec{b}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, kde $\vec{F}_i$ je celková síla působící na i - tý HB

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,E} + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji}$$

$$\frac{d\vec{b}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,E} + \vec{r}_i \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji} \quad / \sum_{i=1}^{N}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{b}_i}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,E}}_{\vec{M}_i^{\,E}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{r}_i \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji}\right)}$$

moment vnější síly působící na i - tý HB

- po dosazení: $= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (\vec{F}_{1i} + \vec{F}_{2i} + \ldots + \vec{F}_{Ni}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{11} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \ldots + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{N1} + \ldots + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{22} + ..$

  $. + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{N2} + \ldots + \vec{r}_N \times \vec{F}_{1N} + \vec{r}_N \times \vec{F}_{2N} + \ldots + \vec{r}_N \times \vec{F}_{NN} = 0$, neboť celou sumu lze rozepsat na součet dvojic $\vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \underbrace{\left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right)}_{// \vec{F}_{ij}} \times \vec{F}_{ij} = 0$

- dostáváme: $\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\vec{b}_i}_{\vec{B}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i^E}_{\vec{M}^E}$

$\vec{B}$... celkový moment hybnosti soustavy HBů, vzhledem k nějakému vztažnému bodu

$\vec{M}^E$...celkový moment vnějších sil, působících na soustavu vzhledem k témuž bodu

- dostáváme: $\boxed{\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M}^E}$ II. impulsová věta
- důsledek: - v izolované soustavě $\vec{F}_i^E = 0, \forall i \Rightarrow \vec{M}^E = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{B}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{B} = konst.$

  - v izolovaném systému se zachovává celkový moment hybnosti
- pozn.: - pirueta krasobruslařky (viz dále)

Dynamika tuhého tělesa

- tuhé těleso je tvořeno soustavou HBů jejichž vzájemné vzdálenosti jsou neproměnné, tj. tuhé těleso je nedeformovatelné (v mnoha situacích dobrý model těles pevného skupenství)

Kinetická energie tuhého tělesa

- (i) Translační pohyb:

  • všechny Hby tělesa se pohybují se stejnou rychlostí $v_i = v$, kde v je rychlost hmotného středu
- platí: $K = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}v^2\sum_{i=1}^{N}m_i = \boxed{\frac{1}{2}mv^2}$

  m...celková hmotnost tělesa

  K...celková kinetická energie tělesa
- (ii) Rotační pohyb kolem pevné osy:

  • všechny HBy tělesa rotují se stejnou úhlovou rychlostí
- platí: $K = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2\underbrace{\sum_{i=1}^{N}m_i r_i^2}_{J} = \boxed{\frac{1}{2}J\varpi^2}$

  J...moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení (moment je dán rozložením hmotnosti v tělese)

  $v_i = r_i\omega$...obvodová rychlost (r_i...vzdálenost od osy otáčení)
- (iii) Obecný pohyb:

  • libovolný obecný pohyb si lze představit jako translační pohyb s rotací tělesa kolem osy jdoucí jeho hmotným středem
- platí: $\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2}$

  J_0...moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose jdoucí jeho hmotným středem

Moment setrvačnosti

- platí: $J = \sum_{i=1}^{N}m_i r_i^2$

  J...moment setrvačnosti tělesa vzhledem j nějaké ose otáčení

  r_i...vzdálenost i - tého hmotného bodu od osy rotace
- pro základní částice tuhých látek platí:

  • objemová koncentrace je velmi vysoká

  • rozměr velmi malý

  $\Rightarrow$ lze přejít představě tělesa jako objektu se spojitě rozloženou hmotností
- (při popisu takových těles lze využít spojitých fcí a diferenciálního počtu)
- platí: $J = \int_{(m)} r^2 dm$ (m)...integrace je prováděna přes celou hmotnost
- platí: $dm = \rho(\vec{r})dV$

  $\rho(\vec{r})$...objemová hustota tělesa

  dV...objemový element tělesa

- po dosazení: $J = \int\limits_{(V)} r^2 \rho(\vec{r}) dV$
- předpokládáme, že $\rho(\vec{r}) = konst.$
- potom: $\boxed{J = \rho \int\limits_{(V)} r^2 dV}$
- pozn.: - moment setrvačnosti homogenního válce a homogenní koule vzhledem k jejich ose symetrie

<u>Pohybová variace pro rotaci tělesa kolem pevné osy</u>

- budeme aplikovat II. impulsovou větu

  $\vec{B}$...je celkový moment habnosti vzhledem k bodu 0
- platí: $\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M}^E$, kde $\vec{M}^E$...celkový moment vnější síly působící na těleso vzhledem k bodu 0
- platí: $\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{b}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ $\quad \vec{b}_i \perp \vec{r}_i, \vec{v}_i$, tj. $\vec{b}_i$ nemíří v obec. případě ve směru osy rotace
- platí: $\vec{b}_i = \vec{b}_{i\perp} + \vec{b}_{i//}$
- podobně lze napsat: $\vec{M}^E = \vec{M}^E_{\perp} + \vec{M}^E_{//}$ $\quad \vec{M}^E_{\perp}$...nemá rotační účinky
- po dosazení: $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{b}_{i\perp} + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{b}_{i//} = \vec{M}^E_{\perp} + \vec{M}^E_{//}$
- platí: - vektor $\vec{\omega}$ míří ve směru osy rotace, tato osa je pevná v tělese i v prostoru(viz zadání úlohy)$\Rightarrow$změna $d\vec{\omega}$ může mířit jedině ve směru osy rotace, tj. rotaci tělesa způsobuje pouze složka $\vec{M}^E_{//}$, která míří ve směru osy rotace
- k popisu pohybu využijeme II. impulsovou větu ve tvaru: $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{b}_{i//} = \vec{M}^E_{//}$
-
- platí: $\vec{b}_{i//} = b_i \cdot \sin\alpha = \overbrace{\underbrace{|\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i|}_{r_i \perp \vec{v}_i}}^{\text{velikost } b_i} \cdot \sin\alpha = r_i m_i v_i \sin\frac{\pi}{2} \sin\alpha = \underbrace{r_i \sin\alpha}_{r_i'} \cdot m_i r_i' \omega = m_i r_i'^2 \omega$
- r_i' ...vzdálenost i - tého HB od osy rotace
- platí: $\vec{b}_{i//} // \vec{\omega}$, tj. lze psát : $\vec{b}_{i//} = m_i r_i'^2 \vec{\omega}$
- po dosazení: $\frac{d}{dt}\vec{\omega}\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i r_i'^2}_{J} = \vec{M}^E_{//}$ $\quad J$...moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose rotace; $\vec{\omega}$...úhlová rychlost je pro všechny HB stejná
- dostáváme: $\boxed{\frac{d}{dt}(J\vec{\omega}) = \vec{M}^E_{//}}$ - pohybová rovnice pro rotaci tělesa kolem pevné osy
- důsledek: $\vec{M}^E_{//} = 0 \quad \Rightarrow \quad J\vec{\omega} = konst.$, tj. ω vzroste, když J se sníží (když krasobruslřka připaží)
- předpokládáme: $J = konst.$
- dostáváme: $J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\varepsilon} = \vec{M}^E_{//}$ $\quad \vec{\varepsilon}$...úhlové zrychlení, míří opět ve směru osy
- důsledek: $\vec{M}^E_{//} \neq 0 \Rightarrow \vec{\varepsilon} \neq 0$ $\quad \vec{M}^E_{//}$...startér(když chceme něco roztočit, musíme takhle zapůsobit)

- platí: - vektory $\vec{\omega}, d\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$ a $\vec{M}_{//}^{E}$, míří ve směru osy rotace, která je pevná v tělese(viz. zadání úlohy) a stálá v prostoru $\Rightarrow$ lze přejít ke skalární rovnici $J\varepsilon = J\dfrac{d\omega}{dt} = \boxed{J\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \vec{M}_{//}^{E}}$ - dostáváme dif. rovnici pro fci $\varphi = \varphi(t)$, jednoznačně popisující rotaci
- Př.: cv.č.3 – kyvadla

Základy speciální teorie relativity

- Einstein, Poincare, Lorentz, Minkowski

Klasická mechanika

- poskytuje uspokojivý popis makroskopických pohybů těles o rychlosti $v << c$
- předpokládá existenci absolutního prostoru a absolutního času, které jsou nezávislé na pohybu a existenci těles

Galileova transformace

- transformace souřadnic při přechodu mezi soustavami S a S', která se pohybuje vůči S rovnoměrně přímočaře rychlostí v v kladném směru osy x
- HB má v určitém okamžiku souřadnice v $S[x, y, z]$ a v $S'[x', y', z']$
- platí:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

- $t' = t$...tj. čas plyne v obou soustavách stejně, tj. čas nezávisí na vzájemném pohybu těles

Transformace rychlosti

- v soustavě S má HB rychlost $\vec{u} \equiv [u_x, u_y, u_z]$
- v S' platí:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}(x - vt) = \frac{dx}{dt} - v = \underline{u_x - v} \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} = \underline{u_y} \\ u'_z &= \underline{u_z} \end{aligned}$$

- na konci 19.století se ve fyzice nahromadilo značné množství experimentů jejichž výsledky bylo nemožné konzistentně vysvětlit(viz. např. Michelsovův pokus)
- klíčový výsledek experimentů: - byl a popřena existence absolutního prostoru a absolutního pohybu $\Rightarrow$ bylo nutno revidovat klasickou mechaniku: byla vytvořena speciální a obecná teorie relativity

Základní principy speciální teorie relativity

- 1.princip relativity: - všechny inerciální systémy jsou pro formulaci všech fyzikálních zákonů rovnocenné
- 2.princip konstantní rychlosti světla: - rychlost světla ve vakuu je ve všech inerciálních systémech stejná
- pozn.: - rychlost světla nezávisí na tom jestli se zdroj světla vůči pozorovateli pohybuje nebo nepohybuje

Lorentzova transformace

- odvodil ji Lorentz, správný fyz. význam ji dal Einstein
- odvozena pouze na základě 2 principů relativity
- transformace souřadnic a času při přechodu mezi soustavami S a S', která se vůči S pohybje rovnoměrně přímočaře rychlostí v v kladném směru osy x
- bodová událost(okamžitý bodový děj) je v S charakterizován souřadnicemi $[x, y, z, t]$
- platí:

- (i) přechod $S \to S'$:
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
t'...čas naměřený v místě $[x', y', z']$
x...poloha měřiče času z S' určená v S
- (ii) obrácený přechod $S' \to S$: - soustavy S a S' jsou inerciální systémy $\Rightarrow$ pro formulaci všech fyz. zákonů jsou zcela rovnocenné $\Rightarrow$ budou platit stejné transformační vztahy, ale znaménko u rychlosti v bude obrácené (S se pohybuje vůči S' rychlostí $-v$)
- platí:
$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
- pozn.:
- • Lornetzova transformace je matematickým základem STR, plynou zní některé významné důsledky: - souřadnice a čas závisejí na rychlosti pohybů, tj. prostorové dimenze a čas nejsou absolutními veličinami, ale mají význam pouze v souvislosti s určitým vztažným systémem
- • pro v << c platí:
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \Rightarrow << 1} \approx x - vt$$
$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx t,$$ tj. Lorentzova transformace přechází na Galileovu

Relativnost současnosti
- předpokládáme existenci 2 bodových událostí
- v soustavě S jsou popsány souřadnicemi : $[x_1, 0, 0, t_1]$ a $[x_2, 0, 0, t_2]$, přičemž platí: $x_2 \neq x_1$ a $t_2 = t_1$, tj. v S jde o současné události v různých místech
- v soustavě S' platí: $t_2' - t_1' = \frac{\overbrace{t_2 - t_1}^{0} - \frac{v}{c^2}\overbrace{(x_2 - x_1)}^{\neq 0}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \neq 0$, dostáváme $\boxed{t_2' \neq t_1'}$, tj. události jsou nesoučasné v soustavě S'

Dilatace času
- mějme hodiny H' umístěné pevně v soustavě S', kde mají souřadnice $[x_1', 0, 0]$
- v okamžiku t_1', resp. t_2' měřeném na hodinách H' míjejí tyto hodiny jiné hodiny H_1, resp. H_2 umístěné pevně v soustavě S v poloze $[x_1, 0, 0]$, resp. $[x_2, 0, 0]$

- v okamžiku míjení hodin v S platí:

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

t_1...čas měřený na hodinách H_1
t_1'...čas měřený na hodinách H'
x_1'...poloha hodin H_1 v S' je stejná s polohou hodin H' v S'

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

t_2...čas měřený na hodinách H_2
t_2'...čas měřený na hodinách H'
x_1'...poloha hodin H_2 v S' je stejná s polohou hodin H' v S'

- po dobu míjení hodin v S platí: $t_2' - t_1 = \dfrac{\overbrace{t_2' - t_1'}^{\neq 0} - \frac{v}{c^2}\overbrace{(x_2' - x_1')}^{0}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
- dostáváme: $\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ Δt...doba mezi míjením bodu v S', $\Delta t'$...doba mezi míjením bodu v S
- platí: $v < c \Rightarrow \sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$, tj. $\Delta t > \Delta t' \rightarrow$ doba libovolného děje měřená v soustavě v níž se tento děj odehrává je vždy kratší než doba téhož děje měřená pozorovatelem vůči, kterému se míněná soustava pohybuje (hovoříme o dilataci času z hlediska pozorovatele v S)

<u>Experimentální důkaz dilatace času</u>

- prodloužení doby života mionu (μ-mezon)
- • mion – elementární částice o m=207m$_e$, má stejný náboj jako elektron, je nestabilní(rozpadá se na el. a 2 neutrina)
- • miony vznikají jako druhotné produkty při srážce primárního kosmického záření s atomy Zemské atmosféry ve výšce <u>30km</u>
- • doba života zastaveného mionu je $\tau_0 = 2.2 \times 10^{-6}$ s, kdyby se pohybovat rychlostí c (ve skutečnosti $v < c$) urazí dráhu 660m, tj. nemohl by být registrován na Zemi
- závěr – aby byl registrován, muselo dojít k dilataci jeho doby života z hlediska jeho pozorovatele na Zemi

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$ τ...doba života měřená na Zemi

<u>Kontrakce délek</u>

- mějme tyč, která je pevně umístěná ve směru osy x v soustavě S' tak, že lze měřit její klidovou délku: $l' = x_2' - x_1'$
- v čase t měřeném v soustavě S lze psát:

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

x_1...poloha počátku tyče v S v čase t
x_2...poloha konce tyče v S v čase t

- po dosazení: $l' = \dfrac{\overbrace{x_2 - x_1}^{l} - vt + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ l...délka tyče měřená v soustavě S

Transformace rychlosti

- nechť se HB (těleso) pohybuje v soustavě S rychlostí $\vec{u} \equiv \left[u_x, u_y, u_z\right]$
- v soustavě S' pro složky rychlosti $\vec{u}' \equiv \left[u'_x, u'_y, u'_z\right]$ platí:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dt'}{dt}}$$, chceme dostat na pravé straně nečárkované proměnné

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- dostáváme: $u'_x = \dfrac{\frac{dx}{dt} - v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{1 - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx}{dt}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$
- po úpravě: $\boxed{u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}}$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \boxed{u_y \cdot \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}}$$

$$\boxed{u'_z = u_z \cdot \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}}$$

- pozn.: • v případě, že se pohyb v soustavě S děje pouze ve směru osy x , tj. $\vec{u} \equiv \left[u_x, 0, 0\right]$
- potom: - $u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \qquad u'_y = 0 \qquad u'_z = 0$
- pozn.: • obrácená relace: - využijeme principu relativity $\rightarrow$ napíšeme stejné vztahy s obráceným znaménkem u v

Pohybová rovnice v STR

- • II. pohybový zákon má formálně shodný tvar jako v klasické mechanice tj. platí: $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$
- • ze zákona o zachování hybnosti v inerciálních systémech, vzájemně vázaných Lorentzovou transformací plyne: $\vec{p} = \dfrac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, kde m_0 je tzv. klidová hmotnost tělesa
- platí: $m = m(v)$ (s rostoucí rychlostí začíná být m závislé na rychlosti), pro $v \neq 0,\ m > m_0$, tento vztah musí být vzat v úvahu při konstrukci velkých urychlovačů

Einsteinův vztah mezi hmotností a energií

- nechť síla $\vec{F}$ působí na volné těleso po elementární dráze $d\vec{r}$, pro vykonanou práci platí:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{v}\cdot dt = \vec{v}d(m\vec{v}) = \vec{v}(dm\vec{v} + d\vec{v}m)$$

$$dA = \underbrace{\vec{v}\vec{v}}_{v^2}dm + m\underbrace{\vec{v}d\vec{v}}_{vdv}$$

- platí: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow$

$$m^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2$$

$$m^2(c^2 - v^2) = m_0^2c^2$$

$$2mdm(c^2 - v^2) - 2m^2vdv = 0$$

$$mvdv = (c^2 - v^2)dm$$

- po dosazení: $dA = v^2dm + (c^2 - v^2)dm = c^2dm$

elementární práce vykonaná při urychlení tělesa při, kterém dojde ke změně jeho hmotnosti

- po integraci: $A = \int_{m_0 \leftrightarrow v=0}^{m\leftrightarrow v} c^2dm = (m-m_0)c^2 \rightarrow A$ …práce vykonaná při urychlení T z 0 na v
- na základě platnosti ZZE lze napsat $A = K$, kde K je kinetická energie tělesa(T je volné)
- dostáváme: $K = (m-m_0)c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$ - obecný vztah pro kinetickou energii

---

pro $v << c$:

$$K = m_0c^2\left[\overbrace{\left(1-\underbrace{\frac{v^2}{c^2}}_{<<1}\right)^{-\frac{1}{2}}}^{(1+x)^n = 1+nx} - 1\right] = m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2}m_2v^2$$

- pro celkovou energii platí:

$E = E_0 + K$ $\qquad E_0$ … klidová energie: - je přiřazena tělesu, které je v klidu

- z ohledem na strukturu výrazu pro K lze psát $E_0 = m_0c^2$

- po dosazení: $E = m_0c^2 + (m-m_0)c^2$ $\boxed{E = mc^2}$ - Einsteinův vztah mezi hmotností a energií(zákon ekvivalence)
- interpretace: - každé hmotnosti, tedy i klidové, lze přiřadit energii $\Rightarrow$ v látkách je ukryta obrovská energie
- Př.:- uvolněním energie z látky o m = 0,7 kg by bylo možno pokrýt celoroční spotřebu energie v ČR

Experimentální důkaz Einsteinova vztahu (anihilace páru elektron-pozitron)

- pozitron je antičástice elektronu, má stejný, ale opačný náboj, stejnou m jako elektron
- při srážce elektronu s pozitronem obě částice zanikají a vzniká χ(gama) záření o energii $2m_0c^2$, kde m_0 je klidová m elektronu a pozitronu

Základy termodynamiky

- termodynamika studuje:
- obecné vlastnosti makroskopických systémů, tj. systémů mnoha částic, v rovnováze a nerovnovážných stavech
- obecné, tj. pro všechny makroskopické systémy společné, zákonitosti makroskopických procesů

Základní postuláty termodynamiky

- formulovány na základě empirických poznatků

- 1. postulát termodynamiky – postulát o term. rovnováze
- 3 termodynamické věty
- 1.postulát termodynamiky: - Každý termodynamický systém, který je od určitého časového okamžiku $t = t_0$ v jistých časově neměnných vnějších podmínkách (objem, vnější pole,…), dospěje za tzv. relaxační dobu do stavu termodynamické rovnováhy. Dojde k zastavení všech makroskopických procesů, stavové parametry nabývají ve všech místech systému stejných hodnot (např.: tlak a teplota)
- pozn.: - postulát předpokládá vytvoření podmínek pro nastavení termodynamické rovnováhy (přítomnost katalyzátoru v případě chemické reakce, která by jinak neproběhla)

Práce plynu

- předpoklady:

1. – působením síly $\vec{F}$ dojde k posunu stěny soustavy
2. – posun ds je tak malý, že v $dV = Sds$ nedojde ke změně tlaku

- platí:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|d\vec{r}\right| \cos 0 = Fds = pSds = pdV$$

δA …elementární práce vykonaná silou $\vec{F}$ při elementárním posunu stěny
cos0…protože síla posunula stěnu ve svém směru

- pozn.: - elementární práce je označena δA ,a ne dA , protože závisí na způsobu jakým se plyn dostává z jednoho stavu do druhého
- platí: • $dV > 0$, tj. dochází k expanzi $\Rightarrow$ $\delta A > 0$, tj. plyn koná práci
  • $dV < 0$, tj. dochází ke kompresi $\Rightarrow$ $\delta A > 0$, tj. plyn spotřebovává práci
- po integraci: $A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV$ A_{12} …práce, kterou plyn vykoná při přechodu z 1 do stavu 2

  obecně $p = p(V)$ - tato fce je v případě termodynamické rovnováhy dána stavovou rovnicí

- práce v p-V diagramu:

- pozn.:-je vidět, že vykonaná práce závisí na způsobu přechodu plynu ze stavu 1 do stavu 2

Stavová rovnice ideálního plynu

- platí: $pV = \dfrac{m}{\mu} RT$ p …tlak

  V …objem plynu
  $T = t + 273.15$ [K]
  $R = 8314.3$ [Jkmol^{-1}K^{-1}]…univerzální plynová konstanta
  $n = \dfrac{m}{\mu}$ …počet kilomolů plynu
  m …hmotnost plynu
  μ …tzv. kilomolová hmotnost

- pozn.: - ideální plyn – model reálného plynu – 2 základní předpoklady
  • vlastní objem molekul plynu je zanedbatelný, tj. molekuly plynu považujeme za HBy
  • vzájemné přitažlivé síly mezi molekulami (kohezní síly) jsou zanedbatelné, tj. neovlivňují pohyb molekul
- platí: - reálný plyn je tím blíže ideálnímu plnu čím je:
  • objem vyplněný plynem větší oproti vlastnímu objemu molekul, tj. čím je tlak plynu nižší
  • kinetická energie neuspořádaného pohybu molekul oproti potenciální energii přitažlivé interakce mezi molekulami, tj. čím je teplota plynu vyšší

Vnitřní energie

- vnitřní energie termodynamického systému je dána součtem

• kinetické energie neuspořádaného pohybu molekul
• potenciální energie přitažlivých sil mezi molekulami
• dalších druhů energie odpovídající přitažlivým silám působících v rovnovážném systému(např. přitažlivá interakce mezi atomy v molekulách, přitažlivá interakce mezi nukleony v jádře,…)

Případ ideálního plynu

- zanedbáváme potenciální energii přitažlivých sil mezi molekulami a molekuly považujeme za HBy $\Rightarrow$ vnitřní energie je dána pouze kinetickou energií neuspořádaného pohybu molekul, tj. vnitřní energie závisí na teplotě a jeho množství
- platí: $dU = nC_v dT$ $\quad$ dU …elementární změna vnitřní energie
  n …počet kilomolů
  C_v …tzv. kilomolové teplo plynu

První termodynamická věta

- vyjadřuje ZZE
- platí: $\delta Q = dU + \delta A$ $\quad$ δQ …elementární teplo dodané do systému
  dU …elementární změna vnitřní energie
  δA …elementární práce, kterou plyn vykoná
- pozn.: (odlišné označení diferenciálu)
  - δQ a δA - užíváme δ abychom naznačili, že dodané teplo a vykonaná práce závisí na způsobu změny stavu plynu
  - dU - užíváme d abychom naznačili, že vnitřní energie je stavovou veličinou jejíž změna závisí na způsobu změny stavu plynu

- po dosazení: $\delta Q = dU + pdV$ - platí pro libovolný systém
- v případě ideálního plynu: $\delta Q = nC_v dT + pdV$

Některé vratné děje ideálního plynu z hlediska 1. termodynamické věty

- všechny termodynamické děje probíhající v přírodě jsou nevratné $\Rightarrow$ takové děje nejsou spojitou posloupností rovnovážných stavů $\Rightarrow$ nelze použít stavové rovnice, tj. popis takových stavů je velmi komplikovaný
- v mnoha reálných situacích je výhodné uvažovat tzv. vratné procesy (probíhají v obou směrech) $\Rightarrow$ takový děj je posloupností rovnovážných stavů, tj. při jeho popisu lze využít stavovou rovnici $\Rightarrow$ popis je poměrně jednoduchý (získané výsledky často velmi dobře odpovídají skutečnosti)
- platí: - reálné děje jsou tím bližší vratným dějům čím pomaleji probíhají (viz relaxační doba)
- budeme předpokládat: $n = 1$, tj. uvažujeme 1 kmol ideálního plynu, který koná vratný děj

(i) Izochorický děj

- platí: $V = konst. \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow \delta A = pdV = 0$, tj. plyn nekoná práci
- platí: $\delta Q = dU = C_v dT$, tj. veškeré dodané se spotřebuje na vzrůst vnitřní energie, který se projeví vzrůstem teploty
- po integraci: $Q_{12} = C_v(T_2 - T_1)$ $\quad$ Q_{12} …celkové teplo při přechodu plynu ze stavu 1 do stavu 2, tj. $Q_{12} > 0 \Rightarrow T_2 > T_1$, tj. teplota vyrostla

(ii) Izotermický děj

- platí: $T = konst. \Rightarrow dU = C_v dT = 0$, tj. nedochází ke změně vnitřní energie plynu
- dostáváme $\delta Q = \delta A = pdV$, tj. veškeré dodávané teplo se potřebuje na práci, kterou plyn vykoná
- po integraci: $Q_{12} = A_{12} = \int\limits_{V_1}^{V_2} pdV$ $\quad$ Q_{12} …celkové dodané teplo při změně stavu 1→2
- po dosazení: $Q_{12} = A_{12} = RT\int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT \ln\frac{V_2}{V_1} > 0$

(iii) Izobarický děj

- platí: $p = konst.$

- platí: $\delta Q = C_v dT + pdV$, tj. dodané teplo se spotřebuje na nárůst vnitřní energie a práci, kterou plyn vykoná
- po integraci: $Q_{12} = C_v(T_2 - T_1) + p(V_2 - V_1)$ Q_{12} …celkové teplo dodané do systému

Mayerův vztah

- platí: $\delta Q = C_p dT$ C_p …kilomolové teplo při stálém tlaku
  δQ …elementární teplo dodané do systému při stálém
- po dosazení: $C_p dT = C_v dT + pdV$
- pozn.: C_p …libovolné teplo při stálém tlaku
  C_v …libovolné teplo při stálém objemu
- platí: $pV = RT \Rightarrow pdV = RdT$
- po dosazení: $C_p dT = C_v dT + RdT$

$\boxed{C_p = C_v + R}$ - Mayerův vztah

(iv) Adiabatický děj

- platí: $\delta Q = 0$, tj. děj probíhá v soustavě zcela tepelně izolované od okolí
- po dosazení: $0 = dV + \delta A \Rightarrow \delta A = -dU$, tj. plyn koná práci na úkor své vnitřní energie
- po integraci: $A_{12} = -C_v(T_2 - T_1) = C_v(T_1 - T_2)$, pokud A_{12} je > 0, potom $T_1 > T_2$, tj. došlo ke snížení teploty plynu A_{12} …celková práce vykonaná plynem při přech. z 1 do 2

Rovnice adiabaty

- platí: $0 = C_v dT + pdV$
- platí: $pV = RT \Rightarrow pdV + Vdp = RdT$
- po dosazení:

$$0 = C_v \frac{pdV + Vdp}{R} + pdV \quad / \frac{R}{pV}$$

$$0 = \left(\overbrace{C_v + R}^{C_p}\right)\frac{dV}{V} + C_v \frac{dp}{p}$$

$$0 = \kappa \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p}, \kappa = \frac{C_p}{C_v} > 1$$

$$const. = \ln\left(pV^{\kappa}\right)$$

$\boxed{pV^{\kappa} = konst.}$ κ …Poissonova konstanta

Druhá termodynamická věta

- podle 1. termodynamické věty se mohou uskutečnit pouze takové děje při nichž se zachovává energie
- naproti skutečnosti: - ne všechny děje splňující tuto podmínku se mohou realizovat
- příklad: - kinetická energie střely se při dopadu na měkkou překážku přemění na teplo – nikdo nikdy neviděl obrácený děj
- 2. termodynamická věta se zabývá takovými procesy, které splňují 1. termodynamickou větu, ale v daném systému těles se nemohou realizovat. Zejména řeší otázku do jaké míry lze přeměnit teplo na práci
- Planck (1930): není možno sestrojit periodicky pracující tepelný stroj, který by nezpůsoboval nic jiného, než že by ochlazoval tepelnou lázeň a konal práci

Carnotův cyklus

- předpokládáme existenci tepelného stroje s pracovním prostorem s pístem v němž se nachází 1 kmol ideálního plynu, který koná vratné procesy
- plyn koná následující kruhový děj:

I. Izotermické expanze při teplotě $T_1 : [p_1, V_1, T_1] \rightarrow [p_2, V_2, T_1]$
   - plyn odebírá teplo a koná práci při expanzi $(V_2 > V_1)$

- platí: $Q_{12} = A_{12} = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} > 0$, přičemž $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_1}$

II. Adiabatická expanze : $[p_2, V_2, T_1] \rightarrow [p_3, V_3, T_2]$

- plyn je zcela tepelně izolován, koná práci na úkor své vnitřní energie $\Rightarrow$ jeho teplota klesá, tj. $T_1 > T_2$
- platí: $\begin{matrix} Q_{23} = 0 \\ A_{23} = C_v(T_1 - T_2) > 0, \text{ přičemž } p_2V_2^\kappa = p_3V_3^\kappa \end{matrix}$

III. Izotermická komprese při teplotě T_2 : $[p_3, V_3, T_2] \rightarrow [p_4, V_4, T_2]$

- plyn je stlačován $V_4 < V_3$, uvolněné teplo je předáváno chladiči
- platí: $Q_{34} = A_{34} = RT_2 \ln\frac{V_4}{V_3} < 0$, přičemž $\frac{p_3V_3}{T_2} = \frac{p_4V_4}{T_2}$

IV. Adiabatická komprese: $[p_4, V_4, T_2] \rightarrow [p_1, V_1, T_1]$

- plyn je stlačován a zároveň zcela tepelně izolován, plyn spotřebovává práci $\Rightarrow$ jeho teplota vzrůstá $(T_2 < T_1)$
- platí: $\begin{matrix} Q_{41} = 0 \\ A_{41} = C_v(T_2 - T_1) < 0, \text{ přičemž } p_4V_4^\kappa = p_1V_1^\kappa \end{matrix}$

- pozn.: - reálný děj, který je nevratný, obsahuje prvky vratného izotermického a vratného adiabatického děje $\Rightarrow$ kruhový děj s 1 ohřívačem a 1 chladičem považujeme za kombinaci 2 izotermických a 2 adiabatických dějů

<u>Účinnost Carnotova cyklu</u>

- platí: $\eta = \frac{A}{Q}$ …charakterizuje míru přeměny dodaného tepla na práci

  A…celková práce vykonaná při kruhovém ději
  Q…teplo dodané do systému
- platí: $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$
- po dosazení: $A = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} + C_v(T_1 - T_2) + RT_2 \ln\frac{V_4}{V_3} + C_v(T_2 - T_1)$
- po vynásobení levých stran dostáváme:

$$(p_1V_1)(p_2V_2^\kappa)(p_3V_3)(p_4V_4^\kappa) = (p_2V_2)(p_3V_3^\kappa)(p_4V_4)(p_1V_1^\kappa)$$

$$(V_2V_4)^{\kappa-1} = (V_1V_3)^{\kappa-1}$$

$$\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_2}$$

- po dosazení: $A = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln\frac{V_2}{V_1} = R(T_1 - T_2)\ln\frac{V_2}{V_1}$
- platí: $Q = Q_{12} = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$

- po dosazení: $\eta = \dfrac{R(T_1 - T_2)\ln\dfrac{V_2}{V_1}}{RT_1 \ln\dfrac{V_2}{V_1}} = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$ T_2...teplota chladiče, T_1...teplota ohřívače
- pozn.:
  - podle 3. termodynamické věty T>0 ⇒ η<1, tj.všechno dodané teplo nelze převést na práci (soulad s 2. tv)
  - účinnost η vzrůstá, když T_1 roste

Carnotova věta

- účinnost všech Carnotových cyklů, které jsou uskutečňovány mezi týmiž teplotami je stejná, tj. nezávisí na pracovním médiu
- libovolný nevratný cyklus má účinnost nižší (vždy) než vratný Carnotův cyklus uskutečňovaný mezi týmiž teplotami

Matematické vyjádření 2. termodynamické věty pro vratný cyklus

- platí: (viz C-cyklus)

  $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$
- obecně: $\eta = \dfrac{A}{Q}$
- po dosazení: $\eta = \dfrac{A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}}{Q_{12}} = \dfrac{Q_{12} + Q_{34}}{Q_{12}}$
- zavedeme označení:

  $Q_{12} \equiv Q_1$ – teplo dodávané při izotermické expanzi (T_1)

  $Q_{34} \equiv Q_2$ – teplo dodávané (spotřebovávané) při izotermické kompresi(T_2)
- po dosazení: $\dfrac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$
- po úpravě: $1 + \dfrac{Q_2}{Q_1} = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$

  $\boxed{\dfrac{Q_1}{T_1} + \dfrac{Q_2}{T_2} = 0}$ - tento vztah platí pro libovolný vratný kruhový děj s1 ohřívačem a 1 chladičem.

Zobecnění

- uvedená variace platí i v případě obecnějších vratných kruhových dějů

  (i) – pokud je teplo přijímáno vícekrát

  platí: $\sum_i \dfrac{Q_i}{T_i} = 0$ Q_i …teplo přijaté soustavou při teplotě T_i

  (ii) – pokud se teplo během kruhového děje spojitě mění platí(viz analogie s výrazem v pří.(i))

  platí: $\oint \dfrac{\delta Q}{T} = 0$ - matematické vyjádření 2. term. Věty pro vratný děj

  δQ …elementární teplo přijímané systémem při teplotě T

Interpretace výsledku

- při vratném kruhovém ději, kde je teplo přeměňována na práci nemohou být všechna elementární tepla δQ kladná, tj. část dodaného tepla se musí odevzdat (některá tepla musí být záporná) ⇒ všechno dodané teplo při kruhovém ději nelze přeměnit na práci

Matematické vyjádření 2. termodynamické věty pro cyklus s nevratným dějem

- platí: (viz C-věta pro nevratný děj)

$$\underbrace{\frac{Q_1+Q_2}{Q_1}}_{\swarrow} < \frac{T_1-T_2}{T_1} \rightarrow \text{účinnost Carnotova cyklu, který je vratný}$$

účinnost kruhového děje (i nevratného), který přijímá teplo Q_1 při T_1 a teplo Q_2 při teplotě T_2

$$1+\frac{Q_2}{Q_1} < 1-\frac{T_2}{T_1}$$

$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2} < 0$, platí v případě, že teplo j přijímáno 2x během kruhového děje

- zobecnění:

  • pokud je teplo přijímáno vícekrát $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} < 0$

  • pokud je teplo přijímáno při spojitě se měnící teplotě $\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$, matematické vyjádření 2.term. věty pro nevratný děj
- interpretace: - aby bylo dosaženo v případě nevratného kruhového děje téže výchozí teploty T_1 jako v případě kruhového děje vratného je třeba dodat více tepla $\Rightarrow$ na práci je možné přeměnit méně dodaného tepla, tj. účinnost nevratného cyklu je nižší
- δQ - elementární teplo přijímané soustavou při teplotě T

Entropie

- platí: $dS = \frac{\delta Q}{T}$ $\quad dS$ …elementární změna entropie soustavy

  δQ …elementární teplo dodávané soustavě vratně
- pozn.: entropie je stavovou veličinou (viz označení diferenciálu), tj. její změna nezávisí na integrační cestě (na způsobu změny stavu plynu)

  $S_1 = \int_0^1 \frac{\delta Q}{T} + S_0$ $\quad S_0$…entropie referenčního stavu

  S_1…entropie systému ve stavu 1 (dána pokud známe entropii referenčního bodu)

Míra nevratnosti obecného děje

- předpokládáme existenci nevratného děje A→B
- pro cyklus s nevratným dějem platí: $\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$
- po úpravě: $\int\limits_{A(\text{nevratná cesta})}^{B} \frac{\delta Q}{T} + \int\limits_{B(\text{vratná cesta})}^{A} \frac{\delta Q}{T} < 0$

  $\int\limits_{A(\text{nevr.})}^{B} \frac{\delta Q}{T} + S_A - S_B < 0$

  $\boxed{\int\limits_{A(\text{nevr.})}^{\text{B}} \frac{\delta Q}{T} < S_A - S_B}$ - míra nevratnosti obecného děje je rozdíl mezi výrazem na pravé a levé straně

Nevratný proces v izolované soustavě

- izolovaná soustava: $\delta Q = 0$
- platí: $\int\limits_{A(\text{nevr.})}^{\text{B}} \frac{\delta Q}{T} = 0 \overset{\text{viz výše}}{<} S_A - S_B \Rightarrow$, tj. $S_A < S_B$, entropie v konečném stavu je větší
- výsledek: - při nevratném procesu v izolované soustavě její entropie narůstá; podle 1. postulátu termodynamiky takový systém přechází do termodynamické rovnováhy $\Rightarrow$ v termodynamické rovnováze odpovídá maximální entropie systému

Termodynamické potenciály

(i) Vnitřní energie U

- po dosazení za $\delta Q = TdS$:

  $TdS = dU + pdV$

  $dU = TdS - pdV$, tj. $U = U(S,V)$, kde S a V jsou tzv. přirozené proměnné vnitřní energie U
- platí: $dU = (\frac{\partial U}{\partial S})_V\, dS + (\frac{\partial U}{\partial V})_S\, dV$ při konstantním V a S
- pozn.: - na základě analogie s výrazem

  $\vec{F} = -gradU_{pot.}$ říkáme, že U je termodynamickým potenciálem s přirozenými proměnnými S a V

(ii) Entalpie H

- předpokládáme, že p=*konst.*
- platí: $\delta Q = dU + pdV + \overbrace{Vdp}^{0} = d\overbrace{(U + pV)}^{\text{označení } H} = dH$, tj. δQ …teplo dodané do systému izobaricky

  H…tepelný obsah soustavy (entalpie)

teplo dodané do systému izobaricky se přemění na entalpii systému

- pozn.: - entalpie je významnou veličinou při studiu tepelné bilance chemických reakcí probíhajících při chemických reakcích při konstantním tlaku
- platí: $dH = \overbrace{dU + pdV}^{TdS} + Vdp = TdS + Vdp$, tj. $H = H(S,p)$
- porovnáním dostáváme: $T = (\frac{\partial H}{\partial S})_p$ a $V = (\frac{\partial H}{\partial p})_S$
- pozn.: - analogie mezi U a H
- platí: $dU = \delta Q$ pro $V = konst.$

  $dH = \delta Q$ pro $p = konst.$
- potom: $C_v = (\frac{\partial U}{\partial T})_V$

  $C_p = (\frac{\partial H}{\partial T})_p$

(iii) Volná energie F

- volná energie je mimořádně významný termodynamický potenciál, protože dovoluje propojit statistickou fyziku s termodynamickou, při popisu téhož makroskopického systému
- pomocí statistické fyziky vypočítáme volnou energii systému, její derivace pak určují významné stavové veličiny
- předpokládáme, že $T = konst.$
- platí: $-\delta A = dU - \delta Q = dU - TdS - \overbrace{SdT}^{0} = d\overbrace{(U - TS)}^{\text{označení } F} = dF$, tj. práce předaná systému při izotermickém ději se přemění na volnou energii
- platí: $F = U - TS$

  $dF = dU - TdS - SdT = -pdV - SdT$, tj. $F = F(V,T)$
- porovnáním: $p = -(\frac{\partial F}{\partial V})_T$ a $S = -(\frac{\partial F}{\partial T})_V$

Gibbsova-Helmhotzova rovnice

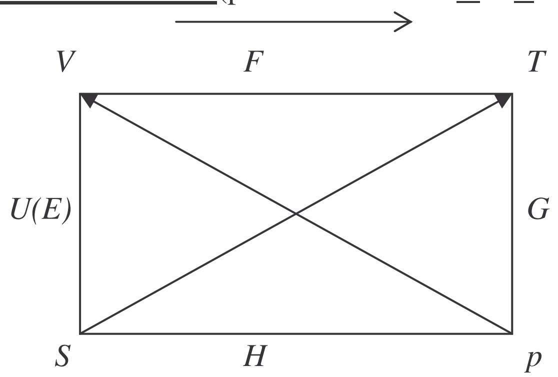
- platí: $U = F + TS = F - T(\frac{\partial F}{\partial T})_V = -T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)_V$
- pozn.: - tato rovnice je vhodná pro stanovení střední energie částic systému $\overline{E} = U$, neboť $F = F(T)$ dokážeme stanovit pomocí statistické fyziky

- pozn.: - analogie mezi U a F
- platí: $dU = -pdV$ pro $S = konst.$, tj. pro rychlé děje
  $dF = -pdV$ pro $T = konst.$, tj. pro pomalé děje

(iv) Gibbsův potenciál

- velmi významná veličina při popisu chemických reakcí probíhající při konstantní teplotě a tlaku
- žádáme, aby $G = G(T, p)$, tj. nahradíme objem V ve fci $F = F(T, V)$
- platí: $dF = -pdV - SdT$
  $d(pV) = pdV + Vdp$
- po dosazení: $dF = Vdp - d(pV) - SdT$
- po úpravě: $d(\overbrace{F + pV}^{\text{označení}\, G}) = Vdp - SdT$
  $dG = Vdp - SdT$, tj. $G = G(p, T)$
- porovnáním: $V = (\frac{\partial G}{\partial p})_T$ a $S = -(\frac{\partial G}{\partial T})_p$

<u>Maxwellův čtverec</u>(pomocné schéma <u>V</u>áš <u>T</u>ra<u>p</u>a<u>S</u>)



- potenciály a jejich přirozené proměnné:
  $U = U(S, V)$
  $F = F(V, T)$
  $G = G(T, p)$
  $H = H(p, S)$
- vyjádření diferenciálů: - jdeme-li po diagonále od přirozené proměnné proti šipce píšeme -
  $dU = TdS - pdV$
  $dF = -pdV - SdT$
  $dG = -SdT + Vdp$
  $dH = Vdp + TdS$

<u>Třetí termodynamická věta</u>

- Nernst: - zobecnil experimentální výsledky získané při studiu látek při velmi nízkých teplotách
- platí: - pro libovolný vratný děj probíhající při teplotě $T \to 0$ je změna entalpie ΔS nulová, tj. $\lim\limits_{T \to 0} \Delta S = 0$,
  kde $\Delta S = S_2 - S_1$, S_1 a S_2 jsou entropie 2 stavů stabilní rovnováhy systému, entropie je stavová veličina
- Planckův dodatek: - nejen změna entropie, ale její absolutní hodnota je nulová při
  $T \to 0$ K, $\lim\limits_{T \to 0} S = 0$
- pozn.: - Planckův dodatek odstraňuje neurčitost při stanovení absolutní hodnoty entropie systému neboť určuje aditivní konstantu S_0
- platí: $S_0 = 0 \Rightarrow T \to 0$

- experimenty prokázaly, že při teplotách $T \rightarrow 0$ přestávají vlastnosti látek záviset na T

  $\lim_{T \to 0} C_v = 0$

  $\lim_{T \to 0} C_p = 0$

  $\lim_{T \to 0} \rho = 0$

  , tj. změnou vnějších parametrů nelze látce odebrat teplo(viz. Adiabatická expanze $\rightarrow$ ochlazení látky) $\Rightarrow$ látku nelze ochladit na $T = 0$ K (viz $dU = 0dT$, tj. nelze odebrat teplo)

Jiné vyjádření 3. termodynamické věty

- čistou pevnou látku nelze konečným počtem pochodů ochladit na teplotu $T = 0$ K

Kmity

- kmitavý pohyb vykazuje jistý stupeň periodičnosti v čase
- mechanické kmity – mosty, turbíny, stroje
- elektromagnetické kmity – přenos informací

Lineární harmonický oscilátor

- kmity harmonického oscilátoru jsou popsány harmonickými fcemi, vždy když výchylka z rovnovážné polohy určuje působící sílu vztahem $\left|\vec{F}\right| \approx r^n$, r…výchylka oscilátoru z rovnovážné polohy, $n \in N$
- lineární je když platí: $\left|\vec{F}\right| \approx r^1$

Netlumený lineární harmonický oscilátor

- platí: $\vec{F} = -k\vec{r}$ k …tuhost pružiny, jejíž hmotnost zanedbáváme
  $\vec{F}$ …síla působící na HB
  $\vec{r}$ …výchylka HB z rovnovážné polohy
- pohybová rovnice: $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r}$
- 1D: (1 dimenze) – uvažujeme kmity pouze ve směru osy x

  $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

  $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

- substituce: $\omega^2 = \dfrac{k}{m} = konst.$ (její fyzikální význam bude zřejmý později)

  $\lambda^2 + \omega^2 = 0$

  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$

- řešení diferenciální rovnice má tvar:

  $x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$ c_1, c_2 …lib. $\in$ C

  obecné řešení dif. rovnice (může být i komplexní)

  $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ a,b…reálné konstanty

  řešení v oboru reálných čísel

  $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$ A …amplituda

  výchylka z rovnovážné polohy ω …kruhová frekvence kmitů

  α …fázový posun (výchylka v $t = 0$

- doba 1 kmitu: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$
- celková energie: $E = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kr^2$

- 1D: $E=\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}kx^2$
- po dosazení: $E=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\alpha)+\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\alpha)=\frac{1}{2}kA^2\cdot 1=konst.$, tj. v případě netlumeného kmitání harmonického oscilátoru se zachovává celková mechanická energie (jde o konzervativní silové pole)

Tlumený lineární harmonický oscilátor

- v případě reálných kmitavých soustav (objektů) dochází vždy k tlumení oscilací
- platí: $\vec{F}=\underbrace{-k\vec{r}}_{\text{síla harmonické vazby}}\ \overbrace{-k_b\frac{d\vec{r}}{dt}}^{\text{brzdná síla}}$ předpokládáme, že její velikost je úměrná velikosti rychlosti (velmi dobře pltí pro malé rychlosti)

  k_b …konstanta, která charakterizuje tu sílu

Pohybová rovnice

- $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-k\vec{r}-k_b\frac{d\vec{r}}{dt}$
- 1D: $\frac{d^2x}{dt^2}+\underbrace{\frac{k_b}{m}}_{2b}\frac{dx}{dt}+\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}x=0$
- pozn.: b…charakterizuje velikost budivé síly

  ω_0…tzv. vlastní kruhová frekvence oscilátoru
- charakteristická rovnice: $$\lambda^2+2b\lambda+\omega_0^2=0$$ $$\lambda_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2-\omega_0^2}$$
- platí: - pohyb tlumeného lineárního harmonického oscilátoru, závisí na vzájemném vztahu mezi velikostmi konstanty b a ω_0

  (i) $b<\omega_0$, tj. tlumení je slabé

  - platí: $b^2-\omega_0^2<0$, tj. $\lambda_{1,2}=-b+i\omega$, kde $\omega=\sqrt{\omega_0^2-b^2}$
  - řešení má tvar: $$x(t)=c_1e^{-bt+i\omega t}+c_2e^{-bt-i\omega t}=e^{-bt}(c_1\cos\omega t+ic_1\sin\omega t+c_2\cos\omega t-ic_2\sin\omega t)=$$ $$=e^{-bt}[(c_1+c_2)\cos\omega t+i(c_1-c_2)\sin\omega t],\ \text{kde } c_1,c_2\in C$$
  - zvolíme: $$c_1=c_2=\frac{1}{2},\ \text{potom}: x_1(t)=e^{-bt}\cos\omega t$$ $$c_1=c_2=-\frac{i}{2},\ \text{potom}: x_2(t)=e^{-bt}\sin\omega t$$
  - řešení lze psát jako:

  $x(t)=e^{-bt}(a\cos\omega t+b\sin\omega t)$, kde $a,\ b\in R$
  - řešení má tvar reálného čísla
- položíme: $$c_1=A\sin\alpha$$ $$c_2=A\cos\alpha$$

  $x(t)=Ae^{-bt}\sin(\omega t+\alpha)$ - jde o tlumený harmonický pohyb s frekvencí $\omega=\sqrt{\omega_0^2-b^2}<\omega_0$, tj. tlumení způsobuje zpomalení kmitů

  $\downarrow$

amplituda kmitů s časem klesá (rychlost útlumu je dána koeficientem b)

  (ii) $b>\omega_0$, tj. tlumení je silné

- platí: $b^2-\omega_0^2>0$, tj. $\lambda_{1,2}=-b\pm\omega$, kde $\omega=\sqrt{b^2-\omega_0^2}<b$

- řešení má tvar:
  $x(t) = C_1 e^{-bt+\omega t} + C_2 e^{-bt-\omega t} = e^{-bt}\left(C_1 e^{+\omega t} + C_2 e^{-\omega t}\right)$, jde o tzv. aperiodický pohyb ($x(t) \to 0$ s časem, neboť $b > \omega$)
  (iii) $b = \omega_0$
- platí: $\lambda_{1,2} = -b$
- řešení má tvar: $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-bt}$ - jde o mezní aperiodický pohyb ($x(t) \to 0$ s časem)
- pozn.: tohoto nastavení systému se používá u ručičkových měřících přístrojů, kde žádáme rychlé získání naměřené hodnoty bez kmitů

Nucené kmity

- v každém reálném kmitajícím systému dochází v důsledku tlumení k úbytku celkové mechanické energie, tj. kmity za určitou dobu vymizí. Abychom je udrželi je nutno dodávat energii z vnějšku – nejjednodušší případ(prací síly, která se harmonicky mění)
- v 1D: $F_x = F_0 \sin \Omega t$ Ω…kruhová frekvence buzených kmitů
- pohybová rovnice v 1D: brzdná síla
  $$m\frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - k_b \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \Omega t$$ - budící síla
- po úpravě:
  $$\frac{d^2 x}{dt^2} + \underbrace{\frac{k_b}{m}}_{2b} \cdot \frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$
- obecné řešení má tvar:
  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$
- platí:
  $x_p(t) = A_v \sin(\Omega t + \alpha_v)$ - hledáme ve tvaru fce, která má formálně stejný tvar jako fce na pravé straně (konst. A_V a α_V nalezneme po dosazení o úplné nehomogenní rovnice – výchozí rovnice)
- předpokládejme, že $b < \omega_0$, tj. tlumení je slabé
- dostáváme:
  $$x(t) = \underbrace{Ae^{-bt} \sin(\omega t + \alpha)}_{t \to \infty,\ \text{výraz} \to 0} + A_v \sin(\Omega t + \alpha_v)$$
- platí: $x(t) = A_v \sin(\Omega t + \alpha_v)$ - jde o harmonické kmity (jsou netlumené) vyvolané vnějším zdrojem
- po dosazení tohoto tvaru řešení do výchozí rovnice s pravou stranou dostáváme podmínku pro A_V a α_V (A_V …amplituda vynucených kmitů a α_V…fázový posun vynucených kmitů)
- platí:
  $$A_v = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4b^2\Omega^2}}$$
- diskuse: - A_V je tím větší, čím je:
  - Amplituda budící síly F_0 větší a hmotnost m menší
  - Koeficient útlumu b menší
  - Rozdíl vlastní kruhové frekvence ω_0 a kruhové frekvence síly Ω menší

Amplitudová rezonance

- A_V je maximální $\Leftrightarrow$ jmenovatel je minimální, tj. nabývá extrémní hodnoty
- musí platit: $\frac{d}{d\Omega}\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + 4b^2\Omega^2\right] = 0$
- dostáváme:
  $$2\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)(-2\Omega) + 8b^2\Omega = 0$$
  $$\Omega\left(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2b^2\right) = 0$$
  $\Omega = 0$...vnější zdroj vypnut
  $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}$...rezonanční frekvence

- platí: • $\Omega_r < \omega_0$, neboť $b \neq 0$
  • pokud $b \to 0$, potom $A_v \to \infty$ pro $\Omega_r \to \omega_0$

Rezonanční křivka

- pozn.: • amplitudová rezonance jako nežádoucí jev
  • destrukce mostů – dojde k překročení meze pevnosti materiálu, když se kruhová frekvence vnějších sil přiblíží rezonanční frekvenci daného systému
  • rezonance jako žádoucí jev – naladění vstupního obvodu přijímače na požadovanou délku

Skládání kmitů

- výsledná výchylka je dána vektorovým součtem dílčích kmitavých pohybů
- obecný případ: - kmity mají různý směr v prostoru, odlišnou amplitudu, kruhovou frekvenci a různý fázový posun
- **příklad stejnosměrných kmitů**:
- uvažujeme 2 harmonické kmitavé pohyby o stejné amplitudě ($x_{01} = x_{02} \equiv x_0$), stejný fázový posun ($\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$) a odlišné kruhové frekvence $\omega_1 \neq \omega_2$
- platí: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$...výsledná výchylka
- po dosazení: $x(t) = x_0\left[\sin(\omega_1 t + \alpha) + \sin(\omega_2 t + \alpha)\right]$
- po úpravě: $x(t) = 2x_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \alpha\right)$
- platí: • pokud $\omega_1 \neq \omega_2$, dostáváme komplikovaný složitý pohyb (hodně různé frekvence)
  • pokud $\omega_1 \approx \omega_2$, potom $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \approx 0 << \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, tj. na výsledný pohyb se díváme jako na harmonický pohyb s kruhovou frekvencí $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ s proměnou amplitudou $2x_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$
- praktická aplikace: - amplitudová modulace
- princip: - proměnná amplituda nosných vysokofrekvenčních kmitů slouží k přenosu nízkofrekvenčních signálů (řeč, hudba)
- bezdrátový přenos: - účinné antény pouze pro vysoké frekvence
- kabelový přenos: -

Realizace

- dojde k sečtení 2 signálů (směšovač): $\omega_1 = \omega_{vf} + \omega_{nf}$
  $\omega_2 = \omega_{vf} - \omega_{nf}$, kde $\omega_1 \approx \omega_2$
- proměnná amplituda závisí na frekvenci: $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \omega_{nf}$
- nový signál má frekvenci: $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{vf}$

Soustava vázaných oscilátorů

- mechanický model jednorozměrného krystalu
- význam při zavedení představy vlnění spojitého prostředí (kontinua)

Lineární řetězec oscilátorů

- předpokládáme existenci N totožných lineárních oscilátorů umístěných v přímce

a…vzdálenost rovnovážných poloh

Pohybová rovnice

- platí: $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=F_n=F_{n-1,n}+F_{n+1,n}$

  x_n …výchylka n-tého oscilátoru

  F_n …celková síla působící na n-tý oscilátor

  $F_{n-1,n}$ …síla, kterou působí (n-1)-tý na n-tý

  $F_{n+1,n}$ …síla, kterou působí (n+1)-tý na n-tý

  *…(n-1)-tý oscilátor táhne n-tý oscilátor do jeho rovnovážné polohy

  **…(n+1)-tý oscilátor tlačí n-tý oscilátor do jeho rovnovážné polohy

- platí:

$$F_{n-1,n}=-k\left(x_n-x_{n-1}\right)$$
$$F_{n+1,n}=-k\left(x_n-x_{n+1}\right)$$

- po dosazení:

$$m\frac{d^2x_n}{dt^2}=-k\left[2x_n-\left(x_{n-1}+x_{n+1}\right)\right]$$, kde n = 1,2,…,N

$\downarrow$

- dostáváme soustavu N diferenciálních rovnic, v soustavě vystupuje N+2 neznámých ($x_0, x_1,..., x_N, x_{N+1}$) – je nutno formulovat okrajovou podmínku

- řešení hledáme ve tvaru:

$$x_n(t)=Ae^{-i(\omega t-qna)}$$

  A…amplituda

  ω…kruhová frekvence kmitů

  $n{\cdot}a$…vzdálenost n-tého oscilátoru od počátku

  q….konstanta

- pozn.: • řešení pro výchylku $x_n(t)$ závisí nejen na čase, ale i na poloze oscilátoru v řetězci

  • stanovení konstant: A – stanovíme z počátečních podmínek, ω, q…nejdříve stanovíme vzájemný vztah mezi nimi a potom využijeme vhodně stanovenou podmínku

- platí:

$$\frac{dx_n}{dt}=Ae^{i(\omega t-qna)}(i\omega)$$
$$\frac{d^2x_n}{dt^2}=Ae^{i(\omega t-qna)}\left(-\omega^2\right)=-\omega^2x_n$$
$$x_{n-1}+x_{n+1}=\underbrace{Ae^{i(\omega t-qna)}}_{x_n}\left(e^{+iqa}+e^{-iqa}\right)$$

- po dosazení:

$$-m\omega^2x_n=-k\left[2x_n-x_n\left(e^{+iqa}+e^{-iqa}\right)\right]=+k\left(e^{iqa}-2+e^{-iqa}\right)=+k\frac{\left(e^{\frac{+iqa}{2}}-e^{\frac{-iqa}{2}}\right)^2}{(2i)^2}=$$
$$=-4k\sin^2\frac{qa}{2}$$

vsuvka: $e^{iz}=\cos z+i\sin z\Rightarrow\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

- dostáváme:

$$\omega = 2\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\frac{qa}{2}\right|$$

ω…možná hodnota kruhové frekvence, které se šíří řetězcem (ω>0 viz absolutní hodnota)

- tzv. disperzní relace, spojuje ω a q

- grafické zobrazení:

- platí:
  - Fce $\omega = \omega(\varphi)$ je periodickou fcí q, tj. jedné hodnotě kruhové frekvence odpovídá nekonečně mnoho hodnot q, které nevedou k jinému výsledku pro $x_n = x_n(t)$
  - omezíme se na interval $\frac{qa}{2} \in (0, \pi)$
- platí:

$$\frac{qa}{2} = \left\langle \begin{matrix} z \\ \pi - z \end{matrix} \right. \Rightarrow qna = \left\langle \begin{matrix} 2nz \\ 2\pi n - 2nz \end{matrix} \right.$$

- po dosazení:

$$x_n(t) = Ae^{i(wt+2nz)} \cdot \underbrace{e^{-i2\pi n}}_{1}$$

$x_n(t)$…toto řešení popisuje šíření kmitů řetězcem obráceným směrem než při $\frac{qa}{2} = z$, tj. je o jiný kmitavý stav řetězce

Vlny

- ve vzájemné vázané soustavě hmotných bodů dochází v důsledku vazby k šíření rozruchů – hovoříme o tzv. postupné vlně
- přechod od matematického popisu kmitů řetězce oscilátorů (pro každý oscilátor máme fci $x_n(t)$)k matematickému popisu šíření rozruchu (vlny) spojitým prostředím (v každém místě kontinua máme v každém čase výchylku $u(x,t)$;
- provedeme limitní přechod : (zavedením kontinua):

$$\lim_{\substack{N \to 0 \\ a \to 0}} na = x \longrightarrow$$ charakteristika polohy v kmitajícím kontinuu

- na základě analogie lze napsat:

$u(x,t) = u_0 e^{i(\omega t - qx)}$…vlnová fce, popisující šíření vlnění kontinuem (v daném případě jde o šíření rozruchu jednorozměrným kontinuem ve směru osy $+x$)

Fyzikální interpretace

- fyzikální význam má pouze Re nebo Im složka fce
- platí:

$$\mathrm{Re}\{u(x,t)\} = u_0 \cos(\omega t - qx)$$

1. pro $x = x_0$, tj. zvolíme si bod na ose x, dostáváme:

$$\mathrm{Re}\{u(x_0,t)\} = \underbrace{u_0 \cos\left(\omega t - \underbrace{qx_0}_{\text{fázový posun}}\right)}_{\text{časový průběh výchylky v bodě } x_0} = u_0 \cos\omega\left(t - \underbrace{\frac{qx_0}{\omega}}_{t_0\text{-doba, za kterou dorazí signál z počátku}}\right)$$

- (jde o harmonické kmity: př. mořské vlny na těle člověka, který stojí)

- pozn.: • T – doba jedné periody
- platí: $\omega = \frac{2\pi}{T}$…kruhová frekvence

2. pro $t = t_0$, tj. zvolíme libovolný čas

- platí:

$$\mathrm{Re}\{u(x.t_0)\} = \underbrace{u_0 \cos(\omega t_0 - qx)}_{\text{fce vyjadřuje výchylky v různých místech v prostoru v daném čase}} = u_0 \cos q\left(x - \underbrace{\frac{\omega t_0}{q}}_{x_0}\right)$$

x_0 …vzdálenost, do které se rozruch posune z počátku za čas t_0

- pozn.: • platí analogie mezi časovou a prostorovou částí argumentu vlnové fce

$t \leftrightarrow x$

$\omega \leftrightarrow q$ vlnová délka, charakterizuje periodicitu fce v prostoru

$T \leftrightarrow \lambda$

doba 1 periody charakterizuje periodicitu v čase

- na základě analogie $\omega \leftrightarrow q$, lze napsat:

$q = \frac{2\pi}{\lambda} \equiv k$ (ztotožnění) - velikost vlnového vektoru

- platí:

$\vec{k} = k\vec{n}$ $\vec{k}$ …vlnový vektor

$\vec{n}$ …jednotkový vektor ve směru šíření vlnění, má směr šíření vlnění kolmým na vlnoplochu

- pozn.: • vzájemný vztah mezi časovou a prostorovou částí argumentu vlnové fce,

$\lambda = vt = v\frac{1}{\nu} = \frac{v}{\nu}$ - frekvence (ný)

- lze napsat: $u(x,t) = u_0 e^{i(\omega t - kx)}$
- zobecnění: - argument vlnové fce $u(x,t)$ má tvar:

$$\omega t - kx = \omega\left(t - \frac{kx}{\omega}\right) = \omega\left(t - \frac{2\pi x}{\lambda 2\pi \frac{v}{\lambda}}\right) = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$\frac{x}{v} = t_0$ …doba, za kterou se dostane rozruch z počátku do daného místa

- dostáváme: $u(x,t) = f\left(t \mp \frac{x}{v}\right)$ …vlnová fce, která popisuje šíření rozruchu ve směru osy x

<u>Vlny v prostoru</u>

1. rovinná vlna:

- vlnoplocha – množina bodů v prostoru do kterých se rozruch dostane v daném čase
- pro vlnovou fci platí:

$u(\vec{r},t) = f(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ $\vec{r}$ …polohový vektor bodu na vlnoploše

- po úpravě:

$$u(\vec{r},t) = f\left[\omega\left(t - \frac{\vec{k}\vec{r}}{\omega}\right)\right] = f\left[\omega\left(t - \frac{2\pi\vec{n}\cdot\vec{r}}{\lambda 2\pi \frac{v}{\lambda}}\right)\right] \equiv g\left(t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{v}\right)$$

- platí:

$\vec{n}\cdot\vec{r} = 1\cdot r\cos\alpha = d$ - vzdálenost mezi vlnoplochami a vlnoplochou jdoucí počátkem

2. kulová vlna:

$u(R,t) = \frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{v}\right)$ R…vzdálenost vlnoplochy od zdroje